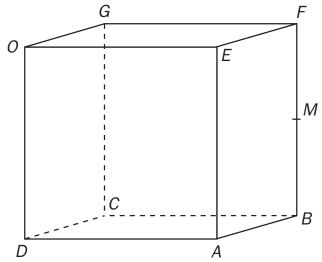
Propuesta A



1. En el cubo de la figura, *M* es el punto medio de *BF*. Expresa los vectores $\overrightarrow{AF}$, $\overrightarrow{GE}$, $\overrightarrow{FO}$ y $\overrightarrow{DM}$ como combinación lineal de los vectores $\vec{g}=\overrightarrow{OG}$, $\vec{d}=\overrightarrow{OD}$ y $\vec{e}=\overrightarrow{OE}$.

2. Calcula el valor de *k* para que el vector $\vec{a}=(7,-6,2)$ sea combinación lineal de los vectores $\vec{b}=(1,0,5)$ y $\vec{c}=(2,\,-2,\,k)$.

3. Dados los vectores $\vec{u}=\vec{i}+2\vec{j}-2\vec{k}$ y $\vec{v}=6\vec{i}-2\vec{j}+3\vec{k}$, calcula:

a) Los módulos de $\vec{u}$ y de $\vec{v}$.

b) El producto vectorial de $\vec{u}$ y $\vec{v}$.

c) El seno del ángulo que forman $\vec{u}$ y $\vec{v}$.

d) La medida del ángulo que forman $\vec{u}$ y $\vec{v}$.

e) La proyección de $\vec{v}$ sobre $\vec{u}$.

4. Determina el valor del parámetro λ para que los vectores $\vec{u}=\lambda\vec{i}-2\vec{j}+3\vec{k}$ y $\vec{v}=-\vec{i}+\lambda\vec{j}+\vec{k}$ sean:

a) Ortogonales. b) Paralelos.

5. Halla un vector unitario que sea ortogonal a los vectores $\vec{u}=(4,6,-1)$ y $\vec{v}=(2,3,-2)$.

6. Demuestra vectorialmente que las diagonales de un rombo son perpendiculares.

7. Sean $\vec{u}=\vec{u}_1+2\vec{u}_2-\vec{u}_3$; $\vec{v}=2\vec{u}_1+\vec{u}_2+\vec{u}_3$; $\vec{w}=5\vec{u}_1-5\vec{u}_2-5\vec{u}_3$. Estudia las soluciones de las ecuaciones vectoriales:

a) $\vec{u}\times\vec{x}=\vec{v}$

b) $\vec{u}\times\vec{x}=\vec{w}$

c) $\vec{v}\,x=\vec{u}$

d) $\vec{v}\times\vec{u}=x\,\vec{w}$

8. Si $\vec{u}=(3,0,-1)$, $\vec{v}=(-5,2,3)$, $\vec{w}=(2,-1,1)$, comprueba que $\vec{u}\times(\vec{v}\times\vec{w})=(\vec{u}\cdot\vec{w})\vec{v}-(\vec{u}\cdot\vec{v})\vec{w}$.

9. Se consideran los vectores de coordenadas $\vec{u}=(-1,1,1)$ y $\vec{v}=(4,2,x)$.

a) Calcula el valor de *x* que hace que los vectores $\vec{u}$ y $\vec{v}$ sean perpendiculares.

b) Para el valor de *x* calculado en el apartado anterior, expresa el vector $(\vec{u}\times\vec{v})\times\vec{u}$ como producto de un número real por el vector $\vec{v}$.

10. Determina todos los posibles valores del parámetro *k* que hacen que el triángulo de vértices $A(3,4,-1)$, $B(1,0,3)$ y $C(k,5,-2)$ sea rectángulo.

Propuesta B

1. Un minero hace un recorrido por una mina bajo una llanura: baja 10 m en ascensor, camina 20 m hacia el norte por una galería, 15 m hacia el oeste, 5 m hacia el sur, sube 5 m en ascensor y camina 10 m hacia el noreste. En ese momento se produce un derrumbe, y el minero queda atrapado. Logra comunicar su posición a sus compañeros en la superficie y, tras analizar la situación, estos deciden cavar un pozo vertical para rescatarlo.

a) ¿En qué posición de la superficie (relativa a la bocamina) deben perforar?

b) ¿A qué profundidad se encuentra el minero atrapado?

c) ¿Cuál es la distancia en línea recta entre el minero y la bocamina?

2. El vector $\vec{a} = (-3, -1, 2)$ es combinación lineal de los vectores $\vec{b} = (1, 5, -4)$ y $\vec{c} = (k, -2, 3)$. ¿Cuál es el valor de *k*?

3. Dados los vectores $\vec{u} = -2\vec{i} + \vec{j}$ y $\vec{v} = -\vec{i} + \vec{j} + 3\vec{k}$, calcula:

a) Los módulos de $\vec{u}$ y de $\vec{v}$.

b) El producto escalar de $\vec{u}$ y $\vec{v}$.

c) La medida del ángulo que forman $\vec{u}$ y $\vec{v}$.

d) La proyección de $\vec{u}$ sobre $\vec{v}$.

e) La proyección de $\vec{v}$ sobre $\vec{u}$.

4. Sean $\vec{u} = -\vec{u}_1 + 2\vec{u}_2 + \vec{u}_3$; $\vec{v} = 2\vec{u}_1 - \vec{u}_2 + 3\vec{u}_3$; $\vec{w} = 2\vec{u}_1 + 2\vec{u}_2 + 8\vec{u}_3$. Estudia las soluciones de las ecuaciones vectoriales:

a) $\vec{u}\,x = \vec{v}$ b) $\vec{u} \cdot \vec{x} = \vec{w}$ c) $(\vec{u} + \vec{v})\,x = \vec{w}$ d) $\vec{v} \cdot \vec{x} = 1$

5. Se llaman cosenos directores de un vector $\vec{u}$ a los cosenos de los ángulos que determina el vector $\vec{u}$ con cada uno de los vectores de la base. Halla los cosenos directores del vector $\vec{u} = (2, 2, 1)$.

6. Demuestra la igualdad vectorial $|\vec{u} + \vec{v}|^2 + |\vec{u} - \vec{v}|^2 = 2|\vec{u}|^2 + 2|\vec{v}|^2$.

7. Simplifica la expresión $(\vec{u} + \vec{v} + \vec{w}) \times (\vec{u} - \vec{v} - \vec{w})$, sabiendo que el vector $\vec{w}$ es combinación lineal de los vectores $\vec{u}$ y $\vec{v}$.

8. Sean los vectores $\vec{u} = (1, 0, 1)$, $\vec{v} = (0, 1, 1)$ y $\vec{w} = (1, 1, 0)$. Demuestra que los sistemas de vectores siguientes son linealmente independientes:

a) $\{\vec{u} \times \vec{v}, \vec{v}, \vec{w}\}$ b) $\{\vec{u} \times \vec{v}, \vec{v} \times \vec{w}, \vec{w}\}$

9. Se considera el vector de coordenadas $\vec{u} = (-1, 1, 1)$.

a) Halla, con la ayuda de los parámetros necesarios, la expresión de todos los vectores ortogonales a $\vec{u}$.

b) Escribe el vector $\vec{a} = (-3, 0, 3)$ como suma de dos vectores, uno de ellos paralelo a $\vec{u}$ y el otro ortogonal a $\vec{u}$.

10. Se consideran los vectores $\vec{a} = 2\vec{i} + x\vec{j} + 3\vec{k}$, $\vec{b} = \vec{i} + x\vec{j}$ y $\vec{c} = \vec{i} + 2\vec{j} + x\vec{k}$.

a) Calcula los posibles valores de *x* que hacen que el volumen del paralelepípedo determinado por los tres vectores sea igual a 10.

b) Estudia si existe algún valor de *x* que haga que los tres vectores sean coplanarios.

Soluciones propuesta A

1. $\overrightarrow{AF}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BF}=\overrightarrow{OG}-\overrightarrow{OD}=\vec g-\vec d$

$\overrightarrow{GE}=\overrightarrow{GO}+\overrightarrow{OE}=-\overrightarrow{OG}+\overrightarrow{OE}=-\vec g+\vec e$

$\overrightarrow{FO}=\overrightarrow{FE}+\overrightarrow{EO}=-\overrightarrow{OG}-\overrightarrow{OE}=-g-\vec e$

$\overrightarrow{DM}=\overrightarrow{DO}+\overrightarrow{OG}+\overrightarrow{GF}+\overrightarrow{FM}=$

$=-\vec d+\vec g+\vec e+\dfrac{1}{2}\vec d=-\dfrac{1}{2}\vec d+\vec g+\vec e$

2. $\vec a=\alpha\vec b+\beta\vec c\Rightarrow\begin{cases}7=\alpha+2\beta\\-6=-2\beta\\2=5\alpha+k\beta\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}\alpha=1\\\beta=3\\k=-1\end{cases}$

3. a) $|\vec u|=+\sqrt{\vec u\cdot\vec u}=\sqrt{1^2+2^2+(-2)^2}=3$

$|\vec v|=+\sqrt{\vec v\cdot\vec v}=\sqrt{6^2+(-2)^2+(3)^2}=7$

b) $\vec u\times\vec v=\begin{vmatrix}\vec i&\vec j&\vec k\\1&2&-2\\6&-2&3\end{vmatrix}=(2,-15,-14)$

c) $\operatorname{sen}\alpha=\dfrac{|\vec u\times\vec v|}{|\vec u||\vec v|}=\dfrac{\sqrt{4+225+196}}{3\cdot7}=\dfrac{\sqrt{425}}{21}$

d) $\alpha=\operatorname{arcsen}\left(\dfrac{\sqrt{425}}{21}\right)=79^\circ\ 1'\ 9{,}93''$

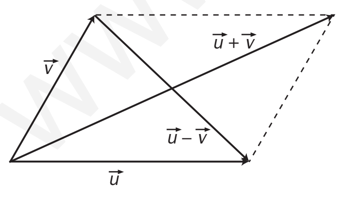
e) $|\vec v\,'|=\dfrac{|\vec u\cdot\vec v|}{|\vec u|}=\dfrac{|-4|}{3}=\dfrac{4}{3}$

4. a) $\vec u\cdot\vec v=0\Rightarrow-\lambda-2\lambda+3=0\Rightarrow\lambda=1$

b) $\dfrac{\lambda}{-1}=\dfrac{-2}{\lambda}=\dfrac{3}{1}\Rightarrow\begin{cases}\lambda^2=2\\3\lambda=-2\end{cases}$. Incompatible, $\nexists\lambda$

5. $\vec x=\pm\dfrac{\vec u\times\vec v}{|\vec u\times\vec v|}=\pm\dfrac{(-9,\ 6,\ 0)}{\sqrt{81+36}}=\pm\dfrac{1}{\sqrt{13}}(-3,\ 2,\ 0)$

6.



Las diagonales están representadas por los vectores $\vec u+\vec v$ y $\vec u-\vec v$. Se halla su producto escalar, teniendo en cuenta que $|\vec u|=|\vec v|$:

$(\vec u+\vec v)\cdot(\vec u-\vec v)=|\vec u|^2-\vec u\cdot\vec v+\vec v\cdot\vec u-|\vec v|^2=0$, por tanto, son ortogonales.

7. a) $\vec u\times\vec x$ es ortogonal a $\vec u$, y como $\vec u\cdot\vec v=3\neq0$, no puede existir ningún vector $\vec x$ que verifique la igualdad.

b) Como $\vec u\cdot\vec w=0$, puede haber vectores $\vec x=(x,\ y,\ z)$ que verifiquen la igualdad $\vec u\times\vec x=\vec w$. Se resuelve la ecuación vectorial:

$\vec u\times\vec x=(2z+y,-x-z,y-2x)=(5,-5,-5)$

El sistema que se obtiene es compatible indeterminado con solución:

$(x,y,z)=(5-\lambda,\ 5-2\lambda,\ \lambda),\ \lambda\in\mathbf{R}$

c) No tiene solución, porque $\vec v\,x$ es un vector con la dirección de $\vec v$, y $\vec u$ no tiene la misma dirección que $\vec v$.

d) $\vec v\times\vec u=(-3,3,3)=-\dfrac{3}{5}(5,-5,-5)\Rightarrow x=-\dfrac{3}{5}$.

8. $(\vec v\times\vec w)=(5,\ 11,\ 1),\quad \vec u\times(\vec v\times\vec w)=(11,\ -8,\ 33)$

$(\vec u\cdot\vec w)\vec v=5\vec v=(-25,\ 10,\ 15)$

$(\vec u\cdot\vec v)\vec w=-18\vec w=(-36,\ 18,\ -18)$

$(\vec u\cdot\vec w)\vec v\ -\ (\vec u\cdot\vec v)\vec w=(11,\ -8,\ 33)$

9. a) $\vec u\cdot\vec v=0\Rightarrow-4+2+x=0\Rightarrow x=2$

b) $\vec u\times\vec v=\begin{vmatrix}\vec i&\vec j&\vec k\\-1&1&1\\4&2&2\end{vmatrix}=(0,6,-6)$

$(\vec u\times\vec v)\times\vec u=\begin{vmatrix}\vec i&\vec j&\vec k\\0&6&-6\\-1&1&1\end{vmatrix}=(12,\ 6,\ 6)=3\vec v$

10. a) Si es rectángulo en *A*, entonces $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}=0$

$\overrightarrow{AB}=(-2,-4,\ 4);\ \overrightarrow{AC}=(k-3,\ 1,-1)\Rightarrow$

$\Rightarrow-2(k-3)-4-4=0\Rightarrow k=-1$

b) Si es rectángulo en *B*, entonces $\overrightarrow{BA}\cdot\overrightarrow{BC}=0$

$\overrightarrow{BA}=(2,\ 4,-4);\ \overrightarrow{BC}=(k-1,\ 5,-5)\Rightarrow$

$\Rightarrow 2(k-1)+20+20=0\Rightarrow k=-19$

c) Si es rectángulo en *C*, entonces $\overrightarrow{CA}\cdot\overrightarrow{CB}=0$

$\overrightarrow{CA}=(3-k,-1,\ 1);\ \overrightarrow{CB}=(1-k,-5,\ 5)\Rightarrow$

$\Rightarrow(3-k)(1-k)+5+5=0\Rightarrow k^2-4k+13=0$,

que no tiene solución real.

Soluciones propuesta B

1. Se denota el norte por $\vec{i}$, el este por $\vec{j}$ y arriba por $\vec{k}$. Entonces el vector de posición del minero es:

$\vec{p} = -10\vec{k} + 20\vec{i} - 15\vec{j} - 5\vec{i} + 5\vec{k} + 5\sqrt{2}\vec{i} + 5\sqrt{2}\vec{j} =$

$= \left(15 + 5\sqrt{2}\right)\vec{i} + \left(-15 + 5\sqrt{2}\right)\vec{j} - 5\vec{k}$.

a) Aprox. 22,07 m al norte y 7,93 m al oeste.

b) A 5 m de profundidad.

c) $|\vec{p}| = +\sqrt{\vec{p}\cdot\vec{p}} = 5\sqrt{23} \approx 23{,}98$ m.

2. $\vec{a} = \alpha\vec{b} + \beta\vec{c} \Rightarrow \begin{cases} -3 = \alpha + k\beta \\ -1 = 5\alpha - 2\beta \\ 2 = -4\alpha + 3\beta \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \alpha = \dfrac{1}{7} \\ \beta = \dfrac{6}{7} \\ k = -\dfrac{11}{3} \end{cases}$

3. a) $|\vec{u}| = +\sqrt{\vec{u}\cdot\vec{u}} = \sqrt{(-2)^2 + 1^2 + 0^2} = \sqrt{5}$

$|\vec{v}| = +\sqrt{\vec{v}\cdot\vec{v}} = \sqrt{(-1)^2 + (1)^2 + (3)^2} = \sqrt{11}$

b) $\vec{u}\cdot\vec{v} = 2 + 1 + 0 = 3$

c) $\cos\alpha = \dfrac{\vec{u}\cdot\vec{v}}{|\vec{u}||\vec{v}|} = \dfrac{3}{\sqrt{5}\sqrt{11}} \Rightarrow$

$\Rightarrow \alpha = \arccos\left(\dfrac{3}{\sqrt{55}}\right) = 66^\circ\ 8'\ 20''$

d) $|\vec{u}\,'| = \dfrac{|\vec{u}\cdot\vec{v}|}{|\vec{v}|} = \dfrac{3}{\sqrt{11}}$

e) $|\vec{v}\,'| = \dfrac{|\vec{u}\cdot\vec{v}|}{|\vec{u}|} = \dfrac{3}{\sqrt{5}}$

4. a) No tiene solución, porque $\vec{u}\,x$ es un vector con la dirección de $\vec{u}$, y $\vec{v}$ no tiene la misma dirección que $\vec{u}$.

b) $\vec{u}\cdot\vec{x} = \vec{w}$ no tiene sentido, porque $\vec{u}\cdot\vec{x}$ es un número real y no puede ser igual a un vector.

c) $(\vec{u} + \vec{v})x = \vec{w} \Rightarrow [(-1,2,1) + (2,-1,3)]x = (2,2,8) \Rightarrow$
$\Rightarrow (1,1,4)x = (2,2,8) \Rightarrow x = 2$

d) $\vec{v}\cdot\vec{x} = 1 \Rightarrow (2,-1,3)\cdot(x,y,z) = 1 \Rightarrow 2x - y + 3z = 1$

Esta ecuación tiene infinitas soluciones que pueden expresarse de la siguiente forma:

$\vec{x} = (\lambda,\ -1 + 2\lambda + 3\mu,\ \mu),\quad \lambda, \pi \in \mathbf{R}$

5. Los vectores de la base son:

$\vec{i} = (1, 0, 0),\ \vec{j} = (0, 1, 0),\ \vec{k} = (0, 0, 1)$

$\cos\alpha = \dfrac{\vec{u}\cdot\vec{i}}{|\vec{u}||\vec{i}|} = \dfrac{2 + 0 + 0}{\sqrt{2^2 + 2^2 + 1^2}\sqrt{1^2 + 0^2 + 0^2}} = \dfrac{2}{3}$

$\cos\beta = \dfrac{\vec{u}\cdot\vec{j}}{|\vec{u}||\vec{j}|} = \dfrac{2}{3}$, $\cos\gamma = \dfrac{\vec{u}\cdot\vec{k}}{|\vec{u}||\vec{k}|} = \dfrac{1}{3}$

6. $|\vec{u} + \vec{v}|^2 + |\vec{u} - \vec{v}|^2 = (\vec{u} + \vec{v})\cdot(\vec{u} + \vec{v}) + (\vec{u} - \vec{v})\cdot(\vec{u} - \vec{v}) =$

$= \vec{u}\cdot\vec{u} + \vec{v}\cdot\vec{v} + 2(\vec{u}\cdot\vec{v}) + \vec{u}\cdot\vec{u} + \vec{v}\cdot\vec{v} - 2(\vec{u}\cdot\vec{v}) =$

$= |\vec{u}|^2 + |\vec{v}|^2 + |\vec{u}|^2 + |\vec{v}|^2 = 2|\vec{u}|^2 + 2|\vec{v}|^2$

7. $(\vec{u} + \vec{v} + \vec{w})\times(\vec{u} - \vec{v} - \vec{w}) =$

$= \vec{0} - \vec{u}\times\vec{v} - \vec{u}\times\vec{w} + \vec{v}\times\vec{u} - \vec{0} - \vec{v}\times\vec{w} + \vec{w}\times\vec{u} - \vec{w}\times\vec{v} - \vec{0} =$

$= -2(\vec{u}\times\vec{v}) - 2(\vec{u}\times\vec{w}) = -2\left(\vec{u}\times(\vec{v} + \vec{w})\right)$

Si $\vec{w} = \lambda\vec{u} + (\mu - 1)\vec{v} \Rightarrow \vec{v} + \vec{w} = \lambda\vec{u} + \mu\vec{v}$, y resulta:

$-2\left(\vec{u}\times(\vec{v} + \vec{w})\right) = -2\left(\vec{u}\times(\lambda\vec{u} + \mu\vec{v})\right) = -2\mu\left(\vec{u}\times\vec{v}\right)$

8. $\vec{u}\times\vec{v} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{vmatrix} = (-1, -1, 1),\ \vec{v}\times\vec{w} = (-1, 1, -1)$

a) $\det\left(\vec{u}\times\vec{v},\ \vec{v},\ \vec{w}\right) = \begin{vmatrix} -1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{vmatrix} = -1 \neq 0$

b) $\det\left(\vec{u}\times\vec{v},\ \vec{v}\times\vec{w},\ \vec{w}\right) = \begin{vmatrix} -1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 0 \end{vmatrix} = -2 \neq 0$

9. a) $\vec{u}\cdot\vec{x} = 0 \Leftrightarrow (-1, 1, 1)\cdot(x,\ y,\ z) = 0 \Rightarrow -x + y + z = 0$

El conjunto es: $\{\vec{x} = (\lambda + \mu, \lambda, \mu),\ \lambda, \mu \in \mathbf{R}\}$.

b) $\vec{a} = k\vec{u} + \vec{x} \Rightarrow (-3, 0, 3) = (-k,\ k,\ k) + (\lambda + \mu,\ \lambda,\ \mu)$

$\begin{cases} -3 = -k + \lambda + \mu \\ 0 = k + \lambda \\ 3 = k + \mu \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} k = 2 \\ \lambda = -2 \\ \mu = 1 \end{cases}$

$\vec{a} = (-2,\ 2,\ 2) + (-1, -2,\ 1)$

10. a) El volumen del paralelepípedo es:

$V = \left|\left[\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}\right]\right| = \begin{vmatrix} 2 & x & 3 \\ 1 & x & 0 \\ 1 & 2 & x \end{vmatrix} = x^2 - 3x + 6 = 10 \Rightarrow$

$\Rightarrow x_1 = -1,\ x_2 = 4$

b) Si fueran coplanarios, $\det(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}) = 0$, que no tiene soluciones reales. Luego no existe ningún valor de x que cumpla esta condición.