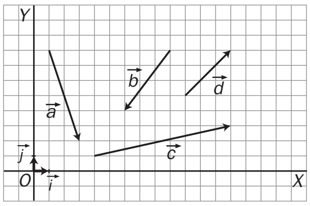
1. Tomando $\{\vec{i}, \vec{j}\}$ como base de V_2, que es una base ortonormal, indica las coordenadas de los vectores representados en la figura y calcula sus módulos.



2. Se consideran $\vec{u} = (3, -1)$, $\vec{v} = (-4, 2)$ y $\vec{w} = (0, -4)$, vectores libres de V_2. Efectúa las siguientes operaciones:

a) $2\vec{u} - 3\vec{v} + \vec{w}$ b) $(3\vec{w}) \cdot (\vec{v} - 2\vec{u})$ c) $\vec{u} \cdot \vec{v} + \vec{v} \cdot \vec{w} - \vec{w} \cdot \vec{u}$

3. ¿Cuál es el vector director de la recta que pasa por los puntos $A(2, -3)$ y $B(-1, -1)$? Escribe las ecuaciones paramétricas, la general y la explícita de la recta, y determina su pendiente y su ordenada en el origen.

4. La ecuación en forma paramétrica $\begin{cases} x = 4\cos t \\ y = 2\,\text{sen}\, t \end{cases}$ corresponde a una cónica. Elimina el parámetro t (para ello ten en cuenta la propiedad fundamental de trigonometría) y obtén la ecuación implícita para identificar la cónica. Represéntala gráficamente e indica sus elementos característicos.

5. Las rectas $r\colon x + 3y - 2 = 0$ y $s\colon 2x + 7y - 3 = 0$ determinan un ángulo.

a) Halla el vértice de dicho ángulo.

b) Indica los vectores directores de las dos rectas.

c) Calcula el seno y el coseno del ángulo que forman.

6. Justifica que el punto $P(-3, 5)$ pertenece a la bisectriz del ángulo determinado por las rectas $r\colon 4x + 3y = 6$ y $s\colon 3x + 4y - 8 = 0$.

7. Calcula la ecuación general de la mediatriz del segmento cuyos extremos son los puntos de coordenadas $A(-3, 6)$ y $B(5, 10)$.

8. Determina razonadamente cuáles de los puntos $A(11, -4)$, $B(-10, 2)$, $C(2, 6)$ son interiores a la elipse de ecuación $25x^2 + 169y^2 - 4225 = 0$.

9. Identifica y representa el conjunto de puntos del plano $X(3 - 2\lambda, 1 + \lambda)$ con $\lambda \in [-3, 5]$.

10. Las rectas de ecuación $3x - 8y + 23 = 0$, $7x - y - 17 = 0$, $4x + 7y + 13 = 0$ definen un triángulo. Determina:

a) Las coordenadas de sus vértices.

b) La longitud de sus lados.

c) Su área.

d) Las coordenadas del baricentro.

11. Representa el lugar geométrico de los puntos del plano $X(1 - t, 4 + t^2)$.

Hay dos puntos de dicho lugar geométrico cuya segunda coordenada es 29; ¿cuál es su primera coordenada?

12. Halla la ecuación del lugar geométrico de los puntos del plano cuya distancia al punto $A(2, -5)$ es el triple de la distancia al punto $B(2, 3)$. Identifica el lugar geométrico hallado.

Soluciones

1. $\vec{a} = 2\vec{i} - 6\vec{j} = (2,\ -6),\quad |\vec{a}| = +\sqrt{2^2 + (-6)^2} = \sqrt{40} = 2\sqrt{10}$

$\vec{b} = (-3,\ -4),\ |\vec{b}| = \sqrt{25} = 5,\quad \vec{c} = (9,\ 2),\ |\vec{c}| = \sqrt{85},\quad \vec{d} = (3,\ 3),\ |\vec{d}| = \sqrt{18} = 3\sqrt{2}$

2. a) $2\vec{u} - 3\vec{v} + \vec{w} = 2(3,\ -1) - 3(-4,\ 2) + (0,\ -4) = (6,\ -2) + (12,\ -6) + (0,\ -4) = (18,\ -12)$

b) $\left(3\vec{w}\right)\cdot\left(\vec{v} - 2\vec{u}\right) = (0,\ -12)\cdot(-10,\ 4) = -48$

c) $\vec{u}\cdot\vec{v} + \vec{v}\cdot\vec{w} - \vec{w}\cdot\vec{u} = (-14) + (-8) + 4 = -18$

3. $\vec{u} = \overrightarrow{AB} = \vec{b} - \vec{a} = (-1,\ -1) - (2,\ -3) = (-3,\ 2)$. La ecuación de la recta en forma paramétrica es $\begin{cases} x = 2 - 3\lambda \\ y = -3 + 2\lambda \end{cases}$.

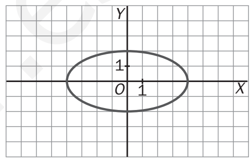
En forma general: $\dfrac{x-2}{-3} = \dfrac{y+3}{2} \Leftrightarrow 2x + 3y + 5 = 0$

La ecuación explícita es $y = -\dfrac{2}{3}x - \dfrac{5}{3}$. Por tanto, la pendiente es $m = -\dfrac{2}{3}$ y la ordenada en el origen es $n = -\dfrac{5}{3}$.

4. Se despejan sen$t$ y cos$t$: $\cos t = \dfrac{x}{4}$, $\operatorname{sen} t = \dfrac{y}{2}$. Como $\operatorname{sen}^2 t + \cos^2 t = 1$, se obtiene:

$\left(\dfrac{x}{4}\right)^2 + \left(\dfrac{y}{2}\right)^2 = 1 \Leftrightarrow \dfrac{x^2}{16} + \dfrac{y^2}{4} = 1$. Se trata de una elipse de ejes $2a = 8$, $2b = 4$,

y como $c = \sqrt{a^2 - b^2} = \sqrt{16-4} = \sqrt{12}$, los focos son $F(\sqrt{12},\ 0)$, $F'(-\sqrt{12},\ 0)$.



5. a) $\begin{cases} x + 3y = 2 \\ 2x + 7y = 3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 5 \\ y = -1 \end{cases} \Rightarrow V(5,-1)$

b) $\vec{u} = (-3, 1)$, $\vec{v} = (-7, 2)$

c) $\cos\alpha = \left|\dfrac{\vec{u}\cdot\vec{v}}{|\vec{u}||\vec{v}|}\right| = \left|\dfrac{21+2}{\sqrt{10}\sqrt{53}}\right| = \dfrac{23}{\sqrt{530}}$, $\operatorname{sen}\alpha = \sqrt{1-\cos^2\alpha} = \sqrt{1-\dfrac{529}{530}} = \dfrac{1}{\sqrt{530}}$

6. $d(P,r) = \dfrac{|4\cdot(-3) + 3\cdot 5 - 6|}{\sqrt{4^2+3^2}} = \dfrac{3}{5}$, $d(P,s) = \dfrac{|3\cdot(-3) + 4\cdot 5 - 8|}{\sqrt{3^2+4^2}} = \dfrac{3}{5}$. Como la distancia a las dos rectas es la misma, se puede asegurar que P pertenece a la bisectriz.

7. $d(X,\ A) = d(X,\ B) \Rightarrow \sqrt{(x+3)^2 + (y-6)^2} = \sqrt{(x-5)^2 + (y-10)^2} \Rightarrow$

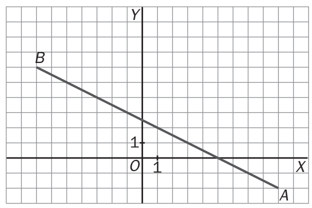
$\Rightarrow x^2 + 6x + 9 + y^2 - 12y + 36 = x^2 - 10x + 25 + y^2 - 20y + 100 \Rightarrow 16x + 8y - 80 = 0 \Leftrightarrow 2x + y - 10 = 0$

8. Si la ecuación de la elipse es $f(x,\ y) = 0$, los puntos interiores verifican que $f(x,\ y) < 0$, y los exteriores, $f(x,\ y) > 0$.
Con el punto $A(11,\ -4)$ resulta $25\cdot(11)^2 + 169\cdot(-4)^2 - 4225 = 1504 > 0$. Es exterior.
Con el punto $B(-10,\ 4)$ resulta $25\cdot(-10)^2 + 169\cdot(2)^2 - 4225 = -1049 < 0$. Es interior.
Con el punto $C(2,\ 6)$ resulta $25\cdot(2)^2 + 169\cdot(6)^2 - 4225 = 1959 > 0$. Es exterior.

9. Las ecuaciones paramétricas corresponden a un segmento de la recta

$r\colon \begin{cases} x = 3 - 2\lambda \\ y = 1 + \lambda \end{cases}$ cuyos extremos se obtienen para $\lambda = -3 \Rightarrow A(9,\ -2)$ y para

$\lambda = 5 \Rightarrow B(-7,\ 6)$.



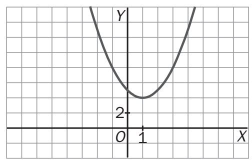
10. a) Se resuelven los sistemas tomando las ecuaciones de dos en dos: $A(2,\ -3)$, $B(3,\ 4)$, $C(-5,\ 1)$.

b) $|\overrightarrow{AB}| = \sqrt{1^2 + 7^2} = \sqrt{50} = 5\sqrt{2}$, $|\overrightarrow{AC}| = \sqrt{(-7)^2 + 4^2} = \sqrt{65}$, $|\overrightarrow{CB}| = \sqrt{8^2 + 3^2} = \sqrt{73}$

c) $S = \dfrac{1}{2}|\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC'}| = \dfrac{1}{2}|(1,7)\cdot(4,7)| = \dfrac{1}{2}|4+49| = \dfrac{53}{2}\ \text{u}^2$

d) Baricentro: $G\left(\dfrac{2+3-5}{3},\ \dfrac{-3+4+1}{3}\right) = \left(0,\ \dfrac{2}{3}\right)$

11. $\begin{cases} x = 1 - t \\ y = 4 + t^2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} t = 1 - x \\ y = 4 + (1-x)^2 = x^2 - 2x + 5 \end{cases}$. Para $y = 29$, $t = \pm 5 \Rightarrow x_1 = -4$, $x_2 = 6$.



12. $d(X,\ A) = 3d(X,\ B) \Rightarrow \sqrt{(x-2)^2 + (y+5)^2} = 3\sqrt{(x-2)^2 + (y-3)^2} \Rightarrow x^2 + y^2 - 4x - 8y + 11 = 0$

Es una circunferencia de centro $C(2,\ 4)$ y radio $r = 3$.