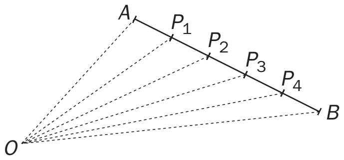
5 Planos y rectas en el espacio

CRITERIOS DE EVALUACIÓN	ACTIVIDADES DE EVALUACIÓN
A. Dividir un segmento en partes iguales.	**1.** Determina cuatro puntos, P_1, P_2, P_3 y P_4, que dividan al segmento de extremos $A(7, -3, 8)$ y $B(-8, 2, -2)$ en cinco partes iguales. **2.** Si $M(3, 5, -1)$ es el punto medio del segmento AB y $B(10, 6, 3)$, ¿cuál es A?
B. Hallar las coordenadas del baricentro de un triángulo.	**3.** Los vértices de un triángulo son $A(1, 2, 3)$, $B(7, 0, -4)$ y $C(-2, 4, -2)$. Determina: a) Las coordenadas del punto medio, M, del lado AB. b) Las coordenadas del baricentro, G, del triángulo. c) ¿Qué relación hay entre los vectores $\overrightarrow{CG}$ y $\overrightarrow{GM}$?
C. Conocer y saber hallar las distintas ecuaciones de una recta, pasar de unas a otras y determinar con ellas puntos de la recta y su vector director.	**4.** Expresa de forma paramétrica, continua e implícita la ecuación de la recta que pasa por el punto $A(-2, 3, 1)$ y tiene la dirección del vector $\vec{u} = (1, 1, 2)$. **5.** Dada la recta de ecuación $\begin{cases} x + y - 2z = 7 \\ 2x - y - z = -1 \end{cases}$, determina: a) Sus ecuaciones paramétricas. b) Las coordenadas de un punto de la recta y de su vector director.
D. Saber determinar un plano de distintas formas y saber hallar en cada caso su ecuación.	**6.** Calcula la ecuación general del plano que contiene a los puntos $A(0, -1, 5)$, $B(2, 1, -1)$ y $C(1, 2, 1)$. **7.** Halla la ecuación del plano que contiene a la recta r: $\frac{x+2}{5} = \frac{y}{-2} = z - 3$ y al punto $P(6, 5, -2)$.
E. Hallar la ecuación de un plano del que se conoce un punto y la dirección del vector normal.	**8.** Los vectores directores de un plano son $\vec{u} = (1, -1, 5)$ y $\vec{v} = (0, 2, -3)$, y $A(3, 3, 3)$ es un punto del mismo. Halla el vector normal del plano, y con él y el punto A, la ecuación general del plano. **9.** Halla la ecuación del plano que corta perpendicularmente a la recta r: $(1 - \lambda, 2\lambda, 3 + \lambda)$ y pasa por el origen de coordenadas.
F. Saber hallar proyecciones de puntos sobre rectas y de puntos y rectas sobre planos.	**10.** Calcula la longitud del segmento $A'B'$ que se obtiene al proyectar el segmento de extremos $A(2, -2, 2)$ y $B(-3, 8, -1)$ sobre el plano π: $x + y - z + 5 = 0$. **11.** Halla la proyección del punto $P(5, 2, 2)$ sobre la recta r: $x + 2 = \frac{y}{0} = \frac{z-3}{2}$. **12.** Determina las ecuaciones paramétricas de la proyección ortogonal del eje X sobre el plano $x - y - 3z - 5 = 0$.
G. Resolver problemas de paralelismo, perpendicularidad e intersección de rectas y planos.	**13.** Halla la ecuación de la recta paralela a los planos π: $3x - y + z = -4$, σ: $x + y = 0$ y que pasa por el punto $A(5, 4, 3)$. Expresa la ecuación en forma continua. **14.** Determina la ecuación de la recta que pasa por $P(1, 0, -1)$ y corta perpendicularmente a la recta s: $\begin{cases} x = 3 - \lambda \\ y = 1 + 2\lambda \\ z = -3 + \lambda \end{cases}$.
H. Efectuar el estudio de la posición relativa entre dos rectas, entre una recta y un plano, y entre dos o tres planos.	**15.** Las rectas de ecuaciones r_1: $\begin{cases} x - y - z = -4 \\ -x + 2y - z = 3 \end{cases}$ y r_2: $\begin{cases} y - 2z = -1 \\ x - 2z = 1 \end{cases}$ se cortan en un punto P. Halla las coordenadas de P y la ecuación del plano que contiene a las dos rectas. **16.** Se considera la recta r: $\begin{cases} x + my + z = 1 \\ x + y - z = -2 \end{cases}$ y el plano π: $x + 7 - z = n$. Estudia su posición relativa según los valores de los parámetros m y n, es decir: a) ¿Para qué valores de m se cortan? b) ¿Para qué valores de m y n está la recta contenida en el plano? c) ¿Para qué valores de m y n son paralelos? d) ¿Para qué valores de m y n se cortan en el punto $P(1, 1, 4)$?

1. $\overrightarrow{OP_1} = \overrightarrow{OA} + \frac{1}{5}\overrightarrow{AB}$



$\overrightarrow{OP_1} = (7, -3, 8) + \frac{1}{5}(-15, 5, -10) = (4, -2, 6) \Rightarrow P_1(4, -2, 6)$

$\overrightarrow{OP_2} = (7, -3, 8) + \frac{2}{5}(-15, 5, -10) = (1, -1, 4) \Rightarrow P_2(1, -1, 4)$

Análogamente, $P_3(-2, 0, 2)$ y $P_4(-5, 1, 0)$.

2. $\frac{x+10}{2} = 3 \Rightarrow x = -4, \quad \frac{y+6}{2} = 5 \Rightarrow y = 4$

$\frac{z+3}{2} = -1 \Rightarrow z = -5$. El punto es $A(-4, 4, -5)$.

3. a) $M\left(\frac{1+7}{2}, \frac{2+0}{2}, \frac{3-4}{2}\right) = \left(4, 1, -\frac{1}{2}\right)$

b) $G\left(\frac{1+7-2}{3}, \frac{2+0+4}{3}, \frac{3-4-2}{3}\right) = (2, 2, -1)$

c) $\overrightarrow{CG} = (4, -2, 1)$, $\overrightarrow{GM} = \left(2, -1, \frac{1}{2}\right)$

Luego $\overrightarrow{CG} = 2\overrightarrow{GM}$.

4. $\vec{x} = \vec{a} + \lambda\vec{u} \Rightarrow \begin{cases} x = -2+\lambda \\ y = 3+\lambda \\ z = 1+2\lambda \end{cases} \Leftrightarrow \frac{x+2}{1} = \frac{y-3}{1} = \frac{z-1}{2}$

En forma implícita: $\begin{cases} x - y = -5 \\ 2x - z = -5 \end{cases}$.

5. a) Se suman las ecuaciones y se obtiene:

$\begin{cases} x + y - 2z = 7 \\ 3x - 3z = 6 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 2+\lambda \\ y = 5+\lambda \\ z = \lambda \end{cases}$

b) $A(2, 5, 0)$, $\vec{u} = (1, 1, 1)$

6. $\vec{u} = \overrightarrow{AB} = (2, 2, -6) \qquad \vec{v} = \overrightarrow{AC} = (1, 3, -4)$.

El plano pedido es $\pi(A, \vec{u}, \vec{v})$: $\begin{vmatrix} 2 & 1 & x \\ 2 & 3 & y+1 \\ -6 & -4 & z-5 \end{vmatrix} = 0$

Operando, $10x + 2y + 4z = 18 \Leftrightarrow 5x + y + 2z = 9$.

7. $A(-2, 0, 3)$ pertenece a la recta y al plano.

$\pi(P, \vec{u}, \overrightarrow{AP})$: $\begin{vmatrix} 5 & 8 & x-6 \\ -2 & 5 & y-5 \\ 1 & -5 & z+2 \end{vmatrix} = 0$. Desarrollando, resulta $5x + 33y + 41z = 113$.

8. $\vec{w} = \vec{u} \times \vec{v} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & -1 & 5 \\ 0 & 2 & -3 \end{vmatrix} = (-7, 3, 2)$

$\vec{w} \cdot \overrightarrow{AX} = 0 \Rightarrow (-7, 3, 2) \cdot (x - 3, y - 3, z - 3) = 0$

y se obtiene $-7x + 3y + 2 = -6$.

9. $\vec{w} = (-1, 2, 1)$ y como pasa por $O(0, 0, 0)$, la ecuación pedida es $-x + 2y + z = 0$.

10. El vector normal del plano es $\vec{w} = (1, 1, -1)$.

$r(A, \vec{w})$: $\begin{cases} x = 2+\lambda \\ y = -2+\lambda, \; A' = r \cap \pi \\ z = 2-\lambda \end{cases}$

$(2 + \lambda) + (-2 + \lambda) - (2 - \lambda) + 5 = 0 \Rightarrow \lambda = -1$

El punto A' es $(1, -3, 3)$.

De forma análoga, para B se obtiene $\lambda = -\frac{11}{3}$ y $B\left(-\frac{20}{3}, \frac{13}{3}, \frac{8}{3}\right)$. Longitud $= \left|\overrightarrow{A'B'}\right| = \frac{1}{3}\sqrt{1014}$.

11. Se calcula $\pi(P, \vec{u})$, donde $\vec{u} = (1, 0, 2)$ es el vector director de r. π: $(1, 0, 2) \cdot (x - 5, y - 2, z - 2) = 0$, es decir, π: $x + 2z = 9$.

$P' = r \cap \pi \Rightarrow \begin{cases} x = -2+\lambda \\ y = 0 \\ z = 3+2\lambda \\ x + 2z = 9 \end{cases} \Rightarrow \lambda = 1 \Rightarrow P'(-1, 0, 5)$

12. Se halla el plano σ que verifica $\begin{cases} \{y = 0, z = 0\} \subset \sigma \\ \sigma \perp \pi \end{cases}$ y la recta pedida es $r = \pi \cap \sigma$.

σ: $\begin{vmatrix} 1 & 1 & x \\ 0 & -1 & y \\ 0 & -3 & z \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow 3y - z = 0$

r: $\begin{cases} x - y - 3z = 5 \\ 3y - z = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 5+10\lambda \\ y = \lambda \\ z = 3\lambda \end{cases}$

13. Vector director: $\vec{u} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 3 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{vmatrix} = (-1, 1, 4)$

La recta es: r: $\frac{x-5}{-1} = \frac{y-4}{1} = \frac{z-3}{4}$.

14. Un punto genérico de s es $A(3 - \lambda, 1 + 2\lambda, -3 + \lambda)$ y tiene que cumplirse que $\vec{u} \perp \overrightarrow{AP}$, donde A es la proyección de P sobre la recta; por tanto,

$(-1, 2, 1) \cdot (-2 + \lambda, -1 - 2\lambda, 2 - \lambda) = 0 \Rightarrow \lambda = \frac{1}{3}$.

La proyección de P sobre la recta es $P'\left(\frac{8}{3}, \frac{5}{3}, -\frac{8}{3}\right)$ y la recta buscada es la que pasa por P y P', es decir, r: $(1 + \mu, \mu, -1 - \mu)$.

15. $P = r_1 \cap r_2 = (13, 11, 6)$

π: $\begin{vmatrix} 3 & 2 & x-13 \\ 2 & 2 & y-11 \\ 1 & 1 & z-6 \end{vmatrix} = 0 \Leftrightarrow y - 2z + 1 = 0$

16. Hallando el rango de la matriz $\begin{pmatrix} 1 & m & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & -2 \\ 1 & 7 & -1 & n \end{pmatrix}$ se obtiene: $\text{rg}(M) = \text{rg}(M^*) = 3$ para todo m y n. Se cortan para cualquier valor de m y n.

Se cortan en $P(1, 1, 4)$ para $m = -4$ y $n = 4$.