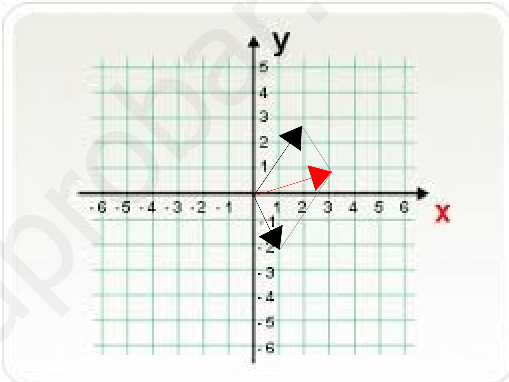
BLOQUE DE GEOMETRÍA

TEMA 4: ESPACIOS VECTORIALES.

Operaciones Binarias:

Observamos las siguientes operaciones:

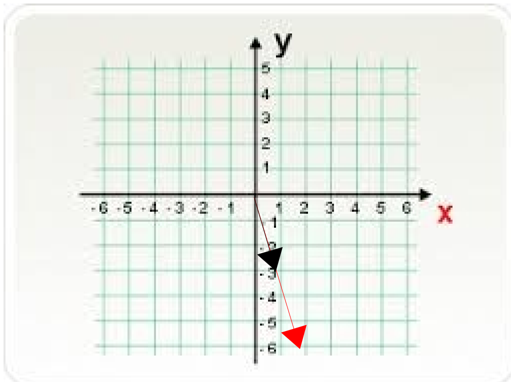
- $(5+3i)+(2-i)=7+2i$. La suma de dos números complejos es un número complejo.
- $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} 3 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 4 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$. La suma de dos matrices cuadradas de orden 2 es una matriz cuadrada de orden 2.
- $(2,3)+(1,-2)=(3,1)$. La suma de dos vectores del plano es un vector del plano.



Son tres ejemplos de **operaciones binarias internas**.

Observamos ahora las siguientes operaciones:

- $-2\cdot\begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} -6 & 4 \\ -4 & 0 \end{pmatrix}$. El producto de un número real por una matriz cuadrada de orden 2 es una matriz cuadrada de orden 2.
- $2\cdot(1,-3)=(2,-6)$. El producto de un número real por un vector del plano es un vector del plano.



Son dos ejemplos de **operaciones binarias externas**.

Una **operación binaria interna** sobre un conjunto A es una aplicación:

$$\begin{aligned} A \times A &\xrightarrow{*} A \\ (a,b) &\longrightarrow a*b \end{aligned}$$

Una **operación binaria externa** sobre un conjunto A con dominio de escalares en un conjunto K es una aplicación:

$$\begin{aligned} K \times A &\xrightarrow{\cdot} A \\ (t,a) &\longrightarrow t\cdot a \end{aligned}$$

Espacio Vectorial Real:

Un espacio vectorial real es un conjunto V dotado de una operación interna (+) y una operación externa (·) sobre $\mathbb{R}$ definidas por:

$$\begin{array}{ccc} V \times V & \xrightarrow{+} & V \\ (\vec{v}, \vec{w}) & \longrightarrow & \vec{v}+\vec{w} \end{array} \qquad \begin{array}{ccc} \mathbb{R} \times V & \xrightarrow{\cdot} & V \\ (t, \vec{v}) & \longrightarrow & t\cdot\vec{v} \end{array}$$

y que verifica:

- (V,+) cumple las propiedades:

- Asociativa: $\vec{u}+(\vec{v}+\vec{w})=(\vec{u}+\vec{v})+\vec{w}$, $\forall \vec{u}, \vec{v}, \vec{w} \in V$
- Conmutativa: $\vec{v}+\vec{w}=\vec{w}+\vec{v}$, $\forall \vec{v}, \vec{w} \in V$
- Existencia de elemento neutro: $\vec{0}+\vec{v}=\vec{v}+\vec{0}=\vec{v}$, $\forall \vec{v} \in V$
- Elemento simétrico: $\vec{v}+(-\vec{v})=(-\vec{v})+\vec{v}=\vec{0}$, $\forall \vec{v} \in V$

- (V, $\cdot\mathbb{R}$) cumple las propiedades:

- $t\cdot(\vec{v}+\vec{w})=t\cdot\vec{v}+t\cdot\vec{w}$, $\forall \vec{v}, \vec{w} \in V$, $\forall t \in \mathbb{R}$
- $(t+s)\cdot\vec{v}=t\cdot\vec{v}+s\cdot\vec{v}$, $\forall \vec{v} \in V$, $\forall t, s \in \mathbb{R}$
- $(t\cdot s)\cdot\vec{v}=t\cdot(s\cdot\vec{v})$, $\forall \vec{v} \in V$, $\forall t, s \in \mathbb{R}$
- $1\cdot\vec{v}=\vec{v}$, $\forall \vec{v} \in V$

Ejemplos: Son espacios vectoriales reales:

El conjunto de vectores en el plano $(\mathbb{R}^2, +, \cdot\mathbb{R})$ respecto a las operaciones :
- suma de vectores: $(x, y)+(x', y')=(x+x', y+y')$
- producto por un escalar: $t\cdot(x, y)=(tx, ty)$

El conjunto de vectores en el espacio $(\mathbb{R}^3, +, \cdot\mathbb{R})$ respecto a las operaciones :
- suma de vectores: $(x, y, z)+(x', y', z')=(x+x', y+y', z+z')$
- producto por un escalar: $t\cdot(x, y, z)=(tx, ty, tz)$

El conjunto de los polinomios de grado $\leq n$: $(P_n, +, \cdot\mathbb{R})$ con las operaciones de suma de polinomios y producto por un número real.

El conjunto de los números complejos $(\mathbb{C}, +, \cdot\mathbb{R})$ con las operaciones de suma de números complejos y producto por un número real.

El conjunto de las matrices cuadradas de orden n : $(M_n, +, \cdot\mathbb{R})$ respecto a las operaciones de suma de matrices y producto por un número real.

Propiedades de un espacio vectorial:

En un espacio vectorial $(V, +, \cdot \mathbb{R})$ se verifican las propiedades que vemos a continuación:

$$\forall \vec{u}, \vec{v}, \vec{w} \in V \quad y \quad \forall t \in \mathbb{R} \ :$$

- $0 \cdot \vec{v} = \vec{0}$
- $t \cdot \vec{0} = \vec{0}$
- $(-1) \cdot \vec{v} = -\vec{v}$
- $t \cdot (-\vec{v}) = -(t \cdot \vec{v})$
- $(-t) \cdot \vec{v} = -t \cdot \vec{v}$
- $t \cdot \vec{v} = t \cdot \vec{w}$ implica que $\vec{v} = \vec{w}$ con $t \neq 0$
- $\vec{u} + (-\vec{v}) = \vec{u} - \vec{v}$

Subespacio vectorial:

Un subconjunto no vacío S de un espacio vectorial $(V, +, \cdot \mathbb{R})$ es un subespacio vectorial de V si es espacio vectorial respecto a las mismas operaciones que V.

$S \subset V$ es un subespacio vectorial de $(V, +, \cdot \mathbb{R})$ si y solo si $(S, +, \cdot \mathbb{R})$ es un espacio vectorial.

La condición necesaria y suficiente para que un subconjunto de un espacio vectorial sea subespacio vectorial es:

S es subespacio vectorial de $(V, +, \cdot \mathbb{R})$ si y solo si $\forall \vec{v}, \vec{w} \in S \ : \ \vec{v} + \vec{w} \in S$
$\forall t \in \mathbb{R} \ , \ \forall \vec{v} \in S \ : \ t \cdot \vec{v} \in S$

Esta propiedad se pueda generalizar del siguiente modo:

S es subespacio vectorial de $(V, +, \cdot \mathbb{R})$ si y solo si $\forall t, s \in \mathbb{R} \ , \ \forall \vec{v}, \vec{w} \in S \ : \ t \cdot \vec{v} + s \cdot \vec{w} \in S$

Combinación Lineal. Sistema generador:

Una **combinación lineal** de los vectores $\vec{v}_1, \vec{v}_2, \ldots, \vec{v}_n$ de un espacio vectorial real $(V, +, \cdot \mathbb{R})$ es una expresión de la forma:

$$t_1 \cdot \vec{v}_1 + t_2 \cdot \vec{v}_2 + \ldots + t_n \cdot \vec{v}_n \quad \text{con} \quad t_1, t_2, \ldots, t_n \in \mathbb{R}$$

Un vector $\vec{v}$ es combinación lineal de los vectores $\vec{v}_1, \vec{v}_2, \ldots, \vec{v}_n$ si se pueden escribir de la forma:

$$\vec{v} = t_1 \cdot \vec{v}_1 + t_2 \cdot \vec{v}_2 + \ldots + t_n \cdot \vec{v}_n$$

Un conjunto de vectores de un espacio vectorial real $(V, +, \cdot \mathbb{R})$ es **sistema generador** de V si cualquier vector del espacio V se puede escribir como combinación lineal de los vectores del sistema.

Dependencia e Independencia Lineal:

Los vectores $\vec{v}_1, \vec{v}_2, ..., \vec{v}_n$ de un espacio vectorial $(V, +, \cdot \mathbb{R})$ son **linealmente dependientes** si podemos encontrar números reales de modo que:

$$t_1 \cdot \vec{v}_1 + t_2 \cdot \vec{v}_2 + ... + t_n \cdot \vec{v}_n = \vec{0} \quad \text{con algún} \quad t_i \neq 0 \quad .$$

Los vectores $\vec{v}_1, \vec{v}_2, ..., \vec{v}_n$ de un espacio vectorial $(V, +, \cdot \mathbb{R})$ son **linealmente independientes** si dada una combinación lineal de ellos de la forma:

$$t_1 \cdot \vec{v}_1 + t_2 \cdot \vec{v}_2 + ... + t_n \cdot \vec{v}_n = \vec{0} \quad \text{entonces} \quad t_i = 0 \quad , \quad \forall i \quad .$$

Para determinar si un conjunto de vectores son linealmente dependientes o independientes se puede utilizar la definición anterior o una de las siguientes reglas:

- **Regla I**: Si alguno de los vectores $\vec{v}_1, \vec{v}_2, ..., \vec{v}_n$ se puede escribir como combinación lineal de los demás, entonces serán linealmente dependientes. En caso contrario son linealmente independientes.

- **Regla II**: Si los vectores $\vec{v}_1, \vec{v}_2, ..., \vec{v}_n$ se pueden escribir en una matriz cuadrada y su determinante es nulo, entonces los vectores serán linealmente dependientes, y si es no nulo serán linealmente independientes.

- **Regla III**: Si la matriz cuyas filas son los vectores $\vec{v}_1, \vec{v}_2, ..., \vec{v}_n$ tiene rango *n*, entonces los vectores serán linealmente independientes.

*Nota: En $\mathbb{R}^2$ dos vectores con la misma dirección son linealmente dependientes, mientras que si tienen distinta dirección serán linealmente independientes.

Base de un espacio vectorial:

Una base de un espacio vectorial V es un conjunto de vectores que son:
- Linealmente independientes
- Sistema generador de V

Teorema de la Base:

Todas las bases de un espacio vectorial V tienen el mismo número de vectores. El número de vectores de una base de un espacio vectorial V es la **dimensión** de V.

En los espacios vectoriales $\mathbb{R}^2$ y $\mathbb{R}^3$ las bases más sencillas que podemos encontrar se llaman bases canónicas y son:

En $\mathbb{R}^2$ la base canónica es $\{\vec{e}_1, \vec{e}_2\}$ siendo $\vec{e}_1=(1,0)$ y $\vec{e}_2=(0,1)$.

En $\mathbb{R}^3$ la base canónica es $\{\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3\}$ siendo $\vec{e}_1=(1,0,0)$, $\vec{e}_2=(0,1,0)$ y $\vec{e}_3=(0,0,1)$.

Coordenadas de un vector:

Sea B= $\{\vec{v}_1, \vec{v}_2, \ldots, \vec{v}_n\}$ una base del espacio vectorial V. Todo vector $\vec{w} \in V$ se puede escribir de forma única como:

$$\vec{v}=t_1 \cdot \vec{v}_1 + t_2 \cdot \vec{v}_2 + \ldots + t_n \cdot \vec{v}_n \quad .$$

Los escalares $t_1, t_2, \ldots, t_n$ son las **coordenadas** del vector $\vec{w}$ respecto a dicha base.