Sistemas de ecuaciones lineales

CRITERIOS DE EVALUACIÓN	ACTIVIDADES DE EVALUACIÓN
A. Resolver sistemas de ecuaciones lineales por el método de Gauss.	**1.** Resuelve por el método de Gauss los siguientes sistemas de ecuaciones lineales: a) $\begin{cases} 2x + 3y + z = 11 \\ x + 5y + 3z = 14 \\ 4x - y - 4z = 3 \end{cases}$ b) $\begin{cases} x - y + 2z - t = 1 \\ 2x + 3y - z + t = 5 \\ x - 6y + 7z - 4t = -2 \end{cases}$
B. Expresar matricialmente un sistema de ecuaciones lineales y, si es posible, resolverlo utilizando la matriz inversa de la matriz de coeficientes.	**2.** Expresa matricialmente el siguiente sistema de ecuaciones lineales y resuélvelo, si es posible, por el método de la matriz inversa: $\begin{cases} 2x + y - z = -2 \\ 3x + 4y + z = 2 \\ x + 3y + z = -5 \end{cases}$
C. Resolver, mediante la regla de Cramer, sistemas de ecuaciones lineales de tres ecuaciones con tres incógnitas.	**3.** Resuelve por el método de Cramer el siguiente sistema: $\begin{cases} x - y + z = 3 \\ 2x + y + z = 8 \\ -x + 2y + z = 14 \end{cases}$
D. Determinar, tanto por Gauss como aplicando el teorema de Rouché, la compatibilidad de sistemas de ecuaciones lineales, y resolverlos en el caso de ser compatibles.	**4.** Sabiendo que el sistema de ecuaciones representado por la siguiente ecuación matricial tiene un número infinito de soluciones, halla el valor de k. $\begin{pmatrix} 2 & -1 & -9 \\ 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & -3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 \\ 1 \\ k \end{pmatrix}$
E. Resolver sistemas homogéneos.	**5.** Halla todos los valores de k para los cuales el siguiente sistema de ecuaciones tiene soluciones diferentes de (0, 0, 0) y calcula el conjunto de soluciones. $\begin{cases} 2x - 2y + kz = 0 \\ x + z = 0 \\ kx + y + z = 0 \end{cases}$
F. Determinar la posición relativa de dos rectas en el plano.	**6.** Estudia las posiciones relativas de los siguientes pares de rectas: a) $\begin{cases} r\colon x - 2y = 7 \\ r'\colon 2x - y = 7 \end{cases}$ b) $\begin{cases} s\colon -x + y = 1 \\ s'\colon -x + y = -1 \end{cases}$
G. Discutir y resolver sistemas de ecuaciones lineales dependientes de un parámetro.	**7.** Discute y resuelve los siguientes sistemas de ecuaciones lineales: a) $\begin{cases} x + y + z = a \\ x + (1 + a)y + z = 2a \\ x + y + (1 + a)z = 0 \end{cases}$ b) $\begin{cases} (1 + a)x + (a - 1)y = a \\ ax + (a + 1)y = a - 1 \end{cases}$ c) $\begin{cases} 3x - y = 1 \\ x + 2y = 4 \\ x - y = 1 \end{cases}$
H. Plantear y resolver problemas que den lugar a sistemas de ecuaciones lineales.	**8.** Una empresa dispone de 27 200 € para subvencionar una semana de estancia en uno de los tres balnearios *A*, *B* y *C* a 100 de sus empleados. Tras analizar el número de solicitudes para cada uno de los balnearios, se ha decidido subvencionar con 400 € a cada uno de los que acudan al *A*, con 160 € a los que vayan al *B* y con 200 € a los que soliciten el *C*. Si la cantidad total asignada para los que van al balneario *A* es cinco veces mayor que la asignada para el *B*, ¿cuántos empleados van a cada balneario?

Soluciones

1. a) $\begin{cases} 2x+3y+z=11 \\ x+5y+3z=14 \\ 4x-y-4z=3 \end{cases} \xrightarrow[E_3 \to E_3 - 4E_1]{\substack{E_1 \leftrightarrow E_2 \\ E_2 \to E_2 - 2E_1}} \begin{cases} x+5y+3z=14 \\ -7y-5z=-17 \\ -21y-16z=-53 \end{cases}$

$\xrightarrow{E_3 \to E_3 - 3E_1} \begin{cases} x+5y+3z=14 \\ -7y-5z=-17 \\ -z=-2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=3 \\ y=1 \\ z=2 \end{cases}$

b) $\begin{cases} x-y+2z-t=1 \\ 2x+3y-z+t=5 \\ x-6y+7z-4t=-2 \end{cases} \xrightarrow[E_3 \to E_1 - E_3]{E_2 \to E_2 - 2E_1} \begin{cases} x-y+2z-t=1 \\ 5y-5z+3t=3 \\ 5y-5z+3t=3 \end{cases}$

$\rightarrow \begin{cases} x = 1+y-2z+t \\ y = \dfrac{3+5z-3t}{5} \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x = \dfrac{8-5\lambda+2\mu}{5} \\ y = \dfrac{3+5\lambda-3\mu}{5} \\ z = \lambda \\ t = \mu \end{cases}$

2. $\begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 3 & 4 & 1 \\ 1 & 3 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ 2 \\ -5 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 3 & 4 & 1 \\ 1 & 3 & 1 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} -2 \\ 2 \\ -5 \end{pmatrix} =$

$= \begin{pmatrix} -\frac{1}{5} & \frac{4}{5} & -1 \\ \frac{2}{5} & -\frac{3}{5} & 1 \\ -1 & 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -2 \\ 2 \\ -5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 \\ -7 \\ 9 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} x=7 \\ y=-7 \\ z=9 \end{cases}$

3. $\begin{vmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \\ -1 & 2 & 1 \end{vmatrix} = 7,\ x = \dfrac{1}{7} \begin{vmatrix} 3 & -1 & 1 \\ 8 & 1 & 1 \\ 14 & 2 & 1 \end{vmatrix} = -1,$

$y = \dfrac{1}{7} \begin{vmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 2 & 8 & 1 \\ -1 & 14 & 1 \end{vmatrix} = 3,\ z = \dfrac{1}{7} \begin{vmatrix} 1 & -1 & 3 \\ 2 & 1 & 8 \\ -1 & 2 & 14 \end{vmatrix} = 7$

4. Para que el sistema sea compatible indeterminado (infinitas soluciones), es necesario que el rango de la matriz ampliada sea 2, y para ello se necesita que:

$\begin{vmatrix} 2 & -1 & 7 \\ 1 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & k \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow 5k - 25 = 0 \Rightarrow k = 5$

Por tanto, $k = 5$.

5. Para que el sistema homogéneo tenga soluciones distintas de la trivial, debe ser compatible indeterminado, y para ello se necesita que $\text{rg}(A) < 3$, es decir, $|A| = 0$.

$\begin{vmatrix} 2 & -2 & k \\ 1 & 0 & 1 \\ k & 1 & 1 \end{vmatrix} = -k = 0 \Rightarrow k = 0$

Si $k = 0$, el sistema es compatible indeterminado y, por tanto, tiene infinitas soluciones, que son:

$\begin{cases} 2x-2y=0 \\ x+z=0 \\ y+z=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=y \\ x=-z \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=\lambda \\ x=-\lambda \\ z=\lambda \end{cases}$

6. Se calculan los rangos de la matriz de coeficientes y la ampliada:

a) $\begin{vmatrix} 1 & -2 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} = 3 \neq 0 \Rightarrow \text{rg}(A) = \text{rg}(A^*) = 2$. El sistema es compatible determinado y las rectas son secantes.

b) $\begin{vmatrix} -1 & 1 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow \text{rg}(A) = 1$

$\begin{vmatrix} -1 & 1 \\ -1 & -1 \end{vmatrix} = 2 \neq 0 \Rightarrow \text{rg}(A^*) = 2$. El sistema es incompatible y las rectas son paralelas.

7. a) $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1+a & 1 \\ 1 & 1 & 1+a \end{vmatrix} = a^2$

Si $a \neq 0$, $\text{rg}(A) = \text{rg}(A^*) = 3 =$ n.º de incógnitas. Es un SCD con solución $x = a$, $y = 1$, $z = -1$.

Si $a = 0$, es un SCI con las siguientes soluciones:

$\begin{cases} x+y+z=0 \\ x+y+z=0 \\ x+y+z=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=-\lambda-\mu \\ y=\lambda \\ z=\mu \end{cases}$

b) $\begin{vmatrix} 1+a & a-1 \\ a & a+1 \end{vmatrix} = 3a+1$

Si $a \neq -\dfrac{1}{3}$, $\text{rg}(A) = \text{rg}(A^*) = 2 =$ n.º de incógnitas. Es un SCD con solución $x = \dfrac{3a-1}{3a+1}$, $y = \dfrac{-1}{3a+1}$.

Si $a = -\dfrac{1}{3}$:

$\begin{cases} \dfrac{2}{3}x - \dfrac{4}{3}y = -\dfrac{1}{3} \\ -\dfrac{1}{3}x + \dfrac{2}{3}y = \dfrac{-4}{3} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2x-4y=-1 \\ -x+2y=-4 \end{cases}$

$\begin{vmatrix} 2 & -4 \\ -1 & 2 \end{vmatrix} = 0,\ \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ -1 & -4 \end{vmatrix} = -9 \neq 0$

El sistema es incompatible; no tiene solución.

c) $\begin{vmatrix} 3 & -1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 7 \neq 0,\ \begin{vmatrix} 3 & -1 & a \\ 1 & 2 & 4 \\ 1 & -1 & 1 \end{vmatrix} = -3a+15$

Si $a = 5$, $\text{rg}(A) = 2 = \text{rg}(A^*) =$ n.º incógnitas. Es un SCD con solución $x = 2$, $y = 1$.

Si $a \neq 5$, $\text{rg}(A) = 2 \neq \text{rg}(A^*) = 3$. Es un sistema incompatible; no tiene solución.

8. El enunciado da lugar al siguiente sistema de 3 ecuaciones lineales con 3 incógnitas, donde x, y, z son el número de empleados que van a cada uno de los balnearios A, B y C, respectivamente.

$\begin{cases} x+y+z=100 \\ 400x+160y+200z=27\,200 \Rightarrow \\ 400x = 5 \cdot 160y \end{cases}$

$\Rightarrow \begin{cases} x+y+z=100 \\ 10x+4y+5z=680 \Rightarrow \\ x-2y=0 \end{cases} \begin{cases} x=40 \\ y=20 \\ z=40 \end{cases}$