TEOREMAS (VALOR MEDIO) FICHA 4

1) Dada la función $f(x) = x^3 - x^2 + 2$, comprueba que cumple las condiciones del teorema del Valor Medio en el intervalo [1 , 4]. Halla el valor de c que determina este teorema.

2) ¿Se puede aplicar el Teorema del valor medio a la función $f(x) = 1 - \sqrt[3]{x^2}$ en el intervalo [0 , 8]? ¿ Y en el intervalo [-4 , 4]?

3) Aplica el Teorema del Valor Medio a la función $f(x) = - x^2 + 6x - 5$ entre $x = 1$ y $x = 4$. Halla el valor c determinado por este teorema.

4) Explica qué teorema debes usar para calcular una recta que sea tangente a la curva $y = \operatorname{sen} x$ en un punto cuya abscisa esté en el intervalo $(0, 2\pi)$ y además sea paralela a la cuerda definida por los puntos (0, 0) y $(\pi/2, 1)$. Calcula la ecuación de esta recta.

5) Dada la parábola $f(x) = 3x^2$, encuentra un punto en que la tangente a la curva en dicho punto sea paralela a la cuerda que une los puntos (0,0) y (4,48).

6) Comprueba que la función $f(x) = |x - 2|$ no cumple las condiciones del Teorema del Valor Medio en el intervalo [0 , 3].

7) Dada la función $f(x) = e^x$, halla las coordenadas del punto de tangencia de una paralela a la cuerda que une los extremos (0 , 1) y (1 , e). Representa la figura.

I.E.S. GONZALO NAZARENO

IES GONZALO NAZARENO

SOLUCIONES

1) f(x) = $x^3 - x^2 + 2$ es continua en [1,4] y derivable en (1,4), ya que es una función polinómica. Aplicamos el Teorema del Valor Medio:

$$\exists c \in (1,4) / \ f'(c) = \frac{f(4)-f(1)}{4-1} \rightarrow f'(c) = 3c^2 - 2c = \frac{50-2}{3} \Rightarrow 3c^2 - 2c - 16 = 0$$

de donde obtenemos $c = \frac{2 \pm \sqrt{196}}{6} = \left\langle \begin{matrix} 3 \\ -2 \end{matrix} \right.$, descartamos –2 porque no pertenece al intervalo (1,4), luego **c = 3**

2) f(x) = 1 - $\sqrt[3]{x^2}$ esta función es continua en [0,8] y derivable en (0,8), luego podemos aplicar en este intervalo el Teorema del Valor Medio, cosa que no podemos hacer en el intervalo [-4,4], ya que f no es derivable en $0 \in (-4,4)$

$$\exists c \in (0,8) / \ f'(c) = \frac{f(8)-f(0)}{8-0} \rightarrow f'(c) = -\frac{2}{3\sqrt[3]{c}} = \frac{-3-1}{8} = -\frac{1}{2}$$

$$3\sqrt[3]{c} = 4 \Rightarrow c = \left(\frac{4}{3}\right)^3 = 2'37 \in (0,8)$$

3) f(x) = - x^2 + 6x –5 esta función es continua en [1,4] y derivable en (1,4), ya que es una función polinómica, entonces, aplicando el TVM:

$$\exists c \in (1,4) / \ f'(c) = \frac{f(4)-f(1)}{4-1} \rightarrow f'(c) = -2c + 6 = \frac{3-0}{3} \Rightarrow -2c + 6 = 1 \Rightarrow c = \frac{5}{2} \in (1,4)$$

4) y = sen x , para hallar el punto en el que la tangente es paralela a la cuerda, tendremos que aplicar el Teorema del Valor Medio

y = sen x es continua y derivable en R $\rightarrow$ continua en $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$, derivable en $\left(0, \frac{\pi}{2}\right)$

$$\exists c \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right) / \ f'(c) = \frac{f\left(\frac{\pi}{2}\right) - f(0)}{\frac{\pi}{2} - 0} \rightarrow f'(c) = \cos c = \frac{1-0}{\frac{\pi}{2}} \Rightarrow \cos c = \frac{2}{\pi} \Rightarrow c = 0'88 \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$$

Recta tangente en $x = c = 0'88 \rightarrow y - f(c) = f'(c)(x-c) \rightarrow y - 0'77 = \frac{2}{\pi}(x - 0'88)$

5) f(x) = $3x^2$ es continua en [0,4] y derivable en (0,4), por ser una función polinómica

$$\exists c \in (0,4) / \ f'(c) = \frac{f(4)-f(0)}{4-0} \rightarrow f'(c) = 6c = \frac{48-0}{4} \Rightarrow 6c = 12 \Rightarrow c = 2 \in (0,4)$$

el punto en el que la tangente es paralela a la cuerda es el punto (2,12)

6) f(x) = $|x-2|$ esta función es continua en R, pero no es derivable en x = 2, ya que:

$f(x)=\begin{cases} -x+2 & si\ x-2<0 \\ x-2 & si\ x-2\geq 0 \end{cases} \rightarrow f(x)=\begin{cases} -x+2 & si\ x<2 \\ x-2 & si\ x\geq 2 \end{cases} \rightarrow f'(x)=\begin{cases} -1 & si\ x<2 \\ 1 & si\ x>2 \end{cases}$

$f'(2^-)=-1\neq f'(2^+)=1$ no es derivable en $2\in(0,3)$

7) f(x) = e^x es continua y derivable en R (exponencial), es decir, cumple las hipótesis del TVM en el intervalo dado: f es continua en [0,1] y derivable en (0,1)

$\exists c\in(0,1)/\ f'(c)=\frac{f(1)-f(0)}{1-0}\rightarrow f'(c)=e^c=\frac{e-1}{1}\Rightarrow e^c=e-1\Rightarrow$ para resolver esta ecuación aplicamos logaritmos: $\ln e^c=\ln(e-1)\Rightarrow c=\ln(e-1)\in(0,1)$

en ese punto c = ln(e-1), la tangente es paralela a la cuerda

IES GONZALO NAZARENO