

**NOTA:** En los ejercicios de Geometría se recomienda comenzar, antes de nada, por:

- Imaginarse la situación; podemos ayudarnos, para ello, de bolígrafos (para representar rectas), la mesa o una hoja de papel (planos), una goma de borrar (puntos), etc.
- O bien, **procurar representar gráficamente**, de una forma aproximada, **la situación**. Esto último es lo más recomendable (aunque en la PAEG no se exija...).

A continuación, tendremos que preguntarnos, ¿qué nos piden?:

- **Si nos piden una recta: Tendremos que obtener**, a partir de los datos, **un punto de ella y un posible vector director**.
- **Si nos piden un plano:** Tendremos que decidir, en función de los datos, cuál de las dos determinaciones más usuales nos interesa más:
  - **Un punto del plano y un vector normal**  $\vec{n}_\pi$
  - **Un punto del plano y dos vectores direccionales.**

Por último, **se recomienda** vivamente **comprobar** que las ecuaciones obtenidas satisfacen los datos y las condiciones del enunciado.

### Ecuación de la recta:

1. **Razonar** si las siguientes situaciones pueden ser, o no, una posible determinación de una recta. Puede ser útil un dibujo:
  - a) Recta  $r \parallel$  a otra  $r'$  y que pasa por un punto  $P$  exterior a ésta última.
  - b) Recta  $r$  que corta  $\perp$  a otra  $r'$  y pasa por un punto  $P$  exterior a esta última.
  - c) Recta  $r \perp$  a otra  $r'$  y que pasa por un punto  $P$  exterior a ésta última (Tener en cuenta que las rectas  $\perp$  se pueden cortar o cruzar).
  - d) Recta  $r \perp$  a un plano  $\pi$  y que pasa por un punto  $P$ .
  - e) Recta  $r \parallel$  a un plano  $\pi$  y que pasa por un punto  $P$  exterior a dicho plano.
  - f) Recta  $r \cap$  de dos planos  $\pi$  y  $\pi'$  no paralelos.  
(Sol: a) Sí; b) Sí; c) NO; d) Sí; e) NO; f) Sí)
2. Dado el punto  $P(-1,1,2)$  y el vector  $\vec{u} = (1,3,2)$ , se pide: **a)** Hallar la recta determinada por ambos, en paramétricas y continua. **b)** Obtener tres puntos cualesquiera de dicha recta. **c)** Estudiar si los puntos  $(-3,-5,-2)$  y  $(2,10,6)$  pertenecen a la recta.
3. Dados los puntos  $A(1,-2,4)$  y  $B(3,2,10)$  se pide: **a)** Hallar la recta determinada por ambos, en paramétricas y continua. **b)** Obtener tres puntos cualesquiera de dicha recta. **c)** Estudiar si los puntos  $(1,2,3)$  y  $(2,1,0)$  pertenecen a la recta. (Soluc: c) NO; NO)
4. Con los datos del ejercicio anterior, hallar otras dos posibles formas paramétricas alternativas, y volver a hacer los apartados b y c.

5. Hallar las ecuaciones paramétricas y continua de los ejes de coordenadas.
6. Hallar las ecuaciones paramétricas y continua de la recta que corta al eje  $y$  a la altura de 3 unidades positivas y al  $z$  en 4 unidades positivas. Explicar gráficamente la solución.

7. La recta  $\left. \begin{array}{l} x = 2 + 2\lambda \\ y = 0 \\ z = -3\lambda \end{array} \right\}$  corta a los ejes en dos puntos.

- a) Hallar dichos puntos. Hacer un dibujo de la situación. (Soluc:  $(2,0,0)$  y  $(0,0,3)$ )
- b) Obtener el área del triángulo cuyos vértices son los dos puntos anteriores y el origen. Dibujar la situación. (Soluc:  $3 \text{ u}^2$ )

8. Un tetraedro tiene por vértices  $A(0,1,0)$ ,  $B(1,2,3)$ ,  $C(0,2,1)$  y el cuarto vértice está situado en determinado punto D de la recta  $\left. \begin{array}{l} x = \lambda \\ y = 1 \\ z = 1 \end{array} \right\}$  de forma que su volumen es  $\frac{5}{2} \text{ u}^3$ . Hallar dicho punto. (Soluc:  $(8,1,1)$  y  $(-7,1,1)$ )

9. Hallar las ecuaciones de las medianas del triángulo de vértices  $A(2,3,4)$ ,  $B(1,-1,5)$  y  $C(5,5,4)$ . Hallar también las coordenadas del baricentro de dicho triángulo.

(Sol:  $M_a: (x-2)/2=(y-3)/-2=(z-4)/1$ ;  $M_b: (x-1)/5=(y+1)/10=(z-5)/-2$ ;  $M_c: (x-5)/7=(y-5)/8=(z-4)/-1$ ;  $G(8/3, 7/3, 13/3)$ )

10. (S) Determinar los valores de  $m$  para que los puntos  $A(m,2,-3)$ ,  $B(2,m,1)$  y  $C(5,3,-2)$  estén alineados y hallar las ecuaciones de la recta que los contiene. (Soluc:  $m=6$ )

### Ecuación del plano:

11. Razonar si las siguientes situaciones pueden constituir una posible determinación de un plano. Intentar hacer un dibujo aclaratorio:

- a) Plano  $\pi$  que contiene a una recta  $r$  y a un punto  $P$  exterior a ésta.
- b) Plano  $\pi$  que contiene a una recta  $r$  y a un punto  $P$  de ésta.
- c) Plano  $\pi \perp$  a una recta  $r$  y que pasa por un punto  $P$ .
- d) Plano  $\pi //$  a otro  $\pi'$  y que contiene a un punto  $P$  exterior a éste último.
- e) Plano  $\pi //$  a una recta  $r'$  y que contiene a un punto  $P$  exterior a ésta.
- f) Plano  $\pi$  que contiene a dos rectas  $r$  y  $r'$  paralelas.
- g) Plano  $\pi$  que contiene a dos rectas  $r$  y  $r'$  secantes.
- h) Plano  $\pi$  que contiene a una recta  $r$  y es paralelo a otra  $r'$  que se cruza con la anterior (esto es, ambas rectas no se tocan).
- i) Plano  $\pi \perp$  a otro  $\pi'$  y que pasa por dos puntos  $P$  y  $Q$ .

(Sol: **a)** Sí; **b)** NO; **c)** Sí; **d)** Sí; **e)** NO; **f)** Sí; **g)** Sí; **h)** Sí; **i)** Sí, siempre y cuando no estén alineados  $\perp$  al plano)

12. Hallar la ecuación paramétrica y general del plano determinado por el punto  $P(1,2,3)$  y los vectores  $\vec{u} = (2,-1,5)$  y  $\vec{v} = (3,2,4)$ . (Soluc:  $2x-y-z+3=0$ )

13. Hallar la ecuación paramétrica y general del plano determinado por los puntos  $A(2,1,3)$ ,  $B(1,1,1)$  y  $C(5,1,8)$ . ¿Era de prever el resultado? (Soluc:  $y=1$ )

14. Dados los puntos  $A(5,-1,-1)$ ,  $B(1,0,1)$  y  $C(-2,-3,0)$  se pide:
- Hallar la ecuación paramétrica y general del plano que determinan. (Soluc:  $x-2y+3z-4=0$ )
  - Estudiar si los puntos  $(3,1,1)$  y  $(1,2,3)$  pertenecen a dicho plano. (Soluc: Sí; NO)
  - Hallar otros dos puntos cualesquiera de este plano.
  - Comprobar que el vector formado por los 3 coeficientes de la ecuación general es  $\perp$  al plano.
15. Hallar una ecuaciones paramétricas para el plano  $x-2y+3z-1=0$  (Soluc:  $x=1+2\lambda-3\mu$ ,  $y=\lambda$ ,  $z=\mu$ )
16. Hallar la ecuación de los planos cartesianos OXY, OYZ y OXZ en paramétricas e implícita.
17. (S) Hallar la ecuación del plano que pasa por la recta  $x=2t$ ,  $y=3+t$ ,  $z=1-t$ , y por el punto  $A(2,-1,2)$ .  
(Soluc:  $3x+4y+10z-22=0$ )
18. a) Hallar la ecuación paramétrica y continua de la recta  $s$  que pasa por  $A(2,3, -1)$  y es paralela a la recta

$$\left. \begin{array}{l} x = \lambda \\ y = \lambda \\ z = \lambda \end{array} \right\}$$

- b) Hallar la ecuación general del plano que contiene a ambas rectas. Hacer un dibujo de la situación.  
(Soluc:  $4x-3y-z=0$ )

19. (S) Hallar la ecuación del plano paralelo a las rectas  $r$ :  $\left. \begin{array}{l} x=2+\lambda \\ y=3 \\ z=1+2\lambda \end{array} \right\}$   $s$ :  $\left. \begin{array}{l} x=-2-3\lambda \\ y=1+\lambda \\ z=-\lambda \end{array} \right\}$   
y que contiene al punto  $P(2,3,4)$ . (Soluc:  $-2x-5y+z+15=0$ )

20. (S) Dadas las rectas

$$r: \frac{x+2}{3} = \frac{y-1}{2} = \frac{z+1}{-1} \quad s: \frac{x-1}{-2} = \frac{y-3}{-2} = \frac{z}{3}$$

determinar la ecuación del plano que contiene a  $r$  y es paralelo a  $s$ . (Soluc:  $4x-7y-2z+13=0$ )

21. Hallar la ecuación del plano que pasa por el origen y contiene a la recta  $\left. \begin{array}{l} x = 2 + \lambda \\ y = 3 - \lambda \\ z = 1 \end{array} \right\}$  (Soluc:  $x+y-5z=0$ )

### Vector normal $\vec{n}_\pi$

22. Hallar la ecuación del plano perpendicular al vector  $\vec{n}_\pi = (2, -3, 1)$  y que pasa por el punto  $P(1,1,-3)$   
(Soluc:  $2x-3y+z+4=0$ )
23. Hallar la ecuación del plano paralelo a  $x+2y+3z+4=0$  y que pasa por el punto  $(3,0,-1)$  (Soluc:  $x+2y+3z=0$ )
24. Comprobar que los vectores  $\vec{u}_r$  y  $\vec{u}_s$  del ejercicio 15 son  $\perp$  al vector normal  $\vec{n}_\pi$  del plano.
25. (S) Dada la recta

$$r: \frac{x}{2} = \frac{y+1}{3} = \frac{z}{-2}$$

y los puntos  $A(3,1,2)$  y  $B(1,5,6)$ , hallar la ecuación del plano que contiene los puntos A y B y es perpendicular a la recta  $r$ . (Soluc:  $2x+3y-2z-5=0$ )

26. (S) Hallar el plano que pasa por los puntos  $A(0,2,0)$  y  $B(1,0,1)$  y es perpendicular al plano  $x-2y-z=7$ .  
(Soluc:  $2x+y-2=0$ )

27. (S) Dados el plano  $\pi: 2x-3y+z=0$  y la recta  $r: \left. \begin{array}{l} x=1+\lambda \\ y=2-\lambda \\ z=-1+2\lambda \end{array} \right\}$

hallar la ecuación del plano que contiene a la recta  $r$  y es perpendicular al plano  $\pi$ . (Soluc:  $5x+3y-z-12=0$ )

28. Hallar el valor de  $a$  para que los puntos  $A(1,2,-1)$ ,  $B(2,1,a)$ ,  $C(0,4,0)$  y  $D(2,0,-2)$  sean coplanarios. (Sol:  $\forall a \in \mathbb{R}$ )

29. (S) ¿Qué relación se ha de verificar entre los parámetros  $a$ ,  $b$  y  $c$  para que los puntos  $A(1,0,1)$ ,  $B(1,1,0)$ ,  $C(0,1,1)$  y  $D(a,b,c)$  sean coplanarios? (Soluc:  $a+b+c=2$ )

### Recta en implícitas:

30. a) Pasar la siguiente recta, expresada en implícitas, a paramétricas, resolviendo el sistema:

$$\left. \begin{array}{l} 2x + y + z - 3 = 0 \\ x + y + 3z - 4 = 0 \end{array} \right\}$$

b) Ídem con  $\frac{x-2}{1} = \frac{y+1}{-2} = \frac{z}{3}$

c) Pasar  $\left. \begin{array}{l} x = 1 - \lambda \\ y = -2\lambda \\ z = 3 + \lambda \end{array} \right\}$  a implícitas.

31. Dada  $\left. \begin{array}{l} 3x + 2y - z = 1 \\ x - 2y + 3z = 0 \end{array} \right\}$  se pide: a) Hallar un posible vector director.  
b) Hallar un punto cualquiera de  $r$   
c) Con la información anterior, indicar unas ecuaciones paramétricas para dicha recta.

32. (S) Dadas las rectas  $r: \left. \begin{array}{l} x-y+2z+1=0 \\ 3x+y-z-1=0 \end{array} \right\}$   $s: \left. \begin{array}{l} 2x+y-3z-4=0 \\ x+y+z=0 \end{array} \right\}$

hallar la ecuación del plano que contiene a  $r$  y es paralelo a  $s$ . (Soluc:  $27x+17y-23z-17=0$ )

33. (S) Se consideran el plano  $\pi: 2x-y+z+1=0$ , la recta  $s: x-3y=0, z=1$  y el punto  $A(4,0,-1)$ . Hallar el plano que pasa por  $A$ , es paralelo a la recta  $s$  y perpendicular al plano  $\pi$ . (Soluc:  $x-3y-5z-9=0$ )

34. (S) Determinar la ecuación de la recta  $r$  que pasa por el punto  $A(1,0,2)$  y es perpendicular al plano determinado por el origen de coordenadas y la recta  $\left. \begin{array}{l} x=2z-1 \\ y=z-2 \end{array} \right\}$  (Soluc:  $x=1-2\lambda, y=\lambda, z=2+3\lambda$ )

35. Hallar unas ecuaciones implícitas de la recta que pasa por  $P(2,-1,3)$  y es  $\perp$  a la recta  $\left. \begin{array}{l} y = 3 - \lambda \\ z = 0 \end{array} \right\}$

### Recta que se apoya en otras dos rectas y un punto:

36. (S) Determinar la recta que pasa por el punto  $A(1,-1,0)$  y corta a las rectas

$$r: x = \frac{y-2}{-1} = \frac{z}{2} \quad s: \frac{x-2}{3} = \frac{y}{2} = z-1$$

(Soluc:  $x=1+\lambda$ ,  $y=-1+4\lambda$ ,  $z=7\lambda$ , o bien  $3x+y-z-2=0$ ,  $x-2y+z-3=0$ )

37. (S) Dado el punto  $P(1,1,1)$  y las rectas

$$\left. \begin{array}{l} r: x=1+\lambda \\ y=2-\lambda \\ z=1+2\lambda \end{array} \right\} \quad \left. \begin{array}{l} s: x=\mu \\ y=3\mu \\ z=2-\mu \end{array} \right\}$$

hallar las ecuaciones paramétricas de la recta que pasa por P y corta a r y a s. (Soluc:  $x=1$ ,  $y=1+\lambda$ ,  $z=1$ )

38. Ídem con las rectas  $r: \begin{cases} 3x+2y-z+1=0 \\ 2x-y+z+4=0 \end{cases}$  y el punto  $P(1,0,-1)$  (Soluc:  $x=1+3\lambda$ ,  $y=\lambda$ ,  $z=-1+3\lambda$ )

$$y \begin{cases} x=3+t \\ y=t \\ z=1+t \end{cases}$$

### Rectas y planos, en general:

39. Hallar unas ecuaciones implícitas para los ejes de coordenadas.

40. Hallar las ecuaciones paramétricas, continua e implícita de la recta  $\perp$  al plano  $2x+3z-4=0$  y que pasa por  $P(1,-1,2)$

41. (S) Consideremos el plano  $\pi$  de ecuación  $20x+12y+15z-60=0$ . Hallar:

a) Los puntos A,B,C de intersección de  $\pi$  con los ejes coordenados OX, OY, OZ.

(Sol:  $A(3,0,0)$ ,  $B(0,5,0)$ ,  $C(0,0,4)$ )

b) La distancia entre la recta OB y el eje OX. (Sol: cero, pues ambas rectas se cortan)

42. (S) Consideremos las rectas de ecuaciones

$$r: \begin{cases} x+y-z+3=0 \\ -2x+z-1=0 \end{cases} \quad s: x+1 = \frac{y-3}{n} = \frac{z}{2}$$

a) Hallar n para que r y s sean paralelas.

b) Para el valor de n obtenido en el apartado anterior, determinar la ecuación del plano que contiene ambas rectas. (Soluc:  $n=1$ ;  $11x+y-6z+8=0$ )

43. Un plano corta a los ejes X,Y,Z en los puntos  $x=a$ ,  $y=b$ ,  $z=c$  respectivamente. Deducir que su forma general o implícita es:

$$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} + \frac{z}{c} = 1$$

la cual se conoce como *ecuación segmentaria*.

44. (S) Dados los planos de ecuaciones  $3x-y+z=1$  y  $x+y-2z=0$ , hallar un vector cuya dirección sea paralela a ambos. Explicar cómo se ha hecho. (Soluc: cualquier vector proporcional al  $(1,7,4)$ )

45. (S) Se considera el plano de ecuación  $x+3y+z=7$ , y los puntos  $A(1,1,1)$  y  $B(2,1,-1)$ . Se pide ver que A y B están al mismo lado del plano. (Ayuda: calcular los planos paralelos al dado que pasan por A y B respectivamente, y comparar sus términos independientes)

46. (S) Hallar los valores de  $a$  para que los planos  $-x+y+az=0$  y  $ax+2y+2z=0$  corten al plano  $x-y+z=1$  en dos rectas perpendiculares. (Soluc:  $a=6$ )
47. (S) Calcular un punto  $P$  de la recta  $r: x=0, z=0$  de forma que el plano que contiene a  $P$  y a la recta  $s: x+y=1, 2x-z=-1$  sea paralelo a la recta  $t: y+z=1, -x+y+z=0$ . (Soluc:  $P(0,2,0)$ )

### Áreas y volúmenes:

48. (S) Calcular el área del triángulo cuyos vértices son los puntos de intersección del plano  $2x+y+3z-6=0$  con los ejes de coordenadas. (Soluc:  $3\sqrt{14} u^2$ )
49. (S) Un triángulo tiene vértices  $(0,0,0)$ ,  $(1,1,1)$  y el tercer vértice situado en la recta  $x=2y, z=1$ . Calcular las coordenadas del tercer vértice, sabiendo que el área del triángulo es  $\sqrt{2}/2$ . (Soluc: Hay 2 soluc:  $(0,0,1)$  y  $(2,1,1)$ )
50. (S) Hallar un plano que pasando por  $A(0,2,0)$  y  $B(0,0,2)$  corte al eje  $OX$  en un punto  $C$  tal que el área del triángulo  $ABC$  valga 4. (Advertencia: Hay 2 soluciones) (Soluc:  $x/\sqrt{6}+y/2+z/2=1$  y  $x/\sqrt{6}+y/2+z/2=1$ )
51. (S) Determinar un punto de la recta  $x/2=y=z/2$  que forme con los puntos  $(0,0,0)$ ,  $(1,0,0)$  y  $(0,1,-1)$  un tetraedro de volumen 1. (Soluc: Hay 2 soluc:  $(4,2,4)$  y  $(-4,-2,-4)$ )
52. (S) Hallar la ecuación del plano que pasa por el punto  $P(1,2,3)$ , siendo equilátero el triángulo formado por los puntos en que corta a los ejes cartesianos. Calcular el volumen determinado por dicho plano y los ejes coordenados. (Soluc:  $x+y+z=6; 36 u^3$ )

### Problemas de proyecciones:

53. (S) Dado el plano de ecuación  $x+2y+3z=1$  y el punto  $A(1,1,1)$ , hallar las coordenadas del pie de la perpendicular trazada desde  $A$  a ese plano (la proyección ortogonal de  $A$  sobre él). (Soluc:  $A'(9/14, 4/14, -1/14)$ )
54. (S) Calcular el área del triángulo de vértices  $A', B', C'$ , proyección ortogonal del triángulo de vértices  $A(1,1,1)$ ,  $B(1,1,2)$ ,  $C(1,2,1)$ , sobre el plano  $x+y+z=1$ . (Soluc:  $A'(1/3, 1/3, 1/3)$ ,  $B'(0,0,1)$ ,  $C'(0,1,0)$ ; área= $\sqrt{3}/6 u^2$ )
55. (S) Hallar la proyección del punto  $P(2,-1,3)$  sobre la recta  $r: \begin{cases} x=3t \\ y=5t-7 \\ z=2t+2 \end{cases}$  y calcular la distancia del punto  $P$  a la recta  $r$ . (Soluc:  $P'(3,-2,4)$ ; distancia= $\sqrt{3} u$ .)
56. (S) Hallar el punto simétrico de  $(2,0,3)$  respecto de la recta  $r: \frac{x-1}{1} = \frac{y-2}{1} = \frac{z-1}{2}$  (Soluc:  $(1,5,1)$ )
57. (S) Dados los puntos  $A(3,7,-2)$  y  $B(-1,9,1)$ , calcular la longitud del segmento  $A'B'$ , proyección ortogonal del segmento  $AB$  sobre el plano  $x+3y-z-4=0$ . (Soluc:  $A'(1,1,0)$ ,  $B'(-32/11, 36/11, 32/11)$ ; longitud= $\sqrt{318}/11 u$ )
58. (S) Hallar las ecuaciones de la recta  $r'$ , proyección ortogonal de  $r: \begin{cases} x=1+\lambda \\ y=-2+3\lambda \\ z=3 \end{cases}$  sobre el plano  $x-y+2z+4=0$  (Soluc:  $3x-y-2z+1=0, x-y+2z+4=0$ )