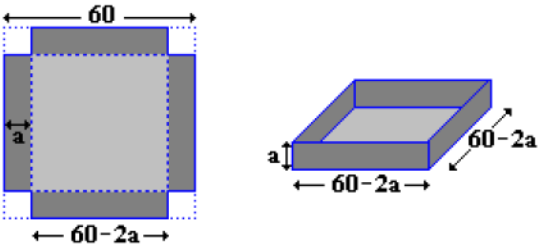
PROBLEMAS DE OPTIMACIÓN

1. Con una chapa de hojalata cuadrada de lado 60 cm es preciso hacer un cajón sin tapa que tenga volumen máximo. Se recortan cuadrados en los ángulos de la chapa y se dobla está para formar el cajón. ¿Cuál debe ser la longitud del lado de los cuadrados cortados?

Solución.



Si se recortan cuatro cuadrados de longitud "a" en cada esquina y se dobla la chapa por las lineal discontinuas, aparece un cajón si tapa de volumen el producto de sus tres aristas:

$$V=(60-2a)^2\cdot a=\left(3600-240a+4a^2\right)\cdot a=3600a-240a^2+4a^3$$

Expresión que permite obtener el volumen de todo los cajones en función del lado del cuadrado recortado. Para obtener el máximo se deriva y se iguala a cero.

$$V'=3600-480a+12a^2=0:a=\frac{-(-480)\pm\sqrt{(-480)^2-4\cdot 12\cdot 3600}}{2\cdot 12}=\frac{480\pm 240}{24}:\begin{cases}a=10\\a=72\end{cases}$$

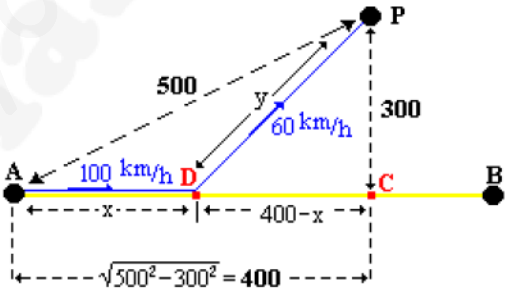
a = 72 no es posible por las dimensiones de la chapa. Para comprobar si para a = 10 se obtiene un máximo de volumen se comprueba si $V''(10)<0$.

$$V''(a)=-480+24a:V''(10)=-480+24\cdot 10=-240$$

Recortando en cada esquina un cuadrado le lado 10 cm, se obtiene un cajón sin tapa de volumen máximo. Siendo $V_{máx}=3600\cdot 10-240\cdot 10^2+4\cdot 10^3=16000\,cm^3$

2. En una carrera a través del desierto un automóvil debe ir desde la ciudad A hasta el oasis P situado a 500 Km de distancia de A. Puede aprovechar para ello una carretera recta que une las ciudades A y B y que le permite ir a una velocidad de 100 Km./h, mientras que si va por el desierto la velocidad es de 60 Km./h. Sabiendo que la distancia más corta de P a la carretera que une las ciudades es de 300 Km. Determinar la ruta que deber seguir para ir de A a P en el menor tiempo posible.

Solución.



Se pide minimizar el tiempo empleado en un trayecto que se recorre a dos velocidades distintas. El recorrido total es x + y, y el tiempo empleado en ello teniendo en cuenta las velocidades respectivas a cada trayecto y que se trata de movimiento rectilíneo y uniforma será:

$$T=\frac{x}{100}+\frac{y}{60}$$

Para encontrar una relación entre x e y se acude a los datos geométricos del problema. Conocidas las distancias de A a P y de P a C, mediante el teorema de Pitágoras se calcula la distancia de A a C(400 Km). Si x es la distancia de A a D, 400−x es la de D a C. Aplicando otra vez Pitágoras al triángulo DCP, se obtiene la relación buscada.

$$y^2 = 300^2 + (400 - x)^2 \quad : \quad y = \sqrt{300^2 + (400 - x)^2}$$

sustituyendo en la expresión de T, se obtiene una función que permite calcular el tiempo total de recorrido en función de los kilómetros recorridos por la carretera.

$$T = \frac{x}{100} + \frac{\sqrt{300^2 + (400 - x)^2}}{60}$$

para el mínimo de la función se deriva y se iguala a cero.

$$T'(x) = \frac{1}{100} + \frac{1}{60}\frac{2\cdot(400 - x)\cdot(-1)}{2\cdot\sqrt{300^2 + (400 - x)^2}} = \frac{1}{100} - \frac{400 - x}{60\sqrt{300^2 + (400 - x)^2}} = 0$$

despejando

$$\frac{1}{100} = \frac{400 - x}{60\sqrt{300^2 + (400 - x)^2}} \quad : \quad 3\sqrt{300^2 + (400 - x)^2} = 5(400 - x)$$

elevando al cuadrado

$$3^2\left(300^2 + (400 - x)^2\right) = 5^2(400 - x)^2 \quad : \quad 9\cdot 300^2 + 9\cdot(400 - x)^2 = 25\cdot(400 - x)^2 \quad : \quad 9\cdot 300^2 = 16\cdot(400 - x)^2$$

$$\frac{9\cdot 300^2}{16} = (400 - x)^2 : 400 - x = \sqrt{\frac{3^2\cdot 300^2}{4^2}} = \frac{3\cdot 300}{4} = 225 \quad : \quad x = 175\text{ km}$$

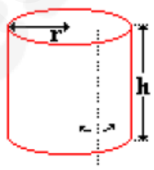
Para comprobar que efectivamente es un mínimo, se comprueba que $T''((175) > 0$

$$T''(x) = \frac{1500}{\sqrt{300^2 + (400 - x)^2}} \Rightarrow T''(175) = \frac{1500}{\sqrt{300^2 + (400 - 175)^2}} > 0$$

Recorriendo los primeros 175 Km por la carretera y luego saliendo al desierto, se minimiza el tiempo del viaje.

3. Se desea construir una lata de conservas en forma de cilindro circular recto de área total 150 cm² y volumen máximo. Determina su generatriz y su radio.

Solución.

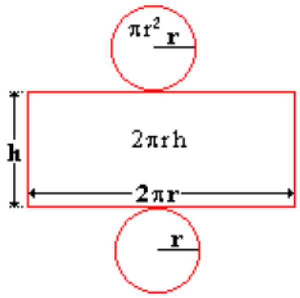


El volumen de un cilindro como el de la figura viene expresado por:

$$V = \pi r^2 h$$

donde r es el radio de la base y h es la altura del cilindro o generatriz.

La relación entre r y h se obtiene del dato del área lateral total del cilindro que es constante, y que se calcula como suma del área de un rectángulo y dos veces el área de una circunferencia.



$$A = 2\pi r^2 + 2\pi r h$$

$$150 = 2\pi r^2 + 2\pi r h \quad : \quad h = \frac{150 - 2\pi r^2}{2\pi r} = \frac{75 - \pi r^2}{\pi r}$$

Sustituyendo la altura en el volumen, se obtiene la expresión del volumen de todos los cilindro de área 150 cm^2 en función del radio de la base.

$$V = \pi r^2 \frac{75 - \pi r^2}{\pi r} = r\left(75 - \pi r^2\right) = 75r - \pi r^3$$

Para calcular el máximo de la función se deriva y se iguala a cero

$$V' = 75 - 3\pi r^2 = 0 \quad : \quad r = \pm\sqrt{\frac{75}{3\pi}} = \pm\sqrt{\frac{25}{\pi}} = \pm\frac{5}{\sqrt{\pi}}$$

(Para el enunciado del problema solo se admite la solución positiva)

La altura del cilindro se calcula sustituyendo el valor del radio en la ecuación de la altura en función del radio.

$$h = \frac{75 - \pi\left(\frac{5}{\sqrt{\pi}}\right)^2}{\pi\frac{5}{\sqrt{\pi}}} = \frac{10}{\sqrt{\pi}}$$

Para comprobar que efectivamente es un máximo se estudia si la segunda derivada es negativa en ese punto.

$$V' = -6\pi r < 0 \quad \text{sí} \quad r > 0$$

El cilindro de volumen máximo y área total de 150 cm^2, tiene por dimensiones:

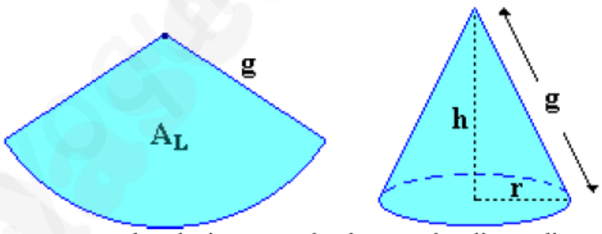
$$r = \frac{5}{\sqrt{\pi}} \qquad h = \frac{10}{\sqrt{\pi}}$$

4. Calcular el radio de la base de un cono de volumen constante para que su área lateral sea mínima.

Solución.

El área lateral de un cono viene expresada por:

$$A_L = \pi \cdot r \cdot g : \text{donde} \begin{cases} r \equiv \text{Radio de la base} \\ g \equiv \text{Generatriz} \end{cases}$$



La generatriz del cono se puede relacionar con la altura y el radio mediante el teorema de Pitágoras.

$$\left.\begin{array}{l} A_L = \pi \cdot r \cdot g \\ g = \sqrt{r^2 + h^2} \end{array}\right\} : A_L = \pi \cdot r \cdot \sqrt{r^2 + h^2}$$

Para relacionar la altura y el radio se tiene en cuenta que el volumen es constante (V), y que su expresión es función de estas dos variables.

$$V = \frac{\pi}{3} r^2 \cdot h$$

despejando la altura y sustituyendo en el A_L:

$$\left.\begin{array}{l} A_L = \pi \cdot r \cdot \sqrt{r^2 + h^2} \\ h = \frac{3V}{\pi r^2} : h^2 = \frac{9V^2}{\pi^2 r^4} \end{array}\right\} : A_L = \pi \cdot r \cdot \sqrt{r^2 + \frac{9V^2}{\pi^2 r^4}} = \sqrt{\pi^2 r^2 \cdot \left(r^2 + \frac{9V^2}{\pi^2 r^4}\right)} = \sqrt{\pi^2 r^4 + \frac{9V^2}{r^2}}$$

$$A_L = \sqrt{\pi^2 r^4 + 9V^2 r^{-2}}$$

Función que permite calcular el área lateral de un cono en función del radio de la base. Para calcular su mínimo se deriva y se iguala a cero.

$$A'_L = \frac{1}{2\cdot\sqrt{\pi^2 r^4 + 9V^2 r^{-2}}}\left(4\pi^2 r^3 + 9V^2(-2)\cdot r^{-3}\right) = \frac{2\pi^2 r^3 - 9V^2 r^{-3}}{\sqrt{\pi^2 r^4 + 9V^2 r^{-2}}} = 0$$

$$2\pi^2 r^3 - 9V^2 r^{-3} = 0 \quad : \quad 2\pi^2 r^3 - \frac{9V^2}{r^3} = 0 \quad : \quad 2\pi^2 r^3 = \frac{9V^2}{r^3} \quad : \quad r^6 = \frac{9V^2}{2\pi^2}$$

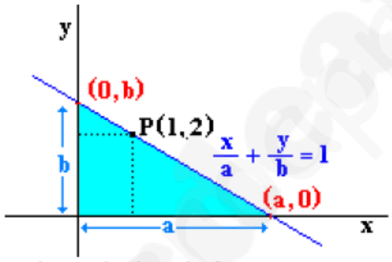
$$r_o = \sqrt[6]{\frac{9V^2}{2\pi^2}}$$

Dada la complejidad de la derivada se supone que el valor obtenido es el mínimo de la función ó, se estudia el signo de la derivada en el entorno del punto de optimación(r_o).

$$\left.\begin{array}{l} A'\left(r_o^-\right) < 0 : \text{Decreciente} \\ A'\left(r_o^+\right) > 0 : \text{Creciente} \end{array}\right\} \Rightarrow \text{En } r_o \text{ mínimo}$$

5. Encontrar entre todas las rectas que pasan por el punto (1,2) la que forma con las partes positivas de los ejes coordenados un triángulo de área mínima. Hallar esta área.

Solución.



La forma canónica de la recta buscada tiene la forma:

$$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1$$

donde a y b son los puntos de corte de la recta con los ejes x e y respectivamente, y son además las longitudes de la base y altura del triángulo dibujado sobre los ejes coordenados. El área de este triángulo será:

$$A = \frac{1}{2} a \cdot b$$

para relacionar a y b se tiene en cuenta que el punto (1, 2) pertenece a la recta y por tanto debe de cumplir su ecuación

$$\frac{1}{a} + \frac{2}{b} = 1$$

expresión que permite despejar una de ellas(b) en función de la otra(a)

$$\frac{2}{b} = 1 - \frac{1}{a} \quad : \quad b = \frac{2a}{a-1}$$

sustituyendo en la expresión del área se obtiene una función que permite calcular el área de los triángulos que generan todas las rectas que pasan por el punto P(1, 2) sobre los ejes

$$\left.\begin{array}{l} b = \dfrac{2a}{a-1} \\ A = \dfrac{1}{2} a \cdot b \end{array}\right\} : A = \frac{1}{2} a \cdot \frac{2a}{a-1} \quad : \quad A = \frac{a^2}{a-1}$$

El mínimo de la función se obtiene derivando e igualando a cero.

$$A' = \frac{2a\cdot(a-1)-a^2\cdot 1}{(a-1)^2} = \frac{a^2-2a}{(a-1)^2} = 0 \ : \ a^2-2a=0 \ : \ a\cdot(a-2)=0 : \begin{cases} a=0 \\ a=2 \end{cases}$$

a = 0 no tiene sentido en este enunciado. Para comprobar que es un mínimo se sustituye en la segunda derivada $\left(A'(2)>0\right)$.

$$A'' = \frac{(2a-2)\cdot(a-1)^2-\left(a^2-2a\right)\cdot 2\cdot(a-1)\cdot 1}{(a-1)^4} = \frac{2}{(a-1)^3} \ : \ A''(2) = \frac{2}{(2-1)^3} = 2 > 0$$

Por se positiva la función en a = 2 alcanza un mínimo. El valor de b se obtiene sustituyendo a en la expresión de b.

$$b = \frac{2\cdot 2}{2-1} = 4$$

La recta buscada es:

$$\frac{x}{2}+\frac{y}{4}=1 \ : \ 4x+2y-8=0$$

y el área del triángulo que determina con los ejes coordenados es:

$$A = \frac{1}{2}2\cdot 4 = 4\ u^2$$

6. Escribir el número 4 como suma de dos enteros positivos tales que la suma del cuadrado del primero y del cubo del segundo sea mínima.

Solución.

Se piden dos números x e y tales que:

$$S = x^2 + y^3$$

Teniendo en cuenta que dichos números han de cumplir:

$$x + y = 4$$

Esta ecuación permite relacionar las variable para de esa forma expresar la suma en función de una de ellas exclusivamente.

$$\left.\begin{array}{r} S = x^2+y^3 \\ y = 4-x \end{array}\right\} : S = x^2 + (4-x)^3$$

para encontrar el mínimo de la función suma se deriva y se iguala a cero

$$S' = 2x + 3\cdot(4-x)^2\cdot(-1) = 2x - 3\cdot\left(16-8x+x^2\right) = -3x^2+26x-48 = 0 : \begin{cases} x = 8/3 \\ x = 6 \end{cases}$$

Para comprobar cual de los valores hace mínima la suma se acude al criterio de la derivada segunda:

$$S'' = -6x+26 : \begin{cases} S''\left(\frac{8}{3}\right) = -6\cdot\frac{8}{3}+26 = 10 : \text{Mínimo} \\ S''(6) = -6\cdot 6+26 = -10 : \text{Máximo} \end{cases}$$

Conocido el valor de x se calcula y

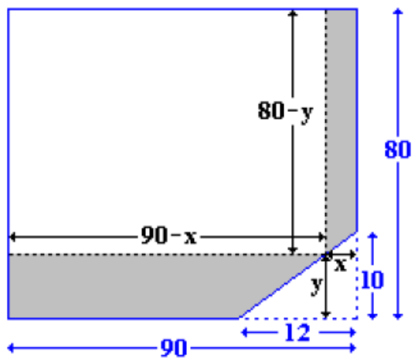
$$y = 4 - \frac{8}{3} = \frac{4}{3}$$

La suma S se hace mínima con la restricción propuesta(x + y = 4) para:

$$x = \frac{8}{3} : y = \frac{4}{3}$$

7. De un espejo rectangular de 90×80 cm. Se ha roto una esquina en forma triangular de catetos 12 y 10 cm. respectivamente. Hallar las dimensiones del espejo rectangular de superficie máxima que se pueda sacar aprovechando el anterior.

Solución.

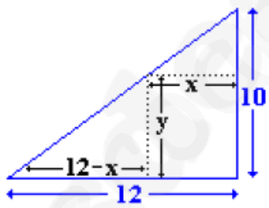


Sean x e y las anchuras del lado mayor y menor respectivamente que se deben cortar para obtener de nuevo un espejo rectangular, tal como muestra la figura. El área del nuevo espejo será:

$$S = (90 - x)\cdot(80 - y)$$

expresión en dos variables(x, y) que para optimizar se deben relacionar para dejar el área en función de una sola variable.

La relación se consigue en el triángulo que se ha roto mediante el teorema de triángulos semejantes, teorema de Tales.



$$\frac{y}{12 - x} = \frac{10}{12} = \frac{5}{6} \quad ; \qquad y = \frac{5}{6}(12 - x)$$

$$\left.\begin{array}{l} y = \frac{5}{6}(12 - x) \\ S = (90 - x)\cdot(80 - y) \end{array}\right\} : S(x, y) = (90 - x)\cdot\left(80 - \frac{5}{6}(12 - x)\right) = (90 - x)\cdot\frac{5}{6}\left(80\frac{6}{5} - (12 - x)\right)$$

simplificando y ordenando se obtiene una expresión cuadrática que permite calcular el área del espejo en función de la anchura recortada en el lado menor.

$$S(x) = \frac{5}{6}\left(7560 + 6x - x^2\right)$$

Para obtener el máximo se deriva y se iguala a cero

$$S'(x) = \frac{5}{6}(6 - 2x) = 0 \quad ; \quad 6 - 2x = 0 \quad ; \quad x = 3 \quad ; \quad y = \frac{5}{6}(12 - 3) = 7'5$$

Con el criterio de la segunda derivada se comprueba que es un máximo

$$S''(x) = -\frac{5}{6}\cdot 2 < 0 \Rightarrow \text{MÁXIMO}$$

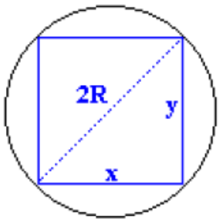
Las dimensiones del nuevo espejo serán 87×72'5 cm

8. Se considera un circulo de radio r.

a) Probar que el rectángulo de área máxima inscrito en el círculo dado es un cuadrado

b) Considerando el círculo inscrito en dicho cuadrado, calcular el cociente entre las áreas de los círculos

Solución.



El área de cualquier rectángulo viene expresada por:

$$\text{Área} = \text{Base} \times \text{Altura}$$

Para el rectángulo de la figura:

$$A = x \times y$$

Teniendo en cuenta que la diagonal del rectángulo coincide con el diámetro del círculo, se puede establecer una relación entre x e y mediante el teorema de Pitágoras:

$$(2R)^2 = x^2 + y^2$$

relación que permite expresar y en función de x:

$$y = \sqrt{4R^2 - x^2}$$

sustituyendo en la expresión del área, se obtiene una función que permite calcular el área de cualquier rectángulo inscrito en una circunferencia de radio R en función únicamente de la longitud de la base(x)

$$A = x \cdot \sqrt{4R^2 - x^2}$$

para simplificar los posteriores cálculos, conviene introducir la x dentro de la raíz

$$A = \sqrt{4R^2x^2 - x^4}$$

Para calcular el máximo de la función se deriva y se iguala a cero.

$$A' = \frac{1}{2 \cdot \sqrt{4R^2x^2 - x^4}} \cdot \left(8R^2x - 4x^3\right) = \frac{4R^2x - 2x^3}{\sqrt{4R^2x^2 - x^4}}$$

$$A' = 0 \quad : \quad \frac{4R^2x - 2x^3}{\sqrt{4R^2x^2 - x^4}} = 0 \quad : \quad 4R^2x - 2x^3 = 0 \quad : \quad x \cdot \left(4R^2 - 2x^2\right) = 0 : \begin{cases} x = 0 \\ 4R^2 - 2x^2 = 0 : x = \pm\sqrt{2}R \end{cases}$$

De las tres posibles soluciones, la única que tiene sentido es $x = \sqrt{2}R$, ya que el lado de un rectángulo no puede ser cero ni negativo.

Conocido el valor de x se calcula el valor de y:

$$y = \sqrt{4R^2 - x^2} = \left\{x = \sqrt{2}R\right\} = \sqrt{4R^2 - \left(\sqrt{2}R\right)^2} = \sqrt{2R^2} = \sqrt{2}R$$

lo que demuestra que el rectángulo óptimo es un cuadrado. Para comprobar que el óptimo es un máximo, se recurre al signo de la derivada primera, el cual solo depende del binomio $4R^2 - 2x^2$.

$$\left.\begin{array}{l} A'\left(\sqrt{2}R^-\right) > 0 \Rightarrow A \text{ creciente} \\ A'\left(\sqrt{2}R^+\right) < 0 \Rightarrow A \text{ decreciente} \end{array}\right\} \Rightarrow x = \sqrt{2}R \text{ existe un máximo}$$

9. Descomponer él número 100 en dos sumandos tales que el doble del cuadrado del primero más tres veces el cuadrado del segundo sea mínimo.

Solución.

$$\left.\begin{array}{r} S = 2x^2 + 3y^2 \\ x + y = 100 \end{array}\right\} : S = 2x^2 + 3\cdot(100 - x)^2$$

Para obtener el mínimo de la suma se deriva y se iguala a cero.

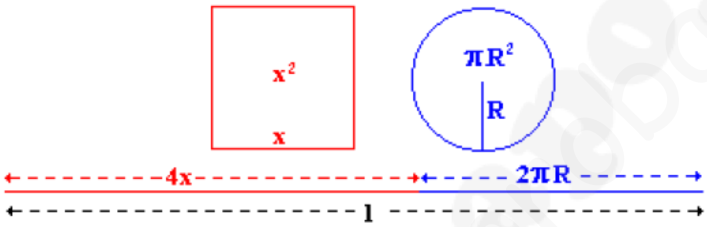
$$S' = 4x + 3\cdot 2\cdot(100 - x)\cdot(-1) = 4x - 6\cdot(100 - x) = 0 \quad : \quad x = 60 \quad : \quad y = 100 - 60 = 40$$

Para comprobar que es mínima, se estudia el signo de la segunda derivada

$$S'' = 4 - 6\cdot(-1) = 10 > 0$$

10. Se divide una cuerda de longitud 1 en dos partes, no necesariamente iguales, para construir un cuadrado y una circunferencia. Probar que de todas las posibilidades, la que encierra un área total mínima surge cuando el radio del círculo es la mitad que el lado del cuadrado.

Solución.



$x \equiv$ Longitud del lado del cuadrado

$R \equiv$ Radio de círculo

Se pide optimizar la suma de las áreas de un cuadrado y un círculo, siendo la suma de sus perímetros constante.

$$A_T = A_{Cuadrado} + A_{Círculo} = x^2 + \pi R^2$$

La relación entre las variables(x, R) se obtiene de la suma de perímetros.

$$P_T = P_{Cuadrado} + P_{Círculo} = 4x + 2\pi R = 1$$

expresión de la que se puede despejar el radio en función de la longitud del lado del cuadrado.

$$R = \frac{1 - 4x}{2\pi}$$

sustituyendo en la expresión del área total, se obtiene esta en función únicamente de la longitud del lado del cuadrado.

$$\left.\begin{array}{r} A_T = x^2 + \pi R^2 \\ R = \dfrac{1 - 4x}{2\pi} \end{array}\right\} : A_T = x^2 + \pi\left(\frac{1 - 4x}{2\pi}\right)^2 = x^2 + \frac{1}{4\pi}(1 - 4x)^2$$

Para calcular el área mínima se deriva y se iguala a cero.

$$A'_T = 2x + \frac{1}{4\pi} 2\cdot(1 - 4x)\cdot(-4) = 2x - \frac{2}{\pi}(1 - 4x) = 0 \quad : \quad x = \frac{1}{\pi + 4}$$

el radio se calcula sustituyendo el valor de x en su expresión

$$R = \frac{1 - 4\cdot\dfrac{1}{\pi + 4}}{2\pi} = \frac{1}{2\cdot(\pi + 4)}$$

Para comprobar que efectivamente es un mínimo, se estudia el signo de la segunda derivada.

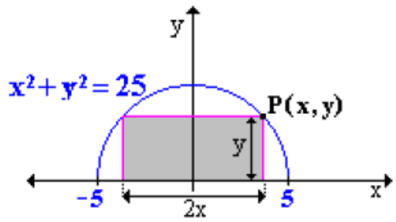
$$A''_T = 2 + \frac{8}{\pi} > 0$$

lo cual demuestra que el área es mínima, y que se obtiene cuando el radio del círculo es la mitad que el lado del cuadrado.

11. Hallar las dimensiones del rectángulo de área máxima que puede inscribirse en el semicírculo determinado por $x^2 + y^2 = 25$, $y \geq 0$.

Solución.

Se pide las dimensiones del rectángulo de área máxima inscrito en la parte positiva del semicírculo de radio 5 centrado en el origen.



El área del rectángulo de la figura es:

$$A = (\text{base}) \times (\text{altura}) = 2x \cdot y$$

Para relacionar x e y se tiene en cuenta que al estar inscrito el rectángulo en el semicírculo, el punto P(x, y) pertenece al semicírculo y por tanto debe de cumplir su ecuación($x^2 + y^2 = 25$), por lo que se puede expresar una variable en términos de la otra.

$$y = \sqrt{25 - x^2}$$

Sustituyendo en la expresión del área, se obtiene una función que permite calcular el área de cualquier rectángulo inscrito en un semicírculo de radio 5 en función únicamente de la longitud de la semibase(x).

$$\left.\begin{array}{r} A = 2x \cdot y \\ y = \sqrt{25 - x^2} \end{array}\right\} : A = 2x \cdot \sqrt{25 - x^2} = 2 \cdot \sqrt{25x^2 - x^4}$$

(Nota: Para facilitarla operación de optimación es conveniente introducirla variable x dentro de la raíz, simplifica la derivada y la ecuación resultante)

Para calcular el rectángulo de área máxima, se deriva y se iguala a cero.

$$A' = 2 \cdot \frac{1}{2 \cdot \sqrt{25x^2 - x^4}} \cdot \left(50x - 4x^3\right) = 0 \quad : \quad 50x - 4x^3 = 0$$

$$2x \cdot \left(25 - 2x^2\right) = 0 : \begin{cases} 2x = 0 : x = 0 \\ 25 - 2x^2 = 0 : x = \pm\sqrt{\dfrac{25}{2}} = \pm\dfrac{5}{\sqrt{2}} \end{cases}$$

Puesto que x e y están definidas como longitud, solo se admiten valores positivos. El valor de y se obtiene sustituyendo:

$$\left.\begin{array}{r} x = \dfrac{5}{\sqrt{2}} \\ y = \sqrt{25 - x^2} \end{array}\right\} : y = \sqrt{25 - \left(\frac{5}{\sqrt{2}}\right)^2} = \frac{5}{\sqrt{2}}$$

Para comprobar que efectivamente es un máximo se acude al criterio del signo de la primera derivada en los alrededores del punto.

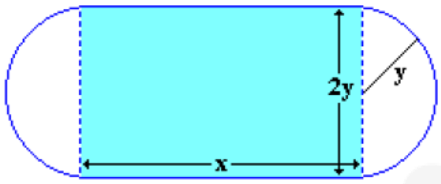
$$\text{MÁXIMO} : A'\left(\frac{5}{\sqrt{2}}^{-}\right) > 0 \wedge A'\left(\frac{5}{\sqrt{2}}^{+}\right) < 0$$

Si se tiene en cuenta que x es positiva y que su dominio está restringido al intervalo $[-5, 5]$, el signo de A' es el signo de la expresión $25 - 2x^2$.

$$\left.\begin{array}{l} \text{Signo}\left(25-2\left(\dfrac{5}{\sqrt{2}}^{-}\right)^{2}\right)>0 \Rightarrow A'\left(\dfrac{5}{\sqrt{2}}^{-}\right)>0 \\ \text{Signo}\left(25-2\left(\dfrac{5}{\sqrt{2}}^{+}\right)^{2}\right)<0 \Rightarrow A'\left(\dfrac{5}{\sqrt{2}}^{+}\right)<0 \end{array}\right\} : \text{En } x=\frac{5}{\sqrt{2}} \ \exists \text{ Máximo}$$

12. Una pista de atletismo está formada por una región rectangular con un semicírculo en cada extremo. Si el perímetro es de 400 metros, hallar las dimensiones de la pista para que el área de la zona rectangular sea máxima.

Solución.



El área del rectángulo viene expresada por

$$A = x \cdot 2y$$

Para relacionar x e y se tiene en cuenta que el perímetro de la pista, que debe ser 400m, se puede expresar en función de las variables.

$$P = \pi \cdot y + x + \pi \cdot y + x = 2\pi \cdot y + 2x = 400 \ : \ y = \frac{400-2x}{2\pi} = \frac{200-x}{\pi}$$

Sustituyendo en la expresión del área obtenemos una función de una única variable.

$$A = x \cdot 2\,\frac{200-x}{\pi} = \frac{2}{\pi}\left(200x - x^{2}\right)$$

El mínimo de la función se obtiene derivando e igualando a cero:

$$A' = \frac{2}{\pi}(200-2x) = 0 \ : \ 200-2x = 0 \ : \ x = 100$$

conocido x, el valor de y se obtiene sustituyendo.

$$y = \frac{200-100}{\pi} = \frac{100}{\pi}$$

Para comprobar que es un mínimo, se estudia el signo de la segunda derivada:

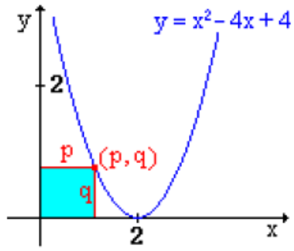
$$A'' = \frac{2}{\pi}(-2) = \frac{-4}{\pi} < 0$$

Las dimensiones de la pista que hacen que el área de la zona rectangular sea máxima son:

$$x = 100 \ : \ y = \frac{100}{\pi}$$

13. Sea la parábola $y = x^2 - 4x + 4$ y un punto (p, q) sobre ella con $0 \le p \le 2$. Formamos un rectángulo de lados paralelos a los ejes con vértices opuestos (0, 0) y (p, q). Calcular (p, q) para que el área de este rectángulo sea máxima.

Solución.



El área del rectángulo de la figura viene expresado por:

$$A = p \times q$$

siendo p y q las coordenadas de un vértice del rectángulo que se corresponden respectivamente a las longitudes de la base y altura del mismo.

Teniendo en cuenta que dicho vértice también pertenece a la parábola, sus coordenadas deben cumplir la ecuación de la parábola:

$$q = p^2 - 4p + 4$$

igualdad que permite expresar el área del rectángulo en función de una solo de la longitud de la base(p).

$$A = p \times (p^2 - 4p + 4) = p^3 - 4p^2 + 4p$$

Los valores óptimos de la función son los ceros de la primera derivada. Para comprobar si son máximos ó mínimos se recurre al criterio del signo de la segunda derivada:

$$\text{Si}: \begin{cases} A''(p_o) < 0 \Rightarrow \text{Máximo} \\ A''(p_o) > 0 \Rightarrow \text{Mínimo} \end{cases}$$

$$A'(p) = 3p^2 - 8p + 4 \ : \ A'(p) = 0 \ : \ 3p^2 - 8p + 4 = 0 : \begin{cases} x = 2/3 \\ x = 2 \end{cases}$$

$$A''(p) = 6p - 8 : \begin{cases} A''\left(2/3\right) = 6 \cdot \dfrac{2}{3} - 8 = -4 < 0 : \text{Máximo} \\ A''(2) = 6 \cdot 2 - 8 = 4 > 0 : \text{Mínimo} \end{cases}$$

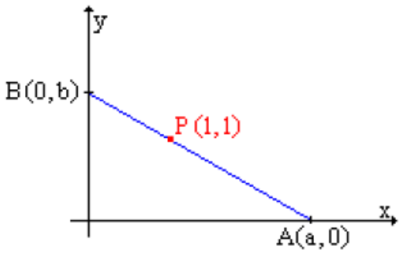
El valor de q en el máximo se obtiene sustituyendo en la ecuación de la parábola:

$$q = \left(\frac{2}{3}\right)^2 - 4 \cdot \frac{2}{3} + 4 = \frac{16}{9}$$

El rectángulo de área máxima se obtiene sobre el vértice $\left(\dfrac{2}{3}, \dfrac{16}{9}\right)$

14. Se considera un triángulo rectángulo en el primer cuadrante, determinado por los ejes coordenados y una recta que pasa por le punto (1 , 1). Determinar los vértices del triángulo cuya hipotenusa tiene longitud mínima.

Solución.



La distancia entre dos puntos A y B viene expresada por:

$$d(A-B)=\sqrt{(b_1-a_1)^2+(b_2-a_2)^2}$$

aplicando esta definición a las coordenadas de A y de B:

$$d(A-B)=\sqrt{(0-a)^2+(b-0)^2}=\sqrt{a^2+b^2}$$

se obtiene una expresión para la distancia entre estos dos puntos en función de a y b.

Para encontrar una relación entre a y b que permita expresar la distancia en función de una sola variable, se tiene en cuenta que la recta que pasa por estos dos puntos también debe pasar por el punto P(1, 1). Esta recta tie ne por expresión en forma canónica:

$$r\equiv\frac{x}{a}+\frac{y}{b}=1$$

$$P(1,1)\in r\Rightarrow\frac{1}{a}+\frac{1}{b}=1$$

expresión que permite despejar b en función de a

$$b=\frac{a}{a-1}$$

sustituyendo en la expresión de la distancia y simplificando al máximo para facilitar los cálculos posteriores, se obtiene una función que expresa la longitud de la hipotenusa del triángulo rectángulo construido sobre los ejes en función de una única variable:

$$d(A-B)=\sqrt{a^2+\left(\frac{a}{a-1}\right)^2}=\frac{a}{a-1}\sqrt{a^2-2a+2}$$

Para obtener el mínimo de la función se deriva y se iguala a cero.

"L expresión se puede derivar como cociente $\frac{a\sqrt{a^2-2a+2}}{a-1}$*, ó como producto* $\frac{a}{a-1}\cdot\sqrt{a^2-2a+2}$*."*

Derivando como producto:

$$d'=\frac{1\cdot(a-1)-a\cdot 1}{(a-1)^2}\cdot\sqrt{a^2-2a+2}+\frac{a}{a-1}\cdot\frac{1}{2\sqrt{a^2-2a+2}}\cdot(2a-2)=\frac{a^3-2a^2+3a-2}{(a-1)^2\sqrt{a^2-2a+2}}$$

$$d'=0\ :\ a^3-2a^2+3a-2=0$$

factorizando mediante el método de Ruffini

$$(a-2)\cdot(a^2-a+1)=0\ :\ a=2$$

Sustituyendo en la expresión que relaciona a con b, se calcula b

$$b=\frac{a}{a-1}=\{a=2\}=\frac{2}{2-1}=2$$

Para comprobar que en el punto (2, 2) la función presenta un mínimo, se recurre al criterio del signo de la 1ª derivada.

$$\text{Sí } d'(2^-) < 0 \text{ y } d'(2^+) > 0 \Rightarrow \text{En } a = 2 \text{ existe un mínimo}$$
$$\text{Sí } d'(2^-) > 0 \text{ y } d'(2^+) < 0 \Rightarrow \text{En } a = 2 \text{ existe un máximo}$$

Teniendo en cuenta la forma de la expresión de d', su signo solo depende del binomio a − 2.

$$\text{Signo}\left(\frac{(a-2)\cdot(a^2-a+1)}{(a-1)^2\sqrt{a^2-a+1}}\right) = \left\{\begin{array}{c} a^2-a+1>0 \ \ \forall a \in R \\ (a-1)^2>0 \ \ \forall a \in R \\ \sqrt{a^2-a+1}>0 \ \ \forall a \in R \end{array}\right\} = \text{Signo}(a-2)$$

$$d'(2^-) = (2^- - 2) = 0^- < 0 \ : \ d'(2^+) = (2^+ - 2) = 0^+ > 0 \Rightarrow \text{MÍNIMO}$$

Los vértices del triángulo de hipotenusa mínima son A(2, 0) y B(0, 2).

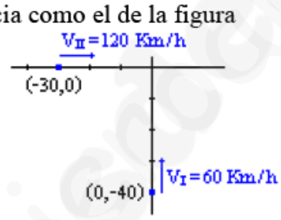
15. Dos líneas férreas se cortan perpendicularmente. Por cada línea avanza una locomotora (de longitud despreciable), dirigiéndose ambas al punto de corte; sus velocidades son 60 km/h y han salido simultáneamente de estaciones situadas, respectivamente, a 40 y 30 km del punto de corte.

1. Hallar la distancia a la que se encuentran las locomotoras, en función del tiempo que pasa desde que inician su recorrido.
2. Hallar el valor mínimo de dicha distancia.

Solución.

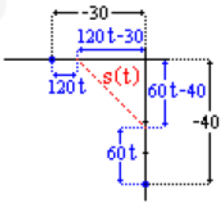
1.- Se pide calcular una expresión para la distancia de separación de dos puntos móviles que se desplazan perpendicularmente y con velocidades constantes en función del tiempo.

Tomando un sistema de referencia como el de la figura



y considerando el desplazamiento positivo, el ejercicio se reduce a calcular la hipotenusa de un triángulo rectángulo en el que la longitud de los catetos será función del tiempo.

Transcurrido un tiempo t, la posición de los móviles vendrá dada por



$$\begin{cases} s_I = 60t - 40 \\ s_{II} = 120t - 30 \end{cases}$$

por lo que la distancia de separación entre los móviles será

$$s(t) = \sqrt{(60t-40)^2 + (120t-30)^2} = \sqrt{18000t^2 - 12000t + 2500} = 10\cdot\sqrt{180t^2 - 120t + 25}$$

2.- Se pide calcular el mínimo de la función s(t).

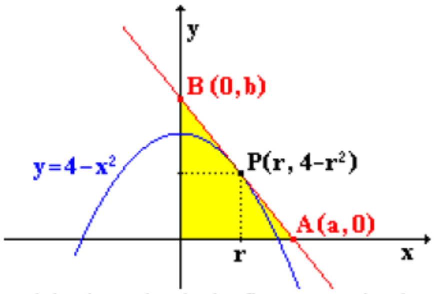
$$s'(t) = 10\cdot\frac{360t-120}{2\cdot\sqrt{180t^2-120t+25}}$$

igualando a cero la derivada:

$$S'(t) = 0 \Rightarrow 360t - 120 = 0 \ ; \ t = \frac{120}{360} = \frac{1}{3}\text{ h.}$$

16. Dada la parábola $y = 4 - x^2$, se considera el triángulo rectángulo T(r) formado por los ejes de coordenadas y la tangente a la parábola en el punto de abscisa $x = r > 0$. Hallar r para que T(r) tenga área mínima.

Solución.



Se pide optimizar el área del triangulo de la figura. Teniendo en cuenta las coordenadas de los vértices, el área del triángulo es:

$$\text{Área} = \frac{a \times b}{2}$$

a y b se pueden expresar en función de r. Para ello bastará con expresar la ecuación de la tangente a la parábola en el punto P en forma canónica.

La tangente a la parábola en el punto P(r, $4-r^2$) en forma punto pendiente es:

$$y - \left(4 - r^2\right) = y'(r)(x - r)$$

donde $y'(r) = -2r$, sustituyendo:

$$y - \left(4 - r^2\right) = -2r(x - r)$$

cuya ecuación general es de la siguiente forma:

$$2r \cdot x + y - \left(r^2 + 4\right) = 0$$

expresión que permite obtener la forma canónica:

$$\frac{x}{\left(\frac{4+r^2}{2r}\right)} + \frac{y}{4+r^2} = 1$$

identificando con la ecuación canónica genérica $\left(\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1\right)$ se obtienen los coeficientes a y b en función de r:

$$\begin{cases} a = \dfrac{4+r^2}{2r} \\ b = 4 + r^2 \end{cases}$$

Estos valores permiten obtener el área del triangulo T en función de r(abscisa del punto de tangencia).

$$A = \frac{\frac{4+r^2}{2r} \times \left(4+r^2\right)}{2} = \frac{\left(4+r^2\right)^2}{4r}$$

Para obtener el mínimo de la función, se deriva y se iguala a cero

$$A' = \frac{1}{4}\,\frac{2 \cdot \left(4+r^2\right) \cdot 2r \cdot r - \left(4+r^2\right)^2 \cdot 1}{r^2} = \frac{1}{4}\,\frac{\left(4+r^2\right) \cdot \left(3r^2 - 4\right)}{r^2} = 0$$

$$\left(4+r^2\right) \cdot \left(3r^2 - 4\right) = 0 : \begin{cases} 4 + r^2 = 0 : \text{Solucion imaginaria} \\ 3r^2 - 4 = 0 : r = \pm\sqrt{\dfrac{4}{3}} = \pm\dfrac{2\sqrt{3}}{3} \end{cases}$$

Puesto que r > 0, el posible mínimo estará en $r = \frac{2\sqrt{3}}{3}$

Para confirmar que es un mínimo se usa el criterio de la segunda derivada $\left(f''(r_o) > 0\right)$.

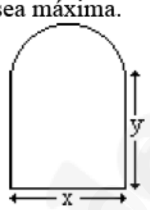
$$A'' = \frac{1}{4}\frac{\left(2r\cdot\left(3r^2-4\right)+\left(4+r^2\right)\cdot 6r\right)\cdot r^2-\left(4+r^2\right)\cdot\left(3r^2-4\right)\cdot 2r}{r^4} = \frac{3r^4+16}{2r^3}$$

comprobando para el valor de r calculado

$$A''\left(\frac{2\sqrt{3}}{3}\right) = \frac{3\left(\frac{2\sqrt{3}}{3}\right)^4+16}{2\left(\frac{2\sqrt{3}}{3}\right)^3} > 0$$

Para $r = \frac{2\sqrt{3}}{3}$ el área del triángulo es mínima.

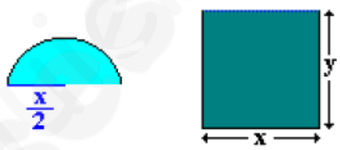
17. Se considera una ventana como la que se indica en la figura (la parte inferior es rectangular; la superior, una semicircunferencia). El perímetro de la ventana mide 6 m. Hallar las dimensiones x e y del rectángulo para que la superficie de la ventana sea máxima.



(Expresar los resultados en función de π)

Solución.

El área buscada se pede expresar como suma de dos áreas



$A_{SC} \equiv$ Área del semicírculo

$A_R \equiv$ Área del rectángulo

$$A_T = A_{SC} + A_R = \frac{1}{2}\pi\left(\frac{x}{2}\right)^2 + x\cdot y = \frac{\pi}{8}x^2 + x\cdot y$$

Para relacionar x e y se tiene en cuenta que el perímetro es de 6 m.

$$P_T = P_{SC} + P_R = \left(\frac{1}{2}2\pi\frac{x}{2}\right) + (x+2y) = \left(\frac{\pi}{2}+1\right)x + 2y = 6 \quad : \quad y = \frac{6-\left(\frac{\pi}{2}+1\right)x}{2} = 3 - \frac{\pi+2}{4}x$$

sustituyendo en la expresión del área, se obtiene esta en función únicamente de x.

$$A_T = \frac{\pi}{8}x^2 + x\cdot\left(3-\frac{\pi+2}{4}x\right) = 3x - \frac{\pi+4}{8}x^2$$

El máximo de la función se encuentra derivando e igualando a cero.

$$A'_T = 3 - \frac{\pi+4}{8}\cdot 2x = 3 - \frac{\pi+4}{4}x = 0 \quad : \quad x = \frac{12}{\pi+4}$$

Teniendo en cuenta que la segunda derivad es menor que cero y no depende de x

$$A''_T - \frac{\pi+4}{4}$$

se trata de un máximo.

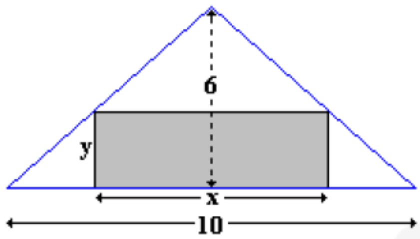
El valor de y se saca sustituyendo el valor de x en la expresión de y

$$y = 3 - \frac{\pi+2}{4} \cdot \frac{12}{\pi+4} = 3 \cdot \left(1 - \frac{\pi+2}{\pi+4}\right) = \frac{6}{\pi+4}$$

18. Se considera un triángulo isósceles cuya base (el lado desigual) mide 10 cm y cuya altura mide 6 cm. En el se inscribe un rectángulo, cuya base esta situada sobre la base del triángulo.

a) Expresar el área A de dicho rectángulo en función de la longitud x de su base.
b) Escribir el dominio de la función A(x) y dibujar su gráfica.
c) Hallar el valor máximo de dicha función.

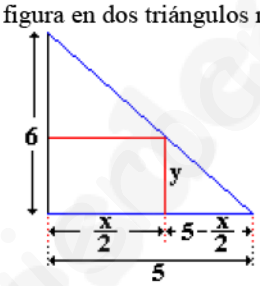
Solución.



a. Se pide hallar el área del rectángulo sombreado en función de x.

$$A = \text{base} \times \text{Altura} = x \cdot y$$

Para relacionar x e y se divide la figura en dos triángulos rectángulos y se aplica el teorema de Tales.



$$\frac{y}{6} = \frac{5 - x/2}{5} \quad : \quad y = \frac{6}{5}\left(5 - \frac{x}{2}\right)$$

Sustituyendo en la expresión del área se obtiene la función pedida.

$$\frac{y}{6} = \frac{5 - x/2}{5} \quad : \quad A = x \cdot \frac{6}{5}\left(5 - \frac{x}{2}\right) = \frac{6}{5}\left(5x - \frac{x^2}{2}\right)$$

$$A(x) = 6x - \frac{3}{5}x^2$$

b. Si solo se tiene en cuenta que es una función polinómica, su dominio es todo R. Si se tiene en cuenta que A(x) representa áreas, y estas, deben ser mayores que cero, el dominio se ve acotado. D = (0, 10)

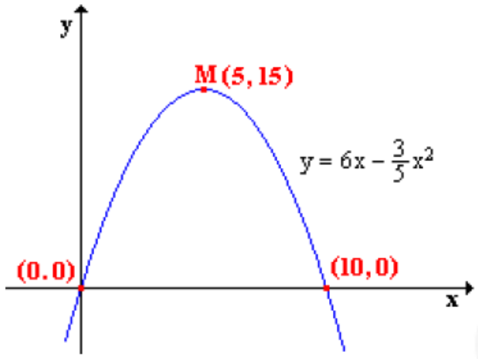
Para hacer la gráfica de la función $\left(y = 6x - \frac{3}{5}x^2\right)$ se tiene en cuenta que es un polinomio de 2º grado con coeficiente en x^2 negativo, por lo que su gráfica es una parábola cóncava(abierta hacia abajo). Para representarla basta con calcular el vértice y los puntos de corte con los ejes.

Corte con los ejes:

- OX(y = 0): $6x - \frac{3}{5}x^2 = 0 \;:\; x \cdot \left(6 - \frac{3}{5}x\right) = 0 : \begin{cases} x = 0 \\ 6 - \frac{3}{5}x = 0 \;:\; x = 10 \end{cases}$

- OY(x = 0): Al carecer de término independiente, coincide con OX. (0, 0)

Vértice: $\begin{cases} x_v = -\dfrac{b}{2a} = 5 \\ y_v = f(x_v) = 15 \end{cases}$



c. El máximo de la función se halla derivando e igualando a cero. Para comprobar, se usa el criterio de la derivada segunda.

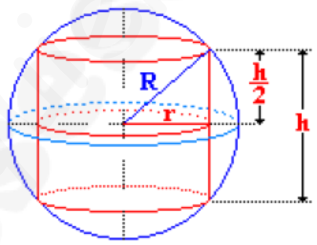
$$A'(x) = 6 - \frac{6}{5}x = 0 \ : \ x = 5 \ : \ A''(x) = -\frac{6}{5} < 0 \ : \ \text{Máximo}$$

El máximo de la función es: A(5) = 15

19. Hallar el radio de la base y la altura de un cilindro inscrito en una esfera de radio R en cada uno de los siguientes casos:

a) El volumen del cilindro es máximo.

Solución.



El volumen de un cilindro es:

$$V = \pi r^2 h$$

Como el cilindro está inscrito en una circunferencia de radio R, se puede encontrar una relación mediante el teorema de Pitágoras entre el radio de la base del cilindro, la mitad de la altura del cilindro y el radio de la esfera.

$$R^2 = r^2 + \left(\frac{h}{2}\right)^2$$

Mediante está expresión que relaciona las variable, se puede despejar una en función de la otra, y de esta forma encontrar una función que calcule el volumen de todos los cilindros inscritos en una esfera de radio R en función de una sola variable(En este caso h por ser más fácil despejar r^2).

$$\left.\begin{array}{r} V = \pi r^2 h \\ r^2 = R^2 - \dfrac{h^2}{4} \end{array}\right\} : V = \pi \cdot \left(R^2 - \frac{h^2}{4}\right) \cdot h = \pi \cdot \left(R^2 \cdot h - \frac{h^3}{4}\right)$$

Para calcular las dimensiones del cilindro de volumen máximo, se deriva la función V respecto de h, se iguala a cero y se despeja:

$$V' = \pi \cdot \left(R^2 - \frac{3h^2}{4} \right) = 0 \quad : \quad R^2 - \frac{3h^2}{4} = 0 \quad : \quad h = \frac{2R}{\sqrt{3}}$$

el radio de la base se obtiene sustituyendo el valor de h en la expresión del radio

$$r^2 = R^2 - \frac{\left({2R}/{\sqrt{3}} \right)^2}{4} = \frac{2}{3} R^2 \quad : \quad r = \sqrt{\frac{2}{3}} \cdot R$$

Para verificar que es un máximo se sustituye el valor de h en la segunda derivada de V, y se comprueba que es negativa.

$$V'' = -\frac{3\pi}{2} h \quad : \quad V''(h) = -\frac{3\pi}{2} \sqrt{\frac{2}{3}} \cdot R < 0$$

(R es el radio de la esfera y por tanto positivo)

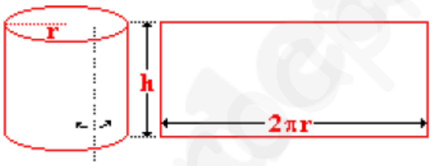
El cilindro de volumen máximo inscrito en una circunferencia de radio R debe tener por dimensiones:

$$r = \sqrt{\frac{2}{3}} \cdot R \quad : \quad h = \frac{2}{\sqrt{3}} \cdot R$$

b) El área lateral del cilindro es máxima.

Solución.

El área lateral de un cilindro es un rectángulo que por base tiene la longitud de la circunferencia y por altura la altura del cilindro.



$$A_L = 2\pi \cdot r \cdot h$$

De la ecuación auxiliar obtenida en el apartado anterior, se despeja h:

$$h = 2 \cdot \sqrt{R^2 - r^2}$$

se sustituyen en la expresión de A_L y se obtiene una función que permite calcular el área lateral de todos los cilindros inscritos en una circunferencia de radio R.

$$A_L = 4\pi \cdot r \cdot \sqrt{R^2 - r^2} = 4\pi \sqrt{R^2 r^2 - r^4}$$

Para calcular el mínimo de la función se deriva y se iguala a cero

$$A'_L = 4\pi \cdot \frac{2R^2 r - 4r^3}{2\sqrt{R^2 r^2 - r^4}} = 0 \quad : \quad 2R^2 r - 4r^3 = 0 \quad : \quad 2r \cdot \left(R^2 - 2r^2 \right) = 0 : \begin{cases} r = 0 \\ r = \pm \dfrac{R}{\sqrt{2}} \end{cases}$$

El único valor aceptable para r es $+\frac{R}{\sqrt{2}}$, sustituyendo en la expresión de h se calcula la altura

$$h = 2 \cdot \sqrt{R^2 - \left(\frac{R}{\sqrt{2}} \right)^2} = 2 \cdot \sqrt{R^2 - \frac{R^2}{2}} = 2 \frac{R}{\sqrt{2}} = \sqrt{2} \cdot R$$

Para comprobar que efectivamente es un máximo se utiliza el criterio del signo de la primera derivada en las proximidades de $\frac{R}{\sqrt{2}}$ ya que la segunda derivada se complica bastante.

El signo de la primera derivada es el signo del numerador y si r es un número positivo, el signo será solo función de la expresión $R^2 - 2r^2$

$$\left.\begin{array}{l} A'_L\left(\dfrac{R^-}{\sqrt{2}}\right)=R^2-2\left(\dfrac{R^-}{\sqrt{2}}\right)^2>0\Rightarrow \text{Creciente} \\ A'_L\left(\dfrac{R^+}{\sqrt{2}}\right)=R^2-2\left(\dfrac{R^+}{\sqrt{2}}\right)^2>0\Rightarrow \text{decreciente} \end{array}\right\}:\text{En } r=\frac{R}{\sqrt{2}} \text{ hay un máximo}$$

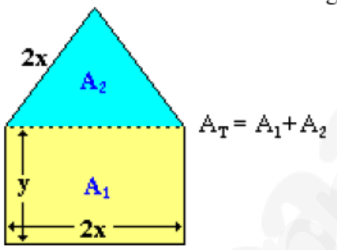
Las dimensiones del cilindro de área lateral máxima inscrito en una esfera de radio R son:

$$r=\frac{R}{\sqrt{2}}\quad:\quad h=\sqrt{2}\cdot R$$

20. A una ventana rectangular se le abre un triángulo equilátero sobre el lado superior. Si el perímetro total de la figura así formada es de 11 m, determinar sus dimensiones para que el área sea máxima.

Solución.

El área de la ventana se obtiene como suma del área de rectángulo más el área del triángulo.



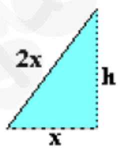
Por se un rectángulo, A_1 es:

$$A_1=2x\cdot y$$

Por ser un triángulo, A_2 es:

$$A_2=\frac{1}{2}(\text{base})\times(\text{altura})=\frac{1}{2}\cdot 2x\cdot h$$

Si se divide el triángulo equilátero en dos rectángulos, mediante el teorema de Pitágoras se puede relacionar x con h.



$$x^2+h^2=(2x)^2$$
$$h=\sqrt{4x^2-x^2}$$
$$h=\sqrt{3}x$$

Sustituyendo en A_2:

$$A_2=x\cdot\sqrt{3}\,x=\sqrt{3}\,x^2$$

con lo que el área total queda:

$$A_T(x,y)=2xy+\sqrt{3}x^2$$

De todas las ventanas de esta forma, se buscan aquellas que tengan de perímetro 11, por lo que se puede establecer una relación entre x e y que permita despejar una en función de la otra y de esta forma expresar el área total en función de una sola variable.

$$\text{Perímetro}=6x+2y=11\ \Rightarrow\ y=\frac{11-6x}{2}$$

$$A_T(x)=2x\cdot\frac{11-6x}{2}+\sqrt{3}x^2=11x-6x^2+\sqrt{3}x^2=11x-\left(6-\sqrt{3}\right)x^2$$

Para calcular el máximo de esta función se deriva y se iguala a cero.

$$A'_T(x) = 11 - 2\cdot\left(6-\sqrt{3}\right)x = 0 \quad : \quad x = \frac{11}{2\cdot\left(6-\sqrt{3}\right)} = 1 + \frac{\sqrt{3}}{6}$$

sustituyendo en la expresión de y

$$y = \frac{11 - 6\left(1+\frac{\sqrt{3}}{6}\right)}{2} = \frac{5-\sqrt{3}}{2}$$

Para verificar que efectivamente se trata de un máximo se comprueba si $A''\left(1+\frac{\sqrt{3}}{6}\right) < 0$

$$A''(x) = -2\cdot\left(6-\sqrt{3}\right) < 0$$

21. Se construye un triángulo rectángulo en el primer cuadrante del plano, limitado por los ejes coordenados y una recta que pasa por el punto (2,3). Hallar las longitudes de los lados del triángulo de área mínima.

Solución.

Igual que el problema 5

Expresión del área del triángulo en función de la longitud de la base(a), y sus dos primeras derivadas.

$$A = \frac{3a^2}{2(a-2)} \quad : \quad A' = \frac{3a(a-4)}{2(a-2)^2} \quad : \quad A'' = \frac{12}{(a-2)^3}$$

Mínimo de la función: (4, 6)