A. Hallar el ángulo que determinan dos vectores y el ángulo entre dos rectas.	**1.** Halla el valor del parámetro k para que los vectores $\vec{u} = (2, -2, -1)$ y $\vec{v} = (1, k, 2k + 1)$: a) Tengan la misma dirección b) Sean ortogonales c) Formen un ángulo de 120° **2.** Calcula los tres ángulos del triángulo de vértices $A(2, 0, 1)$, $B(4, -2, 2)$ y $C(5, 4, 1)$. **3.** Determina el ángulo que definen las rectas $r: \begin{cases} x-2y+5=0 \\ x+z-1=0 \end{cases}$ y $s: \begin{cases} x=-3+t \\ y=2 \\ z=2+t \end{cases}$.
B. Hallar el ángulo que determinan dos planos secantes y el ángulo entre recta y plano.	**4.** El plano π: $3x - 2y + 6z - 12 = 0$ determina con los tres planos de coordenadas un tetraedro de vértices O, A, B y C. De los seis ángulos diedros del tetraedro, tres son rectos. Calcula la medida de los otros tres ángulos diedros. **5.** La recta $r: \dfrac{x}{-2} = \dfrac{y+1}{5} = \dfrac{z-2}{14}$ corta a los planos π: $x + y + z = 0$ y σ: $3y - 4z = 7$. a) Justifica que los corta hallando el ángulo que forma con cada uno. b) ¿Cuál es la medida del ángulo diedro que forman los planos? c) Calcula el ángulo que forma la recta r con la recta $s = \pi \cap \sigma$.
C. Efectuar proyecciones de puntos sobre rectas y planos.	**6.** Se consideran el punto $P(1, 0, 7)$, la recta $r: \begin{cases} x=2 \\ y=\lambda \\ z=1-\lambda \end{cases}$ y el plano π: $2x + y + z = 3$. Halla las coordenadas de los puntos P_1 y P_2 que se obtienen al proyectar ortogonalmente el punto P sobre la recta y el plano, respectivamente. **7.** Determina la longitud del segmento $A'B'$ que se obtiene al proyectar ortogonalmente el segmento de extremos $A(3, 1, -4)$ y $B(0, -1, 1)$ sobre el plano π: $x + 2y - 2z + 4 = 0$.
D. Calcular la recta proyección de una recta dada sobre un plano determinado.	**8.** Dada la recta r: $(1 + t, -2 + 3t, 3)$ y el plano π: $3x - y + 2z = 4$, halla: a) La posición relativa de la recta y el plano. b) La distancia de la recta al plano. c) La ecuación de la recta r', proyección ortogonal de r sobre el plano π.
E. Hallar la distancia entre dos puntos, entre punto y recta, punto y plano, rectas y planos paralelos, y rectas que se cruzan.	**9.** Se considera la recta $r: \begin{cases} x-2y=1 \\ 3y+z=-2 \end{cases}$ y el punto $P(1, 0, -1)$. Halla: a) El punto de la recta r más cercano a P. b) La distancia del punto P a la recta r. c) La recta que corta perpendicularmente a r y pasa por P. **10.** Halla la distancia entre las rectas $r: \begin{cases} x-2y+5=0 \\ x+z-1=0 \end{cases}$ y $s: \begin{cases} x=-3+t \\ y=2 \\ z=2+t \end{cases}$ **11.** Justifica que la recta $r: \begin{cases} x+y=5 \\ y+z=6 \end{cases}$ y el plano π: $x + 2y + z + 5 = 0$ son paralelos y halla la distancia entre ambos.
F. Calcular el área de un triángulo y el volumen de un tetraedro cuando se conocen las coordenadas de sus vértices.	**12.** Los puntos $A(1, 3, -1)$ y $B(3, 7, -3)$ son vértices de un triángulo de área $S = \sqrt{\dfrac{12}{7}}$, y el tercer vértice C pertenece a la recta de ecuación r: $x = y = z$. Determina las coordenadas del vértice C. **13.** Los puntos $A(1, 1, 1)$, $B(1, 1, -1)$, $C(1, -1, 1)$ y $D(-1, 1, 1)$ son los vértices de un tetraedro. a) Comprueba que no son coplanarios. b) Halla el volumen del tetraedro. c) Calcula el área de cada una de sus caras.

Soluciones

1. a) $\dfrac{1}{2} = \dfrac{k}{-2} = \dfrac{2k+1}{-1} \Rightarrow k = -1$

b) $\vec{u} \cdot \vec{v} = 0 \Rightarrow (2, -2, -1) \cdot (1, k, 2k+1) = 0 \Rightarrow$
$\Rightarrow 2 - 2k - 2k - 1 = 0 \Rightarrow k = \dfrac{1}{4}$

c) $\vec{u} \cdot \vec{v} = |\vec{u}||\vec{v}|\cos 120° = 19k^2 - 68k - 14 = 0 \Rightarrow$
$\Rightarrow k = \dfrac{68 \pm \sqrt{5688}}{38}$

Para $k_1 = \dfrac{68 - \sqrt{5688}}{38}$, el ángulo es de 60°.

Para $k_2 = \dfrac{68 + \sqrt{5688}}{38} \approx 3{,}77$, se obtiene 120°.

2. $\overrightarrow{AB} = (2, -2, 1)$, $\overrightarrow{AC} = (3, 4, 0)$, $\overrightarrow{BC} = (1, 6, -1)$

$\cos \hat{A} = \dfrac{\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC}}{|\overrightarrow{AB}||\overrightarrow{AC}|} = \dfrac{6-8}{3 \cdot 5} = -\dfrac{2}{15} \Rightarrow \hat{A} \approx 97°\ 40'$

$\cos \hat{B} = \dfrac{\overrightarrow{BA} \cdot \overrightarrow{BC}}{|\overrightarrow{BA}||\overrightarrow{BC}|} = \dfrac{11}{3\sqrt{38}} \Rightarrow \hat{B} \approx 53°\ 30'$

$\hat{C} \approx 28°\ 50'$

3. Los vectores directores son $\vec{u} = (-2, -1, 2)$ y $\vec{v} = (1, 0, 1)$;
$\cos\alpha = \dfrac{|\vec{u} \cdot \vec{v}|}{|\vec{u}||\vec{v}|} = \dfrac{0}{3\sqrt{2}} = 0 \Rightarrow \alpha = 90°$

4. Los vectores normales de los planos XY, XZ e YZ son, respectivamente, $\vec{k} = (0, 0, 1)$ y $\vec{j} = (0, 1, 0)$ y $\vec{i} = (1, 0, 0)$, el del plano π, $\vec{w} = (3, -2, 6)$.

$\cos\alpha = \dfrac{|\vec{w} \cdot \vec{k}|}{|\vec{w}||\vec{k}|} = \dfrac{|6|}{7 \cdot 1} = \dfrac{6}{7} \Rightarrow \alpha \approx 31°\ 0'\ 10''$

$\cos\beta = \dfrac{|\vec{w} \cdot \vec{j}|}{|\vec{w}||\vec{j}|} = \dfrac{|-2|}{7 \cdot 1} = \dfrac{2}{7} \Rightarrow \beta \approx 73°\ 23'\ 54''$

$\cos\gamma = \dfrac{|\vec{w} \cdot \vec{i}|}{|\vec{w}||\vec{i}|} = \dfrac{|3|}{7 \cdot 1} = \dfrac{3}{7} \Rightarrow \gamma \approx 64°\ 37'\ 23''$

5. a) Los vectores normales de los planos son $\vec{w} = (1, 1, 1)$ y $\vec{v} = (0, 3, -4)$. El vector director de la recta es $\vec{u} = (-2, 5, 14)$. Los ángulos son:

$\operatorname{sen}\alpha = \dfrac{|\vec{w} \cdot \vec{u}|}{|\vec{w}||\vec{u}|} = \dfrac{|17|}{15\sqrt{3}} \Rightarrow \alpha \approx 40°\ 52' \neq 0°$

$\operatorname{sen}\beta = \dfrac{|\vec{v} \cdot \vec{u}|}{|\vec{v}||\vec{u}|} = \dfrac{41}{75} \Rightarrow \beta \approx 33°\ 8' \neq 0°$

No es paralela a los planos, luego los corta.

b) $\cos\phi = \dfrac{|\vec{w} \cdot \vec{v}|}{|\vec{w}||\vec{v}|} = \dfrac{|1|}{5\sqrt{3}} \Rightarrow \phi \approx 83°\ 22'\ 9''$

c) Vector director de s: $\vec{w} \times \vec{v} = \vec{s} = (-7, 4, 3)$.

$\cos\delta = \dfrac{|\vec{u} \cdot \vec{s}|}{|\vec{u}||\vec{s}|} = \dfrac{76}{15\sqrt{74}} \Rightarrow \delta \approx 53°\ 54'\ 53''$

6. Punto de r: $A(2, \lambda, 1 - \lambda)$, $\overrightarrow{AP} = (-1, -\lambda, 6 + \lambda)$.
Vector director de r: $\vec{u} = (0, 1, -1)$ y como $\vec{u} \cdot \overrightarrow{AP} =$
$= 0 \Rightarrow -2\lambda - 6 = 0 \Rightarrow \lambda = -3 \Rightarrow P_1(2, -3, 4)$.
Se toma la recta $s(P, \vec{w}) \perp \pi$ y su intersección da la proyección: $\{x = 1 + 2\mu,\ y = \mu,\ z = 7 + \mu\} \cap \pi$.
Al resolver se obtiene $\mu = -1 \Rightarrow P_2(-1, -1, 6)$.

7. Proyección de A:

$$\begin{cases} x = 3 + \lambda \\ y = 1 + 2\lambda \\ z = -4 - 2\lambda \\ x + 2y - 2z + 4 \end{cases} \Rightarrow \lambda = -\dfrac{19}{9} \Rightarrow A'\left(\dfrac{10}{9}, -\dfrac{25}{9}, -\dfrac{2}{9}\right)$$

B' es B, ya que $B \in \pi$; $|\overrightarrow{A'B'}| = \dfrac{\sqrt{53}}{3}$ u

8. a) $\vec{u} = (1, 3, 0)$, $\vec{w} = (3, -1, 2)$. Como $\vec{u} \cdot \vec{w} = 0$, la recta es paralela al plano.

b) $d(r, \pi) = d(A, \pi) = \dfrac{|3+2+6-4|}{\sqrt{9+1+4}} = \dfrac{7\sqrt{14}}{14} = \dfrac{1}{2}\sqrt{14}$ u

c) Se halla $\sigma \perp \pi$ con $r \subset \sigma$:
σ: $3x - y - 5z + 10 = 0$

$$r' = \pi \cap \sigma: \begin{cases} 3x - y + 2z = 4 \\ 3x - y - 5z = -10 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = \lambda \\ y = 3\lambda \\ z = 2 \end{cases}$$

9. a) Punto genérico de r: $P'(1 + 2\lambda, \lambda, -2 - 3\lambda)$, luego
$\overrightarrow{PP'} \perp \vec{u} \Rightarrow \overrightarrow{PP'} \cdot \vec{u} = 0 \Rightarrow \lambda = -\dfrac{3}{14} \Rightarrow$
$\Rightarrow P'\left(\dfrac{8}{14}, -\dfrac{3}{14}, -\dfrac{19}{14}\right)$

b) $d(P, r) = |\overrightarrow{PP'}| = \dfrac{1}{14}\sqrt{70}$ u

c) Se toma $\vec{v} = -14\overrightarrow{PP'} = (6, 3, 5)$ y se obtiene $s(P, \vec{v}) = (1 + 6\mu, 3\mu, -1 + 5\mu)$.

10. $d(r, s) = \dfrac{\left|[\vec{u}, \vec{v}, \overrightarrow{AB}]\right|}{|\vec{u} \times \vec{v}|} = \dfrac{|-4|}{\sqrt{1^2 + (-4)^2 + (-1)^2}} = \dfrac{2}{3}\sqrt{2}$ u

11. $\vec{u} = (-1, 1, -1)$, $A(5, 0, 6)$, $\vec{w} = (1, 2, 1)$. Como $\vec{u} \cdot \vec{w} = 0$, son paralelos. $d(r, \pi) = d(a, \pi) = \dfrac{|5+6+5|}{\sqrt{1+4+1}} = \dfrac{16}{\sqrt{6}}$ u

12. $C(\lambda, \lambda, \lambda)$, $\overrightarrow{AB} = (2, 4, -2)$, $\overrightarrow{AC} = (\lambda - 1, \lambda - 3, \lambda + 1)$,
$S = \dfrac{1}{2}|\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC}| \Rightarrow \sqrt{\dfrac{12}{7}} = \dfrac{1}{2}\sqrt{56\lambda^2 - 16\lambda + 8} \Rightarrow$
$\Rightarrow \lambda = \dfrac{1}{7} \Rightarrow C\left(\dfrac{1}{7}, \dfrac{1}{7}, \dfrac{1}{7}\right)$

13. a) $\pi(A; \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC})$: $\begin{vmatrix} 0 & 0 & x-1 \\ 0 & -2 & y-1 \\ -2 & 0 & z-1 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow x - 1 = 0$

Como $D \notin \pi$, no son coplanarios.

b) $V = \dfrac{1}{6}|\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AD}| \Rightarrow \dfrac{1}{6}\left\|\begin{matrix} 0 & 0 & -2 \\ 0 & -2 & 0 \\ -2 & 0 & 0 \end{matrix}\right\| = \dfrac{8}{6} = \dfrac{4}{3}$ u^3

c) $S_{ABC} = \dfrac{1}{2}|\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC}| = \dfrac{1}{2}|(-4, 0, 0)| = 2$ u^2
Igualmente, $S_{ABD} = S_{ACD} = 2$, $S_{BCD} = 2\sqrt{3}$ u^2.