Prueba inicial (Álgebra lineal)

Nombre: **Apellidos:**

Curso: **Grupo:** **Fecha:**

1. Se consideran los polinomios $P(x) = 4x^3 + 4x^2 - 3x - 7$ y $D(x) = x^2 + 3x$. Halla otros dos polinomios $C(x)$ y $R(x)$ para que se verifique la igualdad $P(x) = D(x)C(x) + R(x)$ con grado$(R(x)) <$ grado$(D(x))$.

2. Efectúa y simplifica el resultado todo lo posible.

a) $\left(\frac{1}{x} - x\right)\left(\frac{1}{x} + x\right)\left(\frac{1}{x+1} - 1\right)$

b) $\frac{x^2 - x - 2}{x + 3} \cdot \frac{x^2 + 2x - 3}{(x-2)^3} \cdot \frac{(x-2)^2}{x^2 - 1}$

3. Resuelve las siguientes ecuaciones polinómicas.

a) $3(x - 1)(x + 2) = 3x - 6$

b) $\left(x - \frac{4}{3}\right)\left(2x + \frac{1}{5}\right) = 0$

4. La ecuación de segundo grado $ax^2 + bx + c = 0$ tiene sus coeficientes enteros, y sus raíces son:

$$x_1 = \frac{4 + \sqrt{7}\,i}{3}, \quad x_2 = \frac{4 - \sqrt{7}\,i}{3}$$

Calcula los coeficientes enteros de la ecuación, a, b y c, más pequeños posibles en valor absoluto.

5. Opera y simplifica todo lo que puedas las siguientes expresiones algebraicas.

a) $3 \cdot (2x - 1)^2 - 3 \cdot (2x - 1) \cdot (2x + 1)$

b) $\frac{2x - 1}{3} + \frac{5x + 2}{12} - \frac{2x - 3}{4}$

6. Se sabe que una de las soluciones de la ecuación $x^2 - 8x + k = 0$ es $x_1 = 2$. Determina k y la otra solución.

7. El polinomio $P(x) = x^3 + ax^2 + 3x + b$ es divisible entre $(x - 2)$, y al dividirlo entre $(x - 1)$ su resto es -1. Halla el valor numérico de $P(x)$ en $x = 3$.

8. Se tiene un rectángulo de 40 cm de perímetro. Si se reduce el lado menor del rectángulo un 25% y se amplía el lado mayor un 150%, se obtiene otro rectángulo que tiene 12 cm^2 más de área. ¿Cuál es su perímetro?

9. La solución del sistema de ecuaciones lineales siguiente es $S = (-2, 5)$. Halla los valores de a y b.

$$\begin{cases} 3x - 2by + 26 = 0 \\ ax + 7y - 23 = 0 \end{cases}$$

Representa e interpreta gráficamente el sistema.

10. Dos de las soluciones del sistema de ecuaciones $\begin{cases} x - 2y + z = 0 \\ x + y + z = 6 \\ x - y + z = 2 \end{cases}$ son $S_1 = (1, 2, 3)$ y $S_2 = (0, 2, 4)$.

Calcula otra solución distinta y trata de expresar cómo serían las infinitas soluciones de dicho sistema.

11. Unos amigos consumen en un bar 3 refrescos y 5 cafés y por ello les cobran 13,50 €. Al día siguiente piden 4 refrescos y 2 cafés y les cobran 11 €. Un tercer día piden 5 refrescos y 3 cafés y al cobrarles 15 € reclaman la cuenta porque no están conformes. Plantea en términos de álgebra lineal el problema y justifica la reclamación que hacen.

1. Se efectúa la división entera de polinomios $P(x) : D(x)$ y resulta:

Cociente: $C(x) = 4x - 8$. Resto: $R(x) = 21x - 7$.

2. a) $\left(\frac{1}{x} - x\right)\left(\frac{1}{x} + x\right)\left(\frac{1}{x+1} - 1\right) = \frac{1-x^2}{x} \cdot \frac{1+x^2}{x} \cdot \frac{-x}{x+1} = \frac{x(x-1)(x+1)(1+x^2)}{x^2(x+1)} = \frac{(x-1)(1+x^2)}{x}$

b) $\frac{x^2-x-2}{x+3} \cdot \frac{x^2+2x-3}{(x-2)^3} \cdot \frac{(x-2)^2}{x^2-1} = \frac{(x+1)(x-2)(x-1)(x+3)(x-2)^2}{(x+3)(x-1)(x+1)(x-2)^3} = 1$

3. a) $3(x-1)(x+2) = 3x - 6 \Leftrightarrow 3x^2 + 3x - 6 = 3x - 6 \Leftrightarrow 3x^2 = 0 \Rightarrow x = 0$ solución doble.

b) $\left(x - \frac{4}{3}\right)\left(2x + \frac{1}{5}\right) = 0 \Rightarrow \begin{cases} x - \frac{4}{3} = 0 \\ 2x + \frac{1}{5} = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = \frac{4}{3} \\ x_2 = -\frac{1}{10} \end{cases}$

4. La suma de las dos raíces es $S = \frac{4+\sqrt{7}\,i}{3} + \frac{4-\sqrt{7}\,i}{3} = \frac{8}{3}$ y el producto $P = \frac{4+\sqrt{7}\,i}{3} \cdot \frac{4-\sqrt{7}\,i}{3} = \frac{16+7}{9} = \frac{23}{9}$.

La forma canónica de la ecuación $x^2 - mx + n = 0$ conduce a: $x^2 - \frac{8}{3}x + \frac{23}{9} = 0 \Leftrightarrow 9x^2 - 24x + 23 = 0$

5. a) $3 \cdot (2x-1)^2 - 3 \cdot (2x-1) \cdot (2x+1) = -12x + 6$ b) $\frac{2x-1}{3} + \frac{5x+2}{12} - \frac{2x-3}{4} = \frac{7x+7}{12}$

6. $x_1 + x_2 = 8 \Leftrightarrow 2 + x_2 = 8 \Rightarrow x_2 = 6$, $x_1x_2 = k \Leftrightarrow 2 \cdot 6 = k \Rightarrow k = 12$

7. $\begin{cases} P(2) = 0 \\ P(1) = -1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 8 + 4a + 6 + b = 0 \\ 1 + a + 3 + b = -1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 4a + b = -14 \\ a + b = -5 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = -3 \\ b = -2 \end{cases}$

El polinomio es $P(x) = x^3 - 3x^2 + 3x - 2$, y el valor numérico pedido es $P(3) = 27 - 27 + 9 - 2 = 7$.

8. Se denotan por x e y los lados del rectángulo original. Se plantea el sistema:

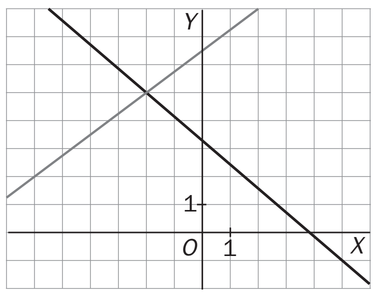
$\begin{cases} 2x + 2y = 40 \\ \frac{3}{4}x\,\frac{3}{2}y = xy + 12 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x + y = 20 \\ 9xy = 8xy + 96 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x + y = 20 \\ xy = 96 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x + y = 20 \\ x(20 - x) = 96 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 8 \text{ cm} \\ y = 12 \text{ cm} \end{cases}$

Los lados del nuevo rectángulo son $x' = \frac{3}{4}x = 6$ cm e $y' = \frac{3}{2}y = 18$ cm, y su perímetro es $2 \cdot 6 + 2 \cdot 18 = 48$ cm.

9. La solución tiene que verificar todas las ecuaciones; por tanto

$\begin{cases} 3 \cdot (-2) - 2b \cdot 5 + 26 = 0 \\ a \cdot (-2) + 7 \cdot 5 - 23 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 10b = 20 \\ 2a = 12 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} b = 2 \\ a = 6 \end{cases}$

La solución de un sistema de ecuaciones lineales con dos incógnitas representa las coordenadas del punto de corte de las dos rectas que las ecuaciones determinan.



10. Al restar las dos últimas se obtiene $2y = 4 \Rightarrow y = 2$.

Sumando las dos últimas se obtiene $2x + 2z = 8 = x + z = 4$. Y como estas dos condiciones también las cumple la primera ecuación, todas las soluciones del sistema son de la forma $S = (\lambda, 2, 4 - \lambda)$ para todo $\lambda \in$ R. Otra solución podría ser $S = (5, 2, -1)$, si se da el valor 5 al parámetro λ.

11. Suponiendo que los dos primeros días hicieran bien las cuentas y llamando x al precio de un refresco e y al precio de un café, el sistema que refleja el problema es:

$\begin{cases} 3x + 5y = 13{,}5 \\ 4x + 2y = 11 \\ 5x + 3y = 15 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 12x + 20y = 54 \\ 12x + 6y = 33 \\ 5x + 3y = 15 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 14y = 21 \\ 12x + 6y = 33 \\ 5x + 3y = 15 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = 1{,}5 \\ x = 2 \\ 5x + 3y = 15 \end{cases}$

La tercera ecuación no se verifica con los valores de las dos primeras. Luego el sistema es incompatible y, si las dos primeras cuentas están bien hechas, la tercera está necesariamente mal hecha, de ahí la reclamación.