UNIDAD 4: INTEGRAL DEFINIDA

ÍNDICE DE LA UNIDAD

1.- INTRODUCCIÓN.

*Como ya vimos en la unidad anterior, el **Cálculo Integral** ha sido desarrollado a lo largo de la historia de las matemáticas a partir del problema de calcular áreas encerradas bajo curvas. Científicos tan importantes como Arquímedes, Kepler o Newton dedicaron gran parte de sus estudios a resolver este problema.*

*La idea de sumar infinitos trozos de áreas de figuras sencillas (normalmente rectángulos) para "rellenar" figuras de lados curvos, ha sido la clave durante los siglos para resolver el problema. Esta idea es el fundamento de la **Integral Definida,** cuyo desarrollo formal y riguroso se debe, sobre todo al trabajo de **Riemann** y es la base de los contenidos que abordaremos durante esta unidad.*

2.- SUMAS SUPERIORES E INFERIORES

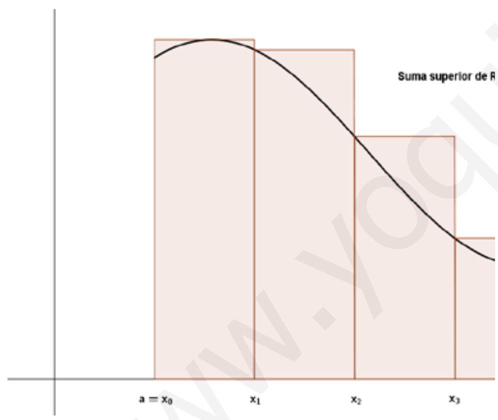
Definición 1: Sea $[a,b]$ un intervalo en $\mathbb{R}$. Se llama **partición** de dicho intervalo a todo conjunto $P[a,b]=\{x_0, x_1, x_2, ...x_n\}$ de puntos tales que $a = x_0 < x_1 < x_2 < ...... < x_n = b$, es decir a todo conjunto de puntos ordenados de menor a mayor tales que el primero es a y el último b. Llamamos **diámentro** de una partición a la mayor de las distancias entre los puntos de la partición, es decir, al máximo de las diferencias $x_1 - x_0$, $x_2 - x_1$, ..., $x_n - x_{n-1}$. Diremos que una partición $P[a,b]$ de un intervalo es **más fina** que otra $Q[a,b]$ si está contenida en la primera, es decir si $Q[a,b] \subset P[a,b]$. Decimos que una **partición es regular** si divide al intervalo en partes iguales. Designaremos por $P_n[a,b]=\{x_0, x_1, x_2, ...x_n\}$ a dichas particiones en las que el diámetro es $\dfrac{b-a}{n}$

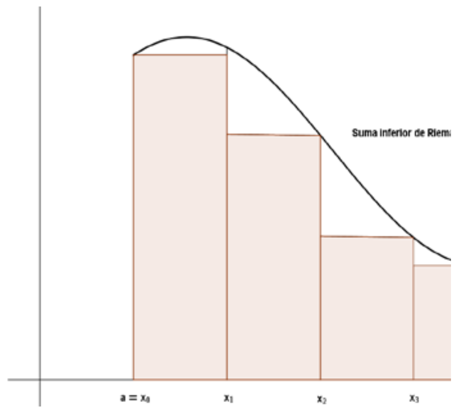
Nota 1: Obsérvese que para obtener particiones cada vez más finas de un intervalo, basta tomar nuevos puntos en la de partida, así, por ejemplo, si $P[1,5]=\{1,3,5\}$, podemos obtener $Q[1,5]=\{1,2,3,5\}$ que es más fina que la anterior y $R[1,5]=\{1,2,3,4,5\}$. Es evidente ver también que los diámetros de las mismas van bajando paulatinamente y si se sigue indefinidamente, su diámetro tenderá a 0.

En lo que sigue de unidad ***nos centraremos en el caso de funciones continuas o continuas a trozos*** *para facilitar las definiciones y cálculos ya que el desarrollo general de la integral definida se escapa de los objetivos del curso. No obstante, hemos de insistir en que se puede desarrollar, con no demasiada dificultad, el caso general*

Definición 2: Sea $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ una función continua y sea $P[a,b]=\{x_0,x_1,x_2,.......x_n\}$ una partición del intervalo. Llamamos:

- **Suma superior de Riemann** de la función f para la partición $P[a,b]$ a la suma: $S(f,P)=\sum_{i=1}^{n} M_i(x_i-x_{i-1})=M_1(x_1-x_0)+M_2(x_2-x_1)+......+M_n(x_n-x_{n-1})$, siendo cada M_i el máximo de la función f en cada intervalo $[x_{i-1},x_i]$
- **Suma inferior de Riemann** de la función f para la partición $P[a,b]$ a la suma: $s(f,P)=\sum_{i=1}^{n} m_i(x_i-x_{i-1})=m_1(x_1-x_0)+m_2(x_2-x_1)+......+m_n(x_n-x_{n-1})$, siendo cada m_i el mínimo de la función f en cada intervalo $[x_{i-1},x_i]$





Nota 2: A la vista gráfica son evidentes las siguientes apreciaciones:

- Para cada partición $P[a,b]$, se cumple que $s(f,P)\le S(f,P)$, es decir, en cada partición, la suma inferior es menor que la superior.
- Si $Q[a,b]$ es una partición más fina que $P[a,b]$, se cumple que $s(f,P)\le s(f,Q)\le S(f,Q)\le S(f,P)$, es decir, cuanto más fina es una partición, más próximas están entre sí las sumas inferior y superior.
- Parece lógico pensar que tomando particiones cada vez más finas, las sumas inferiores y superiores se acercan entre sí a un valor común que, en el caso de funciones positivas, parece ser el área encerrada entre la curva y el eje de abscisas.

3.- LA INTEGRAL DEFINIDA

Definición 3: Sea $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ una función continua. Entonces llamamos **integral definida** de f en el intervalo $[a,b]$ al número $\int_a^b f(x)dx = \underset{n\to\infty}{Lím}\, s(f,P_n) = \underset{n\to\infty}{Lím}\, S(f,P_n)$.

Nota 3: Es evidente que si $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ es una función continua en $[a,b]$, el área encerrada entre la curva y el eje de abscisas coincide con el valor de la integral $\int_a^b f(x)dx$.

4.- PROPIEDADES DE LA INTEGRAL DEFINIDA

Proposición 1: **(Propiedades de la integral definida)** Sean $f,g:[a,b]\to\mathbb{R}$ funciones continuas. Entonces se cumple:

a) $\int_a^b \left(f(x)\pm g(x)\right)dx = \int_a^b f(x)dx \pm \int_a^b g(x)dx$

b) $\int_a^b \lambda f(x)dx = \lambda\int_a^b f(x)dx$

c) Si $a\le c\le b$, entonces, $\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx$

d) $\int_a^a f(x)dx = 0$

e) $\int_a^b f(x)dx = -\int_b^a f(x)dx$

f) Si $f(x)>0 \;\; en \;\; [a,b] \to \int_a^b f(x)dx > 0$

g) Si $f(x)<0 \;\; en \;\; [a,b] \to \int_a^b f(x)dx < 0$

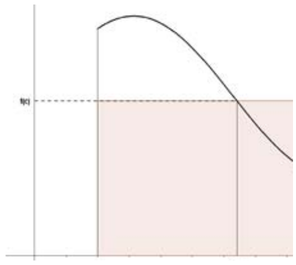
h) Si $f(x)\le g(x) \;\; en \;\; [a,b] \to \int_a^b f(x)dx \le \int_a^b g(x)dx$

i) $\left|\int_a^b f(x)dx\right| \le \int_a^b \left|f(x)\right|dx$

j) Si f es continua en $[-a,a]$ y par, entonces: $\int_{-a}^a f(x)dx = 2\int_0^a f(x)dx$

k) Si f es continua en $[-a,a]$ e impar, entonces: $\int_{-a}^a f(x)dx = 0$

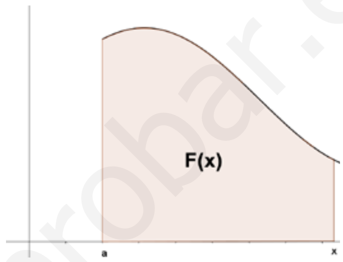
Estas dos últimas propiedades nos van a facilitar el cálculo de integrales de funciones simétricas, que aparecen mucho, y relacionar la integral definida y el área.



<u>Proposición 2:</u> (Teorema del valor medio integral) Sea $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ una función continua. Entonces existe un punto $c\in[a,b]$ que cumple que $\int_a^b f(x)dx = f(c)(b-a)$. Gráficamente esto significa que existe un punto intermedio que cumple que el rectángulo de base $b-a$ y altura $f(c)$ tiene igual área a la encerrada por la curva.

5.- TEOREMA FUNDAMENTAL DEL CÁLCULO INTEGRAL

<u>Definición 4:</u> Sea $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ una función continua. Entonces llamamos **función integral** de f en el intervalo $[a,b]$ a la función $F:[a,b]\to\mathbb{R}$ definida por $F(x)=\int_a^x f(t)dt$.



<u>Nota 4:</u> Cuando la función f es positiva, gráficamente el valor de $F(x)$ en cada punto x coincide con el área bajo la curva $y=f(x)$ entre a y x. Por eso también se le conoce con el nombre de **función** área.

<u>Proposición 3:</u> (Teorema fundamental del cálculo integral) Sea $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ una función continua. Entonces, la función integral $F(x)=\int_a^x f(t)dt$ es derivable en (a,b) y se cumple que $F'(x)=f(x)\ \forall x\in(a,b)$.

<u>Nota 5:</u> Como consecuencia del teorema anterior tenemos que si f es continua y g es una función derivable, entonces, la función $F(x)=\int_a^{g(x)} f(t)dt$ es derivable y $F'(x)=f(g(x))g'(x)\quad \forall x\in(a,b)$

Incluso se puede extender a que si g y h son derivables, entonces $F(x)=\int_{h(x)}^{g(x)} f(t)dt$ es derivable y $F'(x)=f(g(x))g'(x)-f(h(x))h'(x)\quad \forall x\in(a,b)$

<u>Proposición 4:</u> (Regla de Barrow) Sea $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ una función continua y sea $G:[a,b]\to\mathbb{R}$ una primitiva de f. Entonces, $\boxed{\int_a^b f(x)dx = G(b)-G(a)}$

<u>Proposición 5:</u> (Teorema de cambio de variable) Sea $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ una función continua y sea $x=g(t)$ un cambio de variable siendo g y g' continuas en $[c,d]$. Entonces,

$$\int_a^b f(x)dx = \int_c^d f(g(t))g'(t)dt \quad \text{siendo} \quad \begin{cases} g(c)=a \\ g(d)=b \end{cases}$$

Es importante observar que con la regla de Barrow aparece la primera relación directa entre la integral definida y la indefinida y, por lo tanto, la relación entre al cálculo *diferencial y el cálculo integral. Esta regla supone, sin lugar a dudas, la herramienta más efectiva para el cálculo de integrales definidas.*

Ejemplo 1: Hallemos la derivada de la función $F(x)=\int_0^x \ln\left(t^2+4\right)dt$ definida en $\left[0,+\infty\right)$.

Es evidente que la función del integrando es continua por ser composición de funciones continuas (polinomio y logaritmo). Así pues, aplicando el teorema fundamental del cálculo integral, tendremos que F es derivable y que $F'(x)=f(x)=\ln\left(x^2+4\right)$ en $\left(0,+\infty\right)$.

Ejemplo 2: Hallemos el valor de algunas integrales definidas:

a) $\int_0^{\pi/2}\cos x\,dx=\left[\operatorname{sen}x\right]_0^{\pi/2}=\operatorname{sen}\frac{\pi}{2}-\operatorname{sen}0=1-0=1$

b) $\int_1^3 \frac{1}{x}dx=\left[\ln x\right]_1^3=\ln 3-\ln 1=\ln 3$

c) $\int_0^5 f(x)dx$ siedo $f(x)=\begin{cases}-x^2+1 & si\ \ x<2\\ 2x-3 & si\ \ x\geq 2\end{cases}$.

Es evidente que f no es continua en $\left[0,5\right]$, pero sí lo es a trozos. Por tanto, utilizando la propiedad de la integral (proposición 1c), calculamos dichas integrales por separado:

$$\int_0^5 f(x)dx=\int_0^2\left(-x^2+1\right)dx+\int_2^5\left(2x-3\right)dx=\left[\frac{-x^3}{3}+x\right]_0^2+\left[x^2-3x\right]_2^5=(\frac{-8}{3}+2)-(-0+0)+$$

$$+(25-15)-\left(4-6\right)=\frac{34}{3}$$

d) Calculemos el valor de la integral $\int_1^2\frac{\ln^2 x}{x}dx$ de dos formas distintas.

- La manera más fácil y la que usaremos es hallar la integral indefinida primero:

$$\int\frac{\ln^2 x}{x}dx=\left\|\begin{matrix}t=\ln x\\ dt=\dfrac{dx}{x}\end{matrix}\right\|=\int t^2dt=\frac{t^3}{3}+C=\frac{\ln^3 x}{3}+C\to\int_1^2\frac{\ln^2 x}{x}dx=\left[\frac{\ln^3}{3}\right]_1^2=\frac{\ln^3 2-\ln^3 1}{3}=\frac{\ln^3 2}{3}$$

- La otra forma es utilizando el teorema de cambio de variable para integrales definidas:

$$\int_1^2\frac{\ln^2 x}{x}dx=\left\|\begin{matrix}t=\ln x\\ dt=\dfrac{dx}{x}\end{matrix}\right\|=\int_{\ln 1}^{\ln 2}t^2dt=\int_0^{\ln 2}t^2dt=\left[\frac{t^3}{3}\right]_0^{\ln 2}=\frac{\ln^3 2-0}{3}=\frac{\ln^3 2}{3}$$

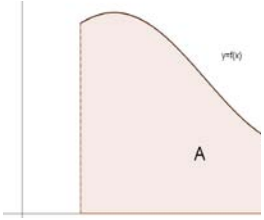
Se proponen las **actividades 1, 2 y 3.**

6.- APLICACIONES DE LA INTEGRAL DEFINIDA

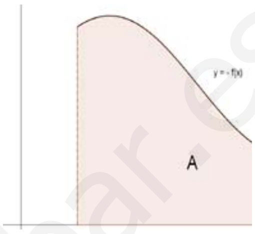
Las aplicaciones de la integral definida en la matemática moderna son múltiples y de enorme utilidad, no solo en la Matemática, sino en la Física, la Química, la Ingeniería y las Ciencias en general. Centrándonos en las Matemáticas, las más importantes son el cálculo de áreas, volúmenes y longitudes de curvas. En este curso, únicamente abordaremos el cálculo de áreas entre curvas, dejando el resto para estudios posteriores.

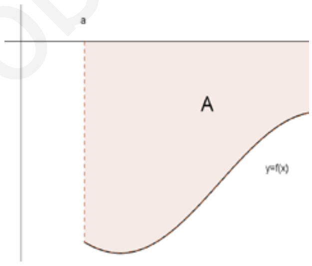
Aunque finalmente lo abordaremos de forma conjunta en un solo caso, para empezar a entender lo que vamos a ver en este punto, distinguiremos dos casos:

- **<u>Caso 1</u>: Área encerrada entre una curva y el eje de abscisas.**



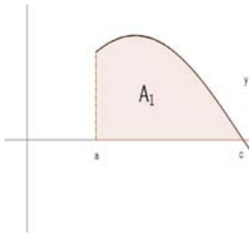
- Es evidente, después de lo visto en los puntos 2 y 3 que en el caso de una **función positiva**, podemos decir que el área bajo esta curva coincide con el valor de la integral, es decir, $A=\int_a^b f(x)dx$, como podemos observar en la siguiente gráfica.

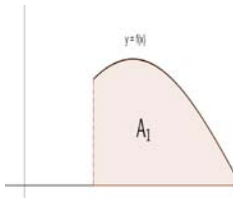




- Si se trata de una función negativa, es obvio que el área no puede ser la integral (ya que sería un área negativa), pero es sencillo observar que el área coincide con la integral de la función opuesta aplicando una simetría de eje OX, es decir, $A=\int_a^b -f(x)dx=-\int_a^b f(x)dx$, ya que las simetrías conservan las áreas.

  Como podemos observar en los gráficos de la derecha, las áreas son idénticas.





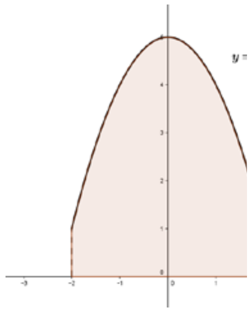
- Por último, si es una **función que corta al eje de abscisas**, se trata de una combinación de las dos situaciones anteriores.

  Por tanto, basta calcular por separado las dos áreas a ambos lados del punto de corte con el eje OX y sumarlas.

  Esto es, $A=A_1+A_2=\int_a^c f(x)dx+\int_c^b -f(x)dx$

  Como podemos observar en los gráficos de la derecha, las áreas son idénticas.

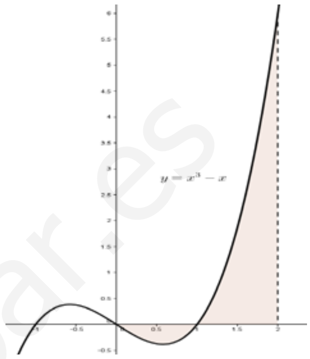
Es evidente que las tres situaciones se pueden resumir en una que las engloba a todas, podemos decir que **el área encerrada entra una curva y el eje de abscisas es la integral del valor absoluto de la función.** $\boxed{A=\int_a^b |f(x)|dx}$. Además, en la práctica, siempre trabajaremos con funciones con signo constante a trozos, ya que cuando corten al eje OX, separaremos en dos integrales. Así pues, utilizando las propiedades de la integral (proposición 1 f y g) podemos integrar y luego tomar valor absoluto, ya que si el signo de f no varía en un intervalo $[a,b]$, se verifica que $\int_a^b |f(x)|dx=\left|\int_a^b f(x)dx\right|$. Veamos esto de forma más clara con algunos ejemplos:



Ejemplo 3: Hallemos el área entre la curva $y=-x^2+3$ y el eje de abscisas en el intervalo $[-2,2]$.

Lo primero que hemos de hacer es un pequeño estudio gráfico. Es evidente que se trata de una función positiva, por lo tanto el área pedida es la integral definida en el intervalo:

$$A=\int_{-2}^{2}\left(-x^2+5\right)dx\overset{par}{=}2\int_{0}^{2}\left(-x^2+5\right)dx=2\left[\frac{-x^3}{3}+5x\right]_0^2=2\left(\frac{-8}{3}+10\right)=\frac{44}{3}u^2$$



Ejemplo 4: Hallemos ahora la de la curva $y=x^3-x$ entre $x=0$ y $x=2$.

Vemos sus raíces, que fácilmente son $x=-1$, $x=0$ y $x=1$ y hacemos un esbozo de su gráfica entre 0 y 2.

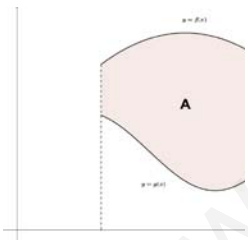
$$A=\int_0^2\left|x^3-x\right|dx=\int_0^1\left(-x^3+x\right)dx+\int_1^2\left(x^3-x\right)dx=$$

$$=\left[\frac{-x^4}{4}+\frac{x^2}{2}\right]_0^1+\left[\frac{x^4}{4}-\frac{x^2}{2}\right]_1^2=\frac{-1}{4}+\frac{1}{2}+\frac{16}{4}-\frac{4}{2}-\frac{1}{4}+\frac{1}{2}=\frac{5}{2}u^2$$

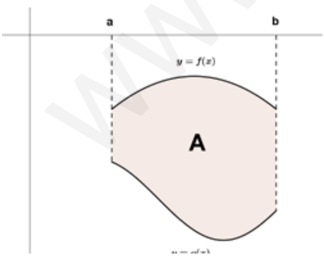
- **Caso 2: Área encerrada entre dos curvas.**

- Si se trata de dos funciones f y g tales que $f(x)\geq g(x)\ \forall x\in[a,b]$, el área encerrada entre las curvas en dicho intervalo es siempre $\boxed{A=\int_a^b\left(f(x)-g(x)\right)dx}$ independientemente del signo de cada una y de los cortes con los ejes, si los hay.

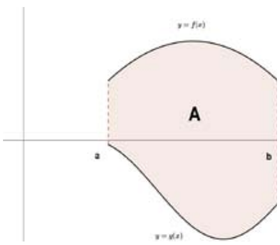
  Veamos esta conclusión en distintos casos:



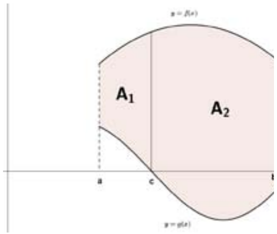
$$\boxed{A=\int_a^b f(x)dx-\int_a^b g(x)dx=\int_a^b (f(x)-g(x))dx}$$



$$\boxed{A=\int_a^b -g(x)dx-\int_a^b -f(x)dx=\int_a^b (f(x)-g(x))dx}$$



$$\boxed{A=\int_a^b f(x)dx+\int_a^b -g(x)dx=\int_a^b (f(x)-g(x))dx}$$

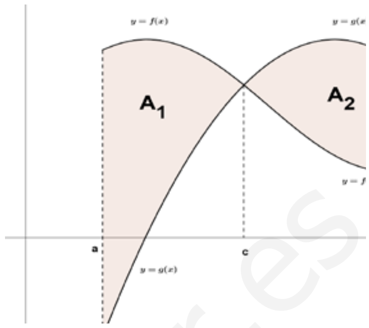


$$A = A_1 + A_2 = \int_a^c (f(x) - g(x))dx + \int_c^b (f(x) - g(x))dx =$$
$$= \int_a^b (f(x) - g(x))dx$$

- Si se trata de dos funciones f y g tales que se cortan el algún punto, simplemente tenemos que hallar dichos puntos de corte y separar en dos integrales como las del caso anterior y sumar las áreas.

  Esto es:

  $$A = A_1 + A_2 = \int_a^c (f(x) - g(x))dx + \int_c^b (g(x) - f(x))dx$$

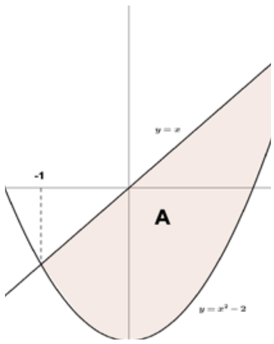


<u>Nota 6:</u> Es evidente que el eje de abscisas puede ser considerado también una función, de hecho es la función $y = 0$. Así pues, podemos decir, que **en todos los casos, el área entre dos curvas se obtiene hallando en cada intervalo, el valor de la integral de la resta de la que está por encima menos la que está por debajo. También se pueden restar sin tener en cuenta cuál está por encima y cuál por debajo y tomar el valor absoluto de cada integral.** Si no hay dos curvas, sino una sola y el eje de abscisas, consideramos el eje de abscisas como la segunda función, que es $y = 0$, como hemos dicho antes.

<u>Ejemplo 5:</u> Hallemos el área entre las curvas $y = x^2 - 2$ y la bisectriz del primer y tercer cuadrante.

Lo primero que hemos de hacer es calcular los puntos de corte de las dos gráficas que vienen dados por el sistema: $\begin{cases} y = x^2 - 2 \\ y = x \end{cases}$ y cuyas soluciones son: $x = -1$ y $x = 2$. Un simple esbozo de ambas gráficas nos indica que la recta está por encima. Así pues, el área pedida viene dada por:

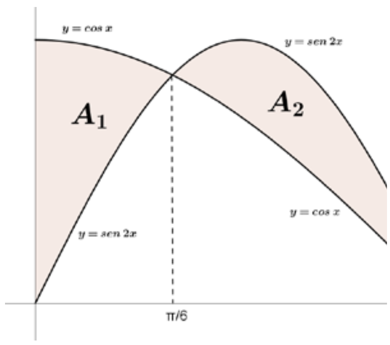
$$A = \int_{-1}^{2} \left(x - x^2 + 2\right)dx = \left[\frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3} + 2x\right]_{-1}^{2} = 2 - \frac{8}{3} + 4 - \frac{1}{2} - \frac{1}{3} + 2 = \frac{9}{2}$$



<u>Ejemplo 6:</u> Hallemos ahora el área limitada por las curvas $y = \operatorname{sen} 2x$ e $y = \cos x$ en el intervalo $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$.

Lo primero que hemos de hacer es ver los puntos de corte e intentar hacer un esbozo gráfico lo más aproximado posible.

Para hallar los puntos de corte, resolvemos el sistema:



$$\begin{cases} y=\operatorname{sen}2x \\ y=\cos x \end{cases} \rightarrow \operatorname{sen}2x=\cos x \rightarrow 2\operatorname{sen}x\cos x=\cos x \rightarrow 2\operatorname{sen}x\cos x-\cos x=0 \rightarrow \cos x\left(2\operatorname{sen}x-1\right)=0$$

$$\rightarrow \begin{cases} \cos x=0 \rightarrow x=\dfrac{\pi}{2} \\ 2\operatorname{sen}x-1=0 \rightarrow \operatorname{sen}x=\dfrac{1}{2} \rightarrow x=\dfrac{\pi}{6} \end{cases}$$

Así pues, el área pedida es $A=\int_0^{\pi/6}\left(\cos x-\operatorname{sen}2x\right)dx+\int_{\pi/6}^{\pi/2}\left(\operatorname{sen}2x-\cos x\right)dx \overset{Fácil}{=} \frac{1}{4}+\frac{1}{4}=\frac{1}{2}u^2$

Se proponen las **actividades 4, 5, 6, 7, 8 y 9.**

7.- ACTIVIDADES

ACTIVIDADES INTERCALADAS EN LA TEORÍA

Actividad 1: Calcula las siguientes integrales:

a) $\int_{-1}^{4}(x^2+x-2)dx$ b) $\int_1^4 \frac{x-1}{\sqrt{x}}dx$ c) $\int_{1/e}^{e} 2\ln x\, dx$ d) $\int_{-\sqrt{3}}^{\sqrt{3}} \frac{x^2}{x^2+1}dx$

e) $\int_0^{\pi/4} \operatorname{sen}x\cos x\, dx$ f) $\int_0^2 \frac{x}{\sqrt{x^2+1}}dx$ g) $\int_0^{2\pi} \operatorname{sen}x\, dx$ h) $\int_0^2\left(\frac{1}{x+1}-3\cos\left(2\pi x\right)\right)dx$

Actividad 2: Halla la derivada de las siguientes funciones:

a) $F\left(x\right)=\int_5^x \sqrt{e^t+1}\, dt$ b) $G\left(x\right)=\int_1^{x^2}\left(t^2-1\right)dt$

Actividad 3: Dada la función $f\left(x\right)=\begin{cases} -x^2 & si \;\; x<0 \\ x^2 & si \;\; 0\le x\le 3 \\ 6x & si \;\; x>3 \end{cases}$, calcula la integral $\int_{-3}^{3} f\left(x\right)dx$

Actividad 4: Calcula el área que determina la curva $y=x^2+x-2$ con el eje de abscisas entre los valores -1 y 4.

Actividad 5: Halla el área de la región del plano encerrada por la curva $y=\ln x$ entre el punto de corte con el eje OX y el punto de abscisa $x=e$.

Actividad 6: Halla el área limitada por las parábolas $y=\dfrac{x^2}{2}$ e $y^2=2x$.

Actividad 7: Calcula el área del recinto limitado por la parábola $y=x^2-1$, la recta $y=5-x$ y el eje OX.

Actividad 8: Calcula el área del recinto plano limitado por las rectas $y=x$, $y=2x$ y la parábola $y=x^2$.

Actividad 9: Dos hermanas heredan una parcela que han de repartirse en partes iguales. La parcela es la región plana encerrada entre la parábola $y = x^2$ y la recta $y = 1$. Deciden dividir la parcela mediante una recta horizontal. Halla el valor de a.

ACTIVIDADES DE DESARROLLO

Actividad 10: Calcula las siguientes integrales definidas:

a) $\int_0^1 x\sqrt{x^2+1}\,dx$ b) $\int_0^{\pi} e^x \cos x\,dx$ c) $\int_0^1 \frac{3}{x^2+1}dx$ d) $\int_2^3 \frac{dx}{x(x-1)}$ e) $\int_0^{\pi} \operatorname{sen} x \cos x\,dx$

Actividad 11: Razona cuál de las dos integrales siguientes es mayor sin calcularlas: $\int_0^1 e^{-x}dx$ y $\int_0^1 e^{-x^2}dx$

Actividad 12: Determina los extremos relativos de la función $f(x) = \int_0^x (t^2 - t)dt$

Actividad 13: Sabemos que $\int_0^x f(t)dt = x^2(1+x)$, siendo continua en $\mathbb{R}$. Determina razonadamente el valor de $f(2)$.

Actividad 14: En el intervalo $[-4,4]$ se define la función $F(x) = \int_0^x \sqrt{16-t^2}\,dt$

a) ¿Cuánto vale $F'(2)$? b) ¿Cuánto vale $F(4)$?

Actividad 15: Dada parábola $f(x) = x^2$, halla el punto $c \in [0,2]$ tal que el área que encierra la parábola con el eje OX en el intervalo $[0,2]$ sea igual a la de un rectángulo de base 2 y altura $f(c)$. ¿Qué teorema asegura la existencia de c?

Actividad 16: Dada la función $f(x) = |x+2| \cdot |x-2|$, calcula $\int_0^3 2f(x)dx$

Actividad 17: Calcula el área de la región limitada por la curva $y = \frac{x}{x^2-2}$ y las rectas $x = 2$, $x = 3$ e $y = 0$

Actividad 18: Calcula el área del recinto limitado por las curvas de ecuaciones: $x = y^2$, $x + 2y = 3$, $y = 0$, $x = 2$

Actividad 19: Calcula el área de la región del plano comprendida entre las parábolas: $y = x^2 - 6x + 5$, $y = 5 + 6x - x^2$.

Actividad 20: Halla el área limitada por la curva $y = x^3 + 1$ y la recta $y = \frac{5}{4}x + 1$.

Actividad 21: Halla el área limitada por las curvas $y = \operatorname{sen} x$ e $y = \operatorname{sen} 2x$ entre el origen de coordenadas y el siguiente punto de corte entre ambas.

Actividad 22: Halla el área limitada por la curva $y = x^3$ y la bisectriz del primer y tercer cuadrante.

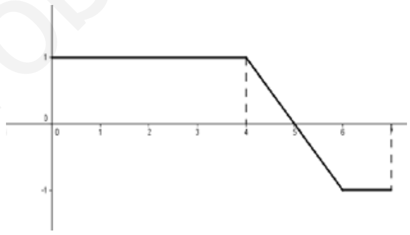
Actividad 23: Halla el área limitada por las curvas $y = x^2$ e $y = \dfrac{2}{1+x^2}$.

Actividad 24: Determina el área de la superficie limitada por el eje OX y las curvas de ecuaciones $y = \ln x$ e $y = \dfrac{x}{e}$

Actividad 25: Calcula el área del recinto limitado por las gráficas de las funciones $f(x) = x^2$ y $g(x) = x^3 - 2x$.

Actividad 26: La siguiente gráfica representa la función $f : [0,7] \to \mathbb{R}$.

Sea $F : [0,7] \to \mathbb{R}$ la función definida por $F(x) = \int_0^x f(t)\,dt$



a) Calcula $F(4)$ y $F(7)$

b) Dibuja la gráfica de F.

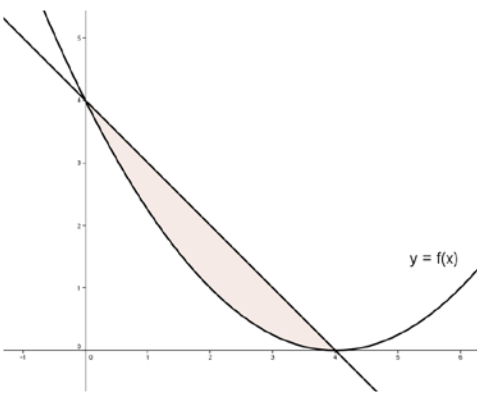
Actividad 27: De una función integrable $f : [-1,1] \to \mathbb{R}$ se sabe que para cada valor de x, se verifica $|f(x)| \le 1 + x^2$. De los números: -3 , -2 , -1 , 2.5 y 2.75, ¿cuáles pueden ser el valor de la integral $\int_{-1}^{1} f(x)\,dx$

Actividad 28: De las funciones continuas $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ se sabe:

$$\int_1^2 \big(f(x) + g(x)\big)dx = 3 \quad , \quad \int_2^3 3\big(f(x) - g(x)\big)dx = 3 \quad , \quad \int_1^3 f(x)\,dx = 3 \quad , \quad \int_1^2 2f(x)\,dx = 3$$

Calcula, si es posible, $\int_1^3 g(x)\,dx$, y, si no es posible, di por qué.

Actividad 29: La gráfica de la función f adjunta corresponde a una función cuadrática.



a) Determina la expresión algebraica de f.

b) Calcula el área de la región sombreada.

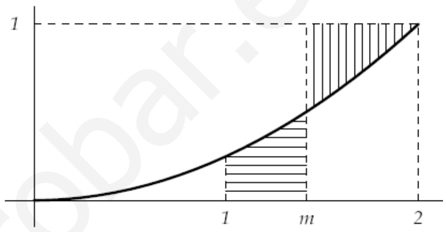
ACTIVIDADES DE SELECTIVIDAD

Actividad 30: (2003) Sea $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ la función definida por $f(x)=e^{x/3}$.

a) ¿En qué punto de la gráfica de *f* la recta tangente a ésta pasa por el origen de coordenadas? Halla la ecuación de dicha recta tangente.
b) Calcula el área del recinto acotado que está limitado por la gráfica de *f*, la recta tangente y el eje de ordenadas.

Actividad 31: (2003) Se sabe que la función $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ definida por $f(x)=ax^2+bx^2+c$ tiene máximo absoluto en el punto de abscisa $x=1$, que su gráfica pasa por el punto $(1,4)$ y que $\int_{-1}^{3}f(x)dx=\frac{32}{2}$. Halla a, b y c.

Actividad 32: (2003) En la figura adjunta puedes ver representada en el intervalo $[0,2]$ la gráfica de la parábola de ecuación $y=x^2/4$. Halla el valor de m para el que las áreas de las superficies rayadas son iguales.



Actividad 33: (2003) Sea $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ la función definida por $f(x)=x^2-2x+2$

a) Halla la ecuación de la recta tangente a la gráfica de *f* en el punto de abscisa $x=3$.
b) Calcula el área del recinto limitado por la gráfica de *f*, la recta tangente obtenida y el eje OY.

Actividad 34: (2003) Se sabe que la función $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ definida por $f(x)=x^3+ax^2+bx+c$ tiene un extremo relativo en el punto de abscisa $x=0$ y que su gráfica tiene un punto de inflexión en el punto de abscisa $x=1$. Conociendo además que $\int_{0}^{1}f(x)dx=6$, halla a, b y c.

Actividad 35: (2003) Dadas la parábola de ecuación $y=1+x^2$ y la recta de ecuación $y=1+x$, se pide:

a) Área de la región limitada por la recta y la parábola.
b) Ecuación de la recta paralela a la dada que es tangente a la parábola.

Actividad 36: (2003) Determina el valor positivo de λ, para el que el área del recinto limitado por la parábola $y=x^2$ y la recta $y=\lambda x$ sea 1.

Actividad 37: (2003) Sea $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ la función definida por $f(x)=\sqrt[3]{x}$.

a) Calcula la recta tangente a la gráfica de f en el punto abscisa $x=1$.
b) Esboza el recinto limitado por la gráfica de f y la recta tangente obtenida.
c) Calcula el área del recinto del apartado anterior.

Actividad 38: (2003) Sea la función $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ definida por $f(x)=2x^3-6x+4$. Calcula el área del recinto limitado por la gráfica de *f* y su recta tangente en el punto de abscisa correspondiente al máximo relativo de la función.

Actividad 39: (2003) Considera las funciones $f,g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ definidas por $f(x)=6-x^2$ y $g(x)=|x|$.

a) Dibuja el recinto acotado que está limitado por las gráficas de *f* y *g*.
b) Calcula el área del recinto descrito en el apartado anterior.

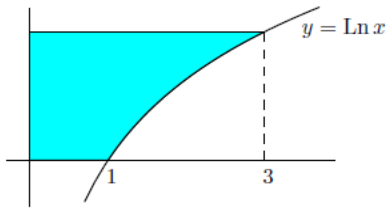
Actividad 40: (2004) Considera la función $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ definidas por $f(x)=x|x|$.

a) Dibuja la región acotada del plano que está limitada por la gráfica de *f* y la bisectriz del primer y tercer cuadrante.
b) Calcula el área de la región descrita en el apartado anterior.

Actividad 41: (2004) Considera la función $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ definidas por $f(x)=e^x+4e^{-x}$.

a) Determina los intervalos de crecimiento y de decrecimiento de *f* y halla sus extremos absolutos o globales (puntos en los que se obtienen y valores que alcanza la función).
b) Calcula el área del recinto limitado por la gráfica de f, el eje de abscisas y las rectas $x=0$ *y* $x=2$.

Actividad 42: (2004) Siendo Ln x el logaritmo neperiano de x, halla el área de la superficie sombreada.



Actividad 43: (2004) Calcula el área del recinto acotado que está limitado por la recta $y=2x$ y por las curvas $y=x^2$ e $y=\dfrac{x^2}{2}$.

Actividad 44: (2004) Calcula $\displaystyle\int_{-2}^{0}\frac{1}{x^2+2x+2}dx$

Actividad 45: (2004) Considera la integral definida $I=\displaystyle\int_1^9\frac{1}{1+\sqrt{x}}dx$.

a) Expresa la anterior integral definida aplicando el cambio de variables $1+\sqrt{x}=t$.
b) Calcula *I*.

Actividad 46: (2004) Sea $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ la función definida por $f(x)=-\dfrac{1}{3}x^2+\dfrac{2}{3}x+1$.

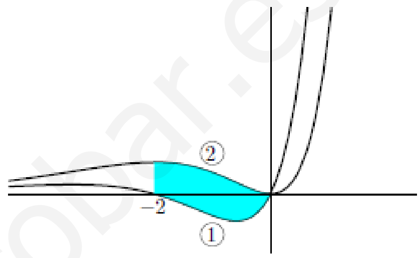
a) Halla la ecuación de la recta tangente a la gráfica de f en un punto de la misma de ordenada $y=1$, teniendo en cuenta que dicha recta tangente tiene pendiente negativa.
b) Calcula el área de la región del plano limitada por la gráfica de f, la recta tangente obtenida y el eje de ordenadas.

Actividad 47: (2004) Considera las funciones $f:(0,+\infty)\to\mathbb{R}$ y $g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ definidas, respectivamente, por $f(x)=\text{Ln}\,x$ y $g(x)=1-2^x$, siendo Ln x el logaritmo neperiano de x. Calcula el área del recinto limitado por las rectas $x=1$ *y* $x=2$ y las gráficas de f y g.

Actividad 48: (2004) Determina b sabiendo que $b>0$ y que el área del recinto limitado por la parábola de ecuación $y=\left(\frac{1}{3}x-b\right)^2$ y los ejes coordenados es igual a 8.

Actividad 49: (2004) Determina b sabiendo que $b>0$ y que el área de la región limitada por la curva $y=x^2$ y la recta $y=bx$ es igual a $9/2$.

Actividad 50: (2005) Se sabe que las dos gráficas del dibujo corresponden a la función $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ definida por $f(x)=x^2e^x$ y a su función derivada f´.



a) Indica, razonando la respuesta, cuál es la gráfica de f y cuál la de f´.
b) Calcula el área de la región sombreada.

Actividad 51: (2005) Considera la función $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ definidas por $f(x)=e^{-x/2}$.

a) Halla la ecuación de la recta tangente a la gráfica de f en el punto de abscisa $x=0$.
b) Calcula el área de la región acotada que está limitada por la gráfica de f, la recta de ecuación $x=2$ y la recta tangente obtenida en a).

Actividad 52: (2005) Se sabe que la función $f:[0,+\infty)\to\mathbb{R}$ definida por

$$f(x)=\begin{cases}\sqrt{ax} & si \quad 0\le x\le 8\\ \dfrac{x^2-32}{x-4} & si \quad 8<x\end{cases}$$, es continua en $[0,+\infty)$

a) Halla el valor de a.
b) Calcula $\int_0^{10} f(x)\,dx$

Actividad 53: (2005) Sea $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ la función definida por $f(x)=\begin{cases}2x+4 & si \quad x\le 0\\ (x-2)^2 & si \quad x>0\end{cases}$

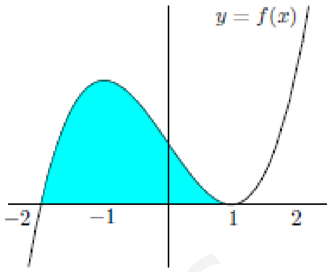
a) Calcula los puntos de corte de la gráfica de f con el eje de abscisas y esboza dicha gráfica.
b) Halla el área de la región acotada que está limitada por la gráfica de f y por el eje de abscisas.

Actividad 54: (2005) Calcula $\int_{-1}^{0}\text{Ln}(2+x)\,dx$, siendo Ln el logaritmo neperiano.

Actividad 55: (2005) Considera la función $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ definidas por $f(x)=x^2-5x+4$.

a) Halla la ecuación de la recta tangente a la gráfica de *f* en el punto de abscisa $x=3$.
b) Calcula el área de la región acotada que está limitada por el eje de ordenadas, por la gráfica de f y por la recta tangente obtenida.

Actividad 56: (2005) Se sabe que la gráfica de la función $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ definida por $f(x)=x^3+ax^2+bx+c$ es la que aparece en el dibujo.



a) Determina *f*.
b) Calcula el área de la región sombreada.

Actividad 57: (2005) De una función $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ se sabe que $f(0)=2$ y que $f'(x)=2x$

a) Determina *f*.
b) Calcula el área de la región limitada por la gráfica de f, por el eje de abscisas y por las rectas de ecuaciones $x=-2$ *y* $x=2$.

Actividad 58: (2005) Considera la integral definida $I=\int_3^8 \frac{1}{\sqrt{1+x}-1}dx$

a) Exprésala aplicando el cambio de variable $\sqrt{1+x}-1=t$.
b) Calcula *I.*

Actividad 59: (2006)

a) Haz un esbozo del recinto limitado por las curvas $y=\frac{15}{1+x^2}$ e $y=x^2-1$.

b) Calcula el área de dicho recinto.

Actividad 60: (2006) Sea f la función definida por $f(x)=\begin{cases} e^x-1 & si \quad x\ge 0 \\ xe^{-x^2} & si \quad x<0 \end{cases}$

a) Estudia la derivabilidad de f en $x=0$ y, si es posible, calcula la derivada de f en dicho punto.
b) Calcula el área del recinto limitado por la gráfica de f, el eje de abscisas y la recta $x=-1$.

Actividad 61: (2006) Sea $I=\int_0^2 \frac{x^3}{\sqrt{1+x^2}}dx$

a) Expresa *I* aplicando el cambio de variable $t=1+x^2$.
b) Calcula el valor de *I.*

Actividad 62: (2006) El área del recinto limitado por las curvas de ecuaciones $y=\frac{x^2}{a}$ e $y=\sqrt{ax}$, con $a>0$, vale 3. Calcula el valor de a.

Actividad 63: (2006)

a) Sea $f:\mathbb{R}\rightarrow\mathbb{R}$ la función definida por $f(x)=ax^2+b$. Halla los valores de a y b sabiendo que $\int_0^6 f(x)\,dx=6$ y que la pendiente de la recta tangente a la gráfica de la función f en el punto de abscisa 3 vale -12.
b) Sea $f:\mathbb{R}\rightarrow\mathbb{R}$ la función definida por $f(x)=x^2+px+q$. Calcula los valores de p y q sabiendo que la función f tiene un extremo en $x=-6$ y su valor en él es -2.

Actividad 64: (2006) Halla el área del recinto limitado por la gráfica de la función $f(x)=\operatorname{sen} x$ y las rectas tangentes a dicha gráfica en los puntos de abscisas $x=0$ y $x=\pi$.

Actividad 65: (2006) Sean las funciones f y $g:[0,+\infty)\rightarrow\mathbb{R}$ dadas por $f(x)=x^2$ y $g(x)=\lambda\sqrt{x}$, donde λ es un número real positivo fijo. Calcula el valor de λ sabiendo que el área del recinto limitado por las gráficas de ambas es $\frac{1}{3}$.

Actividad 66: (2006) Sea $f:(0,2)\rightarrow\mathbb{R}$ la función definida por $f(x)=\begin{cases}\operatorname{Ln} x & si\ \ 0<x\leq 1\\ \operatorname{Ln}(2-x) & si\ \ 1<x<2\end{cases}$, siendo Ln la función logaritmo neperiano.

a) Estudia la derivabilidad de f en el punto $x=1$.
b) Calcula $\int_0^{1,5} f(x)\,dx$.

Actividad 67: (2006) $f:\mathbb{R}\rightarrow\mathbb{R}$ la función definida por $f(x)=\begin{cases}\dfrac{-a}{x} & si\ \ x<-1\\ x^2+1 & si\ \ x>-1\end{cases}$.

a) Halla el valor de a sabiendo que f es continua.
b) Esboza la gráfica de f.
c) Calcula el área del recinto limitado por la gráfica de f, el eje de abscisas y las rectas $x+2=0$ y $x-2=0$.

Actividad 68: (2007) Sea la función $f:\mathbb{R}\rightarrow\mathbb{R}$ definida por $f(x)=x|x-2|$.

a) Estudia la derivabilidad de f en el punto $x=2$.
b) Esboza la gráfica de f.
c) Calcula el área del recinto limitado por la gráfica de f y el eje de abscisas.

Actividad 69: (2007) Sean $f:\mathbb{R}\rightarrow\mathbb{R}$ y $g:\mathbb{R}\rightarrow\mathbb{R}$ las funciones mediante $f(x)=x^3+3x^2$ y $g(x)=x+3$.

a) Esboza la gráfica de f y de g calculando sus puntos de corte.
b) Calcula el área de cada uno de los dos recintos limitados entre las gráficas de f y g.

Actividad 70: (2007) Considera las funciones $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ y $g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ definidas por $f(x)=e^{x-1}$ y $g(x)=e^{1-x}$.

a) Esboza la gráfica de f y de g y determina su punto de corte.
b) Calcula el área del recinto limitado por el eje OY y las gráficas de f y g.

Actividad 71: (2007) Sea $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ la función definida por $f(x)=x(x-3)^2$.

a) Calcula los intervalos de crecimiento y decrecimiento de f.
b) Haz un esbozo la gráfica de f.
c) Calcula el área del recinto limitado por la gráfica de f y el eje de abscisas.

Actividad 72: (2007) Sea $f:(-2,0)\to\mathbb{R}$ la función $f(x)=\begin{cases}\dfrac{\alpha}{x} & si\ -2<x\leq -1\\ \dfrac{x^2-\beta}{2} & si\ -1<x<0\end{cases}$

a) Determina α y β sabiendo que f es derivable.
b) Calcula $\int_{-2}^{-1} f(x)dx$.

Actividad 73: (2007) Sea $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ la función definida por $f(x)=\begin{cases}1+\alpha x & si \quad x<0\\ e^{-x} & si \quad x\geq 0\end{cases}$

a) Determina el valor α sabiendo que f es derivable.
b) Haz un esbozo la gráfica de f.
c) Calcula $\int_{-1}^{1} f(x)dx$.

Actividad 74: (2007) Calcula $\beta>0$ para que el recinto limitado por las gráficas de las funciones de $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ y $g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ definidas por $f(x)=x^2$ y $g(x)=-x^2+2\beta^2$ sea 72 (unidades de área).

Actividad 75: (2007) Sea $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ la función definida por $f(x)=x^2$.

a) Determina la ecuación de la recta tangente a la gráfica de f en el punto de abscisa $x=1$.
b) Dibuja el recinto limitado por la gráfica de f, la recta tangente obtenida en el apartado anterior y el eje OX. Calcula su área.

Actividad 76: (2008) Dadas las funciones $f:(0,+\infty)\to\mathbb{R}$ y $g:(0,+\infty)\to\mathbb{R}$ definidas por $f(x)=\sqrt{x}$ y $g(x)=\sqrt[3]{x}$. Calcula el área del recinto limitado por las gráficas de f y g.

Actividad 77: (2008) Sea $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ la función definida por $f(x)=ax^3+bx^2+cx+d$. Se sabe que f tiene un máximo local en $x=1$, que el punto (0,1) es un punto de inflexión de su gráfica y que $\int_0^1 f(x)dx=\frac{9}{4}$. Calcula a, b, c y d.

Actividad 78: (2008) Sea $g:(0,+\infty)\to\mathbb{R}$ la función dada por $g(x)=\ln x$ (ln denota logaritmo neperiano).

a) Justifica que la recta de ecuación $y=\frac{1}{e}x$ es la recta tangente a la gráfica de *g* en el punto de abscisa $x=e$.
b) Calcula el área del recinto limitado por la gráfica de *g,* el eje de abscisas y la recta tangente del apartado anterior.

Actividad 79: (2008) Dada la función $g:(0,+\infty)\to\mathbb{R}$ definida por $g(x)=2x+\left|x^2-1\right|$.

a) Esboza la gráfica de *g*.
b) Calcula $\int_0^2 g(x)dx$

Actividad 80: (2008) Sean $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ y $g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ las funciones definidas por $f(x)=x^2-1$ y $g(x)=2x+2$.

a) Esboza las gráficas de f y de g.
b) Calcula el área del recinto limitado por dichas gráficas.

Actividad 81: (2008) Calcula $\int_{-2}^{-1}\frac{1}{(x^2-x)(x-1)}dx$

Actividad 82: (2008) Sea $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ la función dada por $f(x)=e^{-2x}$

a) Justifica que la recta de ecuación $y=-2ex$ es la recta tangente a la gráfica de *f* en el punto de abscisa $x=-\frac{1}{2}$.
b) Calcula el área del recinto limitado por la gráfica de *f,* el eje de ordenadas y la recta tangente del apartado anterior.

Actividad 83: (2008) Sean $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ y $g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ las funciones definidas por $f(x)=x^3-4x$ y $g(x)=3x-6$.

a) Determina los puntos de corte de las gráficas de f y de g.
b) Calcula el área del recinto limitado por dichas gráficas.

Actividad 84: (2008) Calcula $\int_0^1 x\ln(x+1)dx$ (Ln denota logaritmo neperiano).

Actividad 85: (2008) Sean $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ y $g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ las funciones definidas por $f(x)=x^2$ y $g(x)=a$ $(\text{con } a>0)$. Se sabe que el área del recinto limitado por las gráficas de f y g es 4/3. Calcula el valor de la constante a.

Actividad 86: (2008) Sea $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ la función definida por $f(x)=\begin{cases} x|x| & si \quad x\le 2 \\ 6-x & si \quad x>2 \end{cases}$

a) Esboza la gráfica de f.
b) Estudia la derivabilidad de f.
c) Calcula el área comprendida entre la gráfica de f y el eje de abscisas.

Actividad 87: (2008) Calcula $\int_1^e x^2 \ln(x)dx$ (Ln denota logaritmo neperiano).

Actividad 88: (2008) Sea $g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ la función dada por $g(x)=\frac{1}{4}x^3-x^2+x$

a) Esboza la gráfica de *g*.
b) Determina la ecuación de la recta tangente a la gráfica de *g* en el punto $x=2$.
c) Calcula el área del recinto limitado la gráfica de g y el eje de abscisas.

Actividad 89: (2009) Considera las funciones $f,g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ definidas por $f(x)=|x|$ y $g(x)=6-x^2$.

a) Esboza el recinto limitado por sus gráficas.
b) Calcula el área de dicho recinto.

Actividad 90: (2009) La recta tangente a la gráfica de la función $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ definida por $f(x)=mx^2+nx-3$, en el punto $(1,-6)$, es paralela a la recta $y=-x$.

a) Determina las constantes m y n. Halla la ecuación de la recta tangente.
b) Calcula el área del recinto limitado por la gráfica de la función, la recta tangente del apartado anterior y el eje de ordenadas.

Actividad 91: (2009) La curva $y=\frac{1}{2}x^2$ divide al rectángulo de vértices $A(0,0)$, $B(2,0)$, $C(2,1)$ y $D(0,1)$ en dos recintos.

a) Dibuja dichos recintos.
b) Halla el área de cada uno de ellos.

Actividad 92: (2009) Sea $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ la función definida por $f(x)=x|x-1|$

a) Esboza la gráfica de *f*.
b) Comprueba que la recta de ecuación $y=x$ es la recta tangente a la gráfica de f en el punto de abscisa $x=0$.
c) Calcula el área del recinto limitado por la gráfica de f y la de dicha tangente.

Actividad 93: (2009) Considera la curva de ecuación $y=x^3-3x$.

a) Halla la ecuación de la recta tangente a la curva en el punto de abscisa $x=-1$.
b) Calcula el área del recinto limitado por la curva dada y la recta $y=2$.

Actividad 94: (2009) Sea $f:(0,+\infty)\to\mathbb{R}$ la función definida por $f(x)=1+\ln(x)$, siendo ln la función logaritmo neperiano.

a) Comprueba que la recta de ecuación $y=1+\frac{1}{e}x$ es la recta tangente a la gráfica de g en el punto de abscisa $x=e$.

b) Calcula el área del recinto limitado por la gráfica de *f,* el eje de abscisas y la recta tangente del apartado a).

Actividad 95: (2009) Se consideran las funciones $f:[0,+\infty)\to\mathbb{R}$ y $g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ definidas por $f(x)=\sqrt{3x}$, $g(x)=\frac{1}{3}x^2$.

a) Haz un esbozo de sus gráficas.

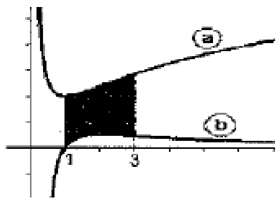
b) Calcula el área del recinto limitado por las gráficas de ambas funciones.

Actividad 96: (2009)

a) Calcula $\int x\,\text{sen}\,x\,\text{dx}$

b) Sean las funciones f, $g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ definidas por $f(x)=-x^2+1$, $g(x)=x-1$. Calcula el área del recinto limitado por sus gráficas.

Actividad 97: (2009) Las dos gráficas del dibujo corresponden a la función $f:(0,+\infty)\to\mathbb{R}$ definida por $f(x)=\frac{2}{x}+\ln(x)$ y a la de su derivada $f':(0,+\infty)\to\mathbb{R}$ (ln denota logaritmo neperiano).



a) Indica, razonando la respuesta, cuál es la gráfica de *f* y cuál la de *f´*.

b) Calcula el área de la región sombreada.

Actividad 98: (2009) Sean $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ y $g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ las funciones definidas por $f(x)=x^2+|x|$ y $g(x)=2$.

a) Determina los puntos de corte de las gráficas de *f* y *g*. Esboza dichas gráficas.

b) Calcula el área del recinto limitado por dichas gráficas.

Actividad 99: (2009) Calcula un número positivo a, menor que 4, para que el recinto limitado por la parábola de ecuación $y=x^2$, y las dos rectas de ecuaciones $y=4$ e $y=a$, tenga un área de $28/3$ unidades cuadradas.

Actividad 100: (2010) Calcula el valor de $a>0$ sabiendo que el área del recinto comprendido entre la parábola $y=x^2+ax$ y la recta $y+x=0$ vale 36 unidades cuadradas.

Actividad 101: (2010) Calcula $\int_0^{\pi^2}\text{sen}(\sqrt{x})dx$. Sugerencia: Efectúa el cambio $\sqrt{x}=t$

Actividad 102: (2010) Considera la función f dada por $f(x)=5-x$ y la función g definida como $g(x)=\frac{4}{x}$ para $x\neq 0$.

a) Esboza el recinto limitado por las gráficas de f y g indicando sus puntos de corte.
b) Calcula el área de dicho recinto.

Actividad 103: (2010) Dada la función f definida por $f(x)=\frac{3}{x^2-5x+4}$ para $x\neq 1$ y $x\neq 4$. Calcula el área del recinto limitado por la gráfica de f, el eje de abscisas y las rectas $x=2$, $x=3$.

Actividad 104: (2010) Considera la función $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ definida por $f(x)=x|2-x|$.

a) Esboza su gráfica
b) Calcula el área del recinto limitado por la gráfica de f, el eje de abscisas y la recta de ecuación $x=3$.

Actividad 105: (2010) Considera las funciones $f,g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ definidas por $f(x)=2-x^2$ y $g(x)=|x|$

a) Esboza sus gráficas en unos mismos ejes coordenados.
b) Calcula el área del recinto limitado por las gráficas de f y g.

Actividad 106: (2010) Dada la función $f:(0,+\infty)\to\mathbb{R}$ definida por $f(x)=\ln x$, donde ln es la función logaritmo neperiano, se pide:

a) Comprueba que la recta de ecuación $y=-ex+1+e^2$ es la recta normal a la gráfica de f en el punto de abscisas $x=e$.
b) Calcula el área de la región limitada por la gráfica de f, el eje de abscisas y la recta normal del apartado a).

Actividad 107: (2010) Considera la función $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ dada por $f(x)=x^2+4$.

a) Halla la ecuación de la recta tangente a la gráfica de *f* en el punto de abscisa $x=1$.
b) Esboza el recinto limitado por la gráfica de f, el eje de ordenadas y la recta de ecuación $y=2x+3$. Calcula su área.

Actividad 108: (2010) Sean $f,g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ las funciones definidas por $f(x)=x^2-2x+3$ y $g(x)=\frac{1}{2}x^2+1$.

a) Esboza las gráficas de f y g, y halla su punto de corte.
b) Calcula el área del recinto limitado por las gráficas de ambas funciones y el eje de ordenadas.

Actividad 109: (2011) Calcula el valor de $b>0$, sabiendo que el área de la región comprendida entre la curva $y=\sqrt{x}$ y la recta $y=bx$ es de $\frac{4}{3}$ unidades cuadradas.

Actividad 110: (2011) Considera las funciones $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definidas por $f(x) = 6x - x^2$ y $g(x) = x^2 - 2x$.
a) Esboza sus gráficas en unos mismos ejes coordenados y calcula sus puntos de corte.
b) Calcula el área del recinto limitado por las gráficas de f y g.

Actividad 111: (2011) Sean $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ las funciones definidas por $f(x) = -\frac{1}{4}x^2 + 4$ y $g(x) = x^2 - 1$.

a) Halla la ecuación de la recta tangente a la gráfica de f en el punto de abscisa $x = -2$.
b) Esboza el recinto limitado por las gráficas de ambas funciones y la recta $y = x + 5$.
c) Calcula el área de este recinto.

Actividad 112: (2011) Sean $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ y $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ las funciones definidas por:
$f(x) = 4 - 3|x|$ y $g(x) = x^2$

a) Esboza las gráficas de *f* y *g*. Determina sus puntos de corte.
b) Calcula el área del recinto limitado por las gráficas de *f* y *g*.

Actividad 113: (2011) Calcula: $\int_0^{\frac{\pi}{2}} x\cos(x)dx$.

Actividad 114: (2011) Calcula un número positivo *a*, menor que 2, para que el recinto limitado por la parábola de ecuación $y = \frac{1}{2}x^2$ y las dos rectas horizontales $y = a$ e $y = 2$, tenga un área de $14/3$ unidades cuadradas.

Actividad 115: (2011) Dada la función $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por $f(x) = -2x^2 + 3x - 1$.

a) Prueba que las rectas $y = -x + 1$ e $y = 3x - 1$ son tangentes a su gráfica.
b) Halla el área del recinto limitado por la gráfica de *f* y las rectas mencionadas en el apartado anterior.

Actividad 116: (2011) Sea $f : (-1, +\infty) \to \mathbb{R}$ la función definida por $f(x) = \ln(x+1)$, donde ln denota la función logaritmo neperiano.

a) Esboza el recinto limitado por la gráfica de f, el eje OY y la recta $y = 1$. Calcula los puntos de corte con de las gráficas.
b) Halla el área del recinto anterior.

Actividad 117: (2012) Sean $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ las funciones definidas por $f(x) = \operatorname{sen} x$ y $g(x) = \cos x$ respectivamente.

a) Realiza un esbozo de las gráficas de f y g en el intervalo $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$.
b) Calcula el área total de los recintos limitados por ambas gráficas y las rectas $x = 0$ y $x = \frac{\pi}{2}$

Actividad 118: (2012) Sea $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ la función definida por $f(x)=x^3-4x$
a) Halla la ecuación de la recta tangente a la gráfica de *f* en el punto de abscisa $x=1$.
b) Esboza el recinto limitado por la gráfica de f y la recta $y=-x-2$, determinando los puntos de corte de ambas gráficas.
c) Calcula el área del recinto anterior.

Actividad 119: (2012) Sean $f,g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ las funciones definidas por $f(x)=x^2-2x$ y $g(x)=-x^2+4x$ respectivamente.

a) Halla los puntos de corte de sus gráficas y realiza un esbozo del recinto que limitan.
b) Calcula el área de dicho recinto.

Actividad 120: (2012) Sea $I=\int_0^1 \frac{x}{1+\sqrt{1-x}}dx$

a) Expresa *I* aplicando el cambio de variable $t=\sqrt{1-x}$.
b) Calcula el valor de *I.*

Actividad 121: (2012) Sea $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ la función definida por $f(x)=\frac{9-x^2}{4}$
a) Halla la ecuación de la recta tangente a la gráfica de *f* en el punto de abscisa $x=1$.
b) Esboza el recinto limitado por la gráfica de f, la recta $x+2y=5$ y el eje de abscisas.
c) Calcula el área de dicho recinto.

Actividad 122: (2012) Sea f una función continua en el intervalo $[2,3]$ y F una primitiva de f tal que $F(2)=1$ y $F(3)=2$. Calcula:

a) $\int_2^3 f(x)dx$ b) $\int_2^3 (5f(x)-7)dx$ c) $\int_2^3 F(x)^2 f(x)dx$

Actividad 123: (2012) Sea la función f definida por $f(x)=\frac{2}{x^2-1}$ para $x\neq -1$ y $x\neq 1$

a) Halla una primitiva de *f*.
b) Halla el valor de k para que el área del recinto limitado por el eje de abscisas y la gráfica de f en el intervalo $[2,k]$ sea $\ln(2)$, donde ln denota logaritmo neperiano.

Actividad 124: (2012) Se considera el recinto del plano situado en el primer cuadrante limitado por las rectas $y=4x$, $y=8-4x$ y la curva $y=2x-x^2$

a) Realiza un esbozo de dicho recinto.
b) Calcula su área.

Actividad 125: (2012) Calcula los valores de a y b sabiendo que la función $f:(0,+\infty)\to\mathbb{R}$ definida por $f(x)=ax^2+b\ln(x)$, donde ln denota logaritmo neperiano, tiene un extremo relativo en $x=1$ y que $\int_1^4 f(x)\mathrm{dx}=27-8\ln(4)$.

Actividad 126: (2012) Sean las funciones $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ y $g:[0,+\infty)\to\mathbb{R}$ definidas por $f(x)=\frac{x^2}{4}$ y $g(x)=2\sqrt{x}$ respectivamente.

a) Halla los puntos de corte de las gráficas de f y g. Realiza un esbozo del recinto que limitan.
b) Calcula el área de dicho recinto.

8.- SOLUCIONES A LAS ACTIVIDADES

Actividad 1:
a) $\frac{115}{6}$ b) $\frac{8}{3}$ c) $\frac{4}{e}$ d) $2\sqrt{3}-\frac{2\pi}{3}$ e) $\frac{1}{4}$ f) $\sqrt{5}-1$ g) 0 h) $\ln 3$

Actividad 2:
a) $F'(x)=\sqrt{e^x+1}$ b) $G'(x)=2x^5-2x$

Actividad 3: 0

Actividad 4: $\frac{155}{6}u^2$

Actividad 5: $1u^2$

Actividad 6: $\frac{4}{3}u^2$

Actividad 7: $\frac{35}{6}u^2$

Actividad 8: $\frac{7}{6}u^2$

Actividad 9: $a=\frac{\sqrt[3]{2}}{2}$

Actividad 10:
a) $\frac{2\sqrt{2}-1}{3}$ b) $\frac{e^\pi-1}{2}$ c) $\frac{3\pi}{4}$ d) $\ln\frac{4}{3}$ e) 0

Actividad 11: La segunda.

Actividad 12: La función f tiene un máximo relativo en $O(0,0)$ y un mínimo relativo en el punto $B(1,-1/6)$.

Actividad 13: $f(2)=16$

Actividad 14:

a) $F'(2)=2\sqrt{3}$ b) $F(4)=4\pi$

Actividad 15: $c=\frac{2}{\sqrt{3}}$. El teorema que lo asegura es el del valor medio integral.

Actividad 16: $\frac{46}{3}$

Actividad 17: $\ln\sqrt{\frac{7}{2}}u^2$

Actividad 18: $\frac{17}{12}u^2$

Actividad 19: $72u^2$

Actividad 20: $\frac{25}{32}u^2$

Actividad 21: $\frac{1}{4}u^2$

Actividad 22: $\frac{1}{2}u^2$

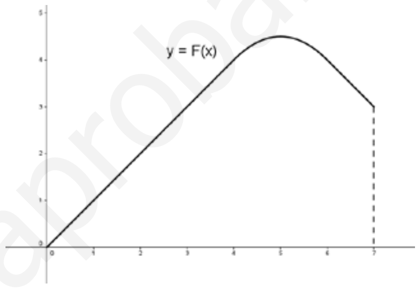
Actividad 23: $\left(\pi - \frac{2}{3}\right)u^2$

Actividad 24: $\left(\frac{1}{e} + 1 - \frac{e}{2}\right)u^2$

Actividad 25: $\frac{37}{12}u^2$

a) $F(4) = 4 \ \ y \ \ F(7) = 3$

b)



Actividad 26: $-2 \ , \ -1 \ o \ 2.5$

Actividad 27: $\int_1^3 g(x)dx = 2$

Actividad 28:

a) $f(x) = \frac{1}{4}x^2 - 2x + 4$ b) $\frac{8}{3}u^2$

Actividad 29:

a) $P(3,0) \ \ y \ \ t: y = \frac{e}{3}x$ b) $\frac{3e-6}{2}u^2$

Actividad 30: $a = -1 \ , \ b = 2 \ , \ c = 3$

Actividad 31: $m = \frac{17}{12}$

Actividad 32:

a) $y = 4x - 7$ b) $9u^2$

Actividad 33: $a = 3 \ , \ b = 0 \ \ y \ \ c = \frac{19}{4}$

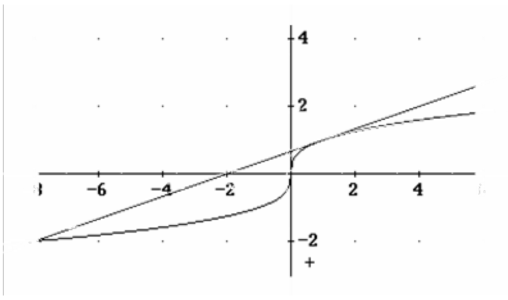
Actividad 34:

a) $\frac{1}{6}u^2$ b) $y = x + \frac{3}{4}$

Actividad 35: $\lambda = \sqrt[3]{6}$

Actividad 36:

a) $y=\frac{1}{3}x+\frac{2}{3}$



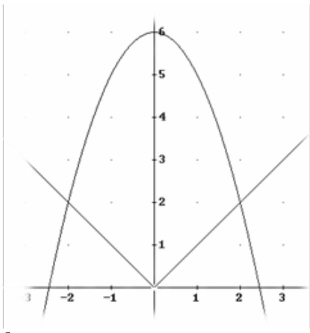
b) c)

$\frac{27}{4}u^2$

Actividad 37: $\frac{27}{2}u^2$

Actividad 38:

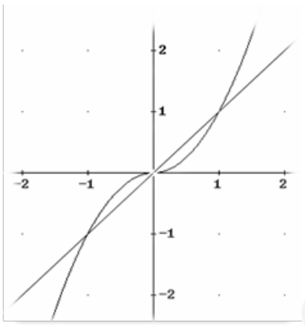
a)



b) $\frac{44}{3}u^2$

Actividad 39:

a)



b) $\frac{1}{3}u^2$

Actividad 40:

a) La función es creciente en $(\ln 2,+\infty)$, decreciente en $(-\infty,\ln 2)$, no tiene máximos absolutos y tiene un mínimo absoluto en $A(\ln 2,4)$.

b) $\left(e^2-\frac{4}{e^2}+3\right)u^2$

Actividad 41: $2u^2$

Actividad 42: $4u^2$

Actividad 43: $\frac{-\ln 3}{2}$

Actividad 44:

a) $I=2\int_2^4\left(1-\frac{1}{t}\right)dt$ b) $4-2\ln 2$

Actividad 45:

a) $y=\frac{-2}{3}x+\frac{7}{3}$ b) $\frac{8}{9}u^2$

Actividad 46: $\left(2\ln 2-2+\dfrac{2}{\ln 2}\right)u^2$

Actividad 47: $b=2$

Actividad 48: $b=3$

Actividad 49:

a) La 1 es f' y la 2 es f b) $\left(2-\dfrac{6}{e^2}\right)u^2$

Actividad 50:

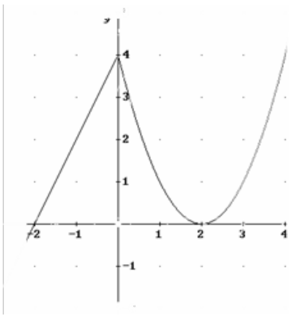
a) $y=\dfrac{-1}{2}x+1$ b) $\left(1-\dfrac{2}{e}\right)u^2$

Actividad 51:

a) $a=8$ b) $\left(\dfrac{206}{3}-16\ln\dfrac{3}{2}\right)u^2$

Actividad 52:

a) $A(-2,0)$, $B(2,0)$, $C(0,4)$ b) $\dfrac{20}{3}u^2$



Actividad 53: $2\ln 2-1$

Actividad 54:

a) $y=x-5$ b) $9u^2$

Actividad 55:

a) $f(x)=x^3-3x+2$ b) $\dfrac{27}{4}u^2$

Actividad 56:

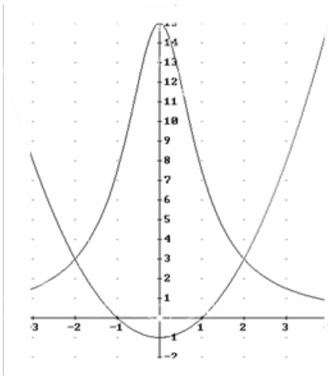
a) $f(x)=x^2+2$ b) $\dfrac{40}{3}u^2$

Actividad 57:

a) $I=2\int_1^2\left(1+\dfrac{1}{t}\right)dt$ b) $2(1+\ln 2)u^2$

Actividad 58:

a)



b) $\left(30\,\mathrm{arctg}\,2-\dfrac{4}{3}\right)u^2$

Actividad 59:

a) f es derivable en $\mathbb{R}$, siendo $f'(x)=\begin{cases} e^x & si\ \ x\geq 0 \\ (1-2x^2)e^{-x^2} & si\ \ x>0 \end{cases}$ b) $\frac{e-1}{2e}u^2$

Actividad 60:

a) $I=\frac{1}{2}\int_1^5 \frac{t-1}{\sqrt{t}}dt$ b) $I=\frac{2\sqrt{5}+2}{3}$

Actividad 61: $a=3$

Actividad 62:

a) $a=-2$, $b=25$ b) $p=12$, $q=34$

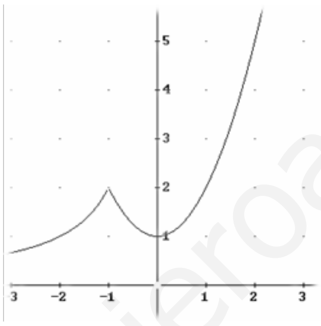
Actividad 63: $\frac{\pi^2-8}{4}u^2$

Actividad 64: $\lambda=1$

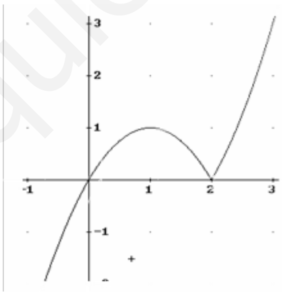
Actividad 65:

a) Es derivable en $\mathbb{R}-\{1\}$ b) $\frac{1}{2}\ln 2-\frac{1}{2}$

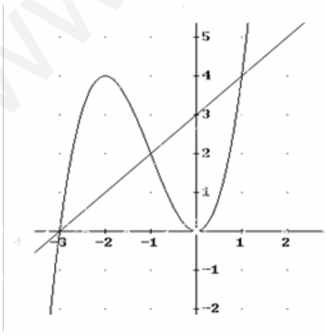
Actividad 66:

a) $a=2$ b)  c) $(6+2\ln 2)u^2$

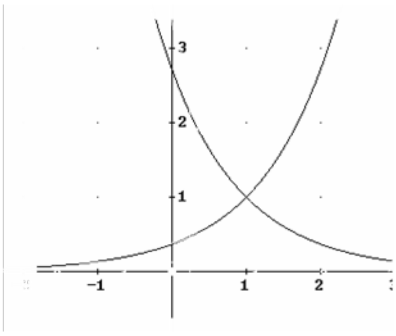
Actividad 67:

a) f es derivable en $\mathbb{R}-\{2\}$ b)  c) $\frac{4}{3}u^2$

Actividad 68:

a)  b) $4u^2$

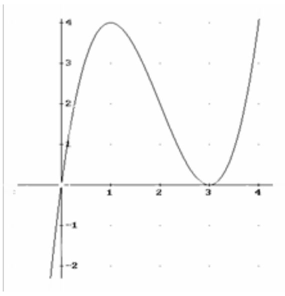
Actividad 69:

a) 

b) $\left(-2+e+\dfrac{1}{e}\right)u^2$

Actividad 70:

a) Es creciente en $(-\infty,1)\cup(3,+\infty)$ y decreciente en $(1,3)$

b) 

c) $\dfrac{27}{4}u^2$

Actividad 71:

a) $\alpha=1$, $\beta=3$

b) $-\ln 2$

Actividad 72:

a) $\alpha=-1$

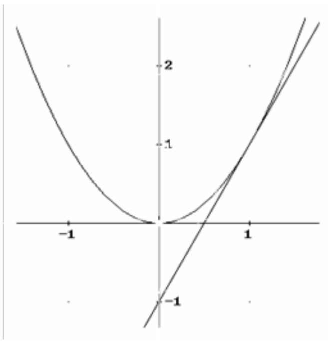
b) 

c) $\dfrac{5}{2}-\dfrac{1}{e}$

Actividad 73: $\beta=3$

Actividad 74:

a) $y=2x-1$

b) 

c) $\dfrac{1}{12}u^2$

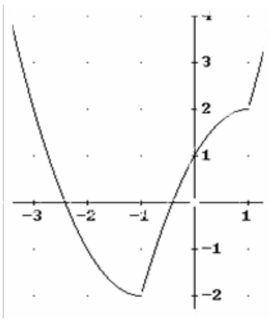
Actividad 75: $\dfrac{1}{12}u^2$

Actividad 76: $a=-1$, $b=0$, $c=3$, $d=1$

Actividad 77:

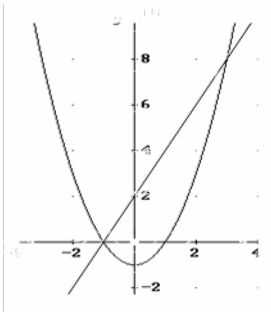
a) Hacer b) $\frac{e-1}{2}u^2$

Actividad 78:

a) 

b) 6

Actividad 79:

a) 

b) $\frac{32}{3}u^2$

Actividad 80: $\ln\frac{3}{4}+\frac{1}{6}$

Actividad 81:

a) Hacer b) $\left(\frac{e}{4}-\frac{1}{2}\right)u^2$

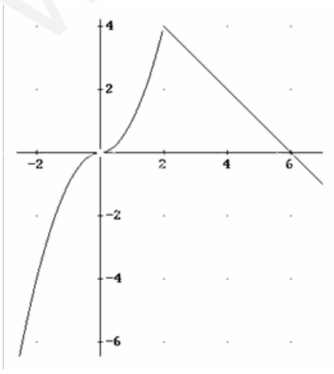
Actividad 82:

a) $A(-3,-15)$, $B(1,-3)$, $C(2,0)$ b) $\frac{131}{4}u^2$

Actividad 83: $\frac{1}{4}$

Actividad 84: $a=1$

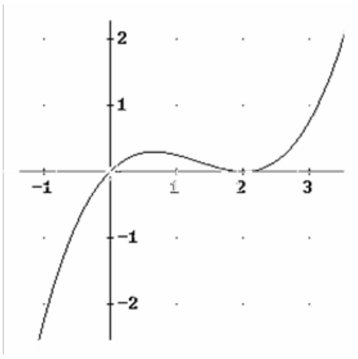
Actividad 85:

a) 

b) Es derivable en $\mathbb{R}-\{2\}$ c) $\frac{32}{3}u^2$

Actividad 86: $\frac{2e^3+1}{9}u^2$

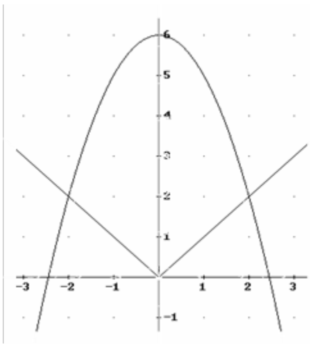
Actividad 87:

a) 

b) $y=0$

c) $\frac{1}{3}u^2$

Actividad 88:

a) 

b) $\frac{44}{3}u^2$

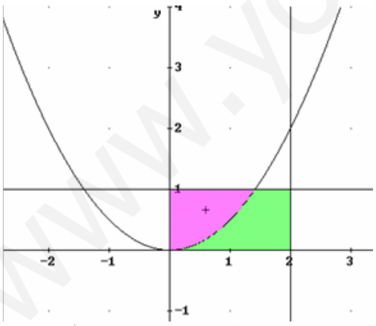
Actividad 89:

a) $m=2$, $n=-5$

b) $t: y=-x-5$

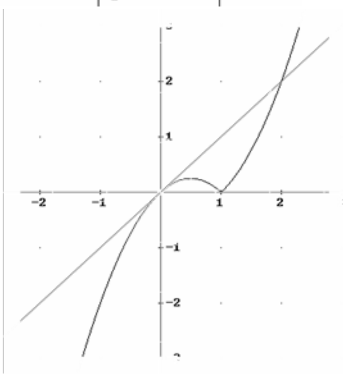
c) $\frac{2}{3}u^2$

Actividad 90:

a) 

b) $A_1=\frac{2\sqrt{2}}{3}u^2$, $A_2=\left(2-\frac{2\sqrt{2}}{3}\right)u^2$

Actividad 91:

a) 

b) Hacer

c) $1u^2$

Actividad 92:

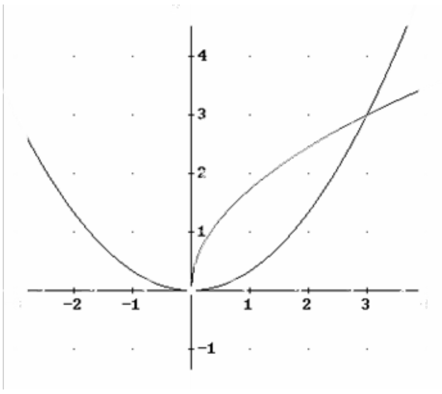
a) $y=2$ b) $\frac{27}{4}u^2$

Actividad 93:

a) Hacer b) $\frac{e^2-1}{e}u^2$

Actividad 94:

a)



b) $3u^2$

Actividad 95:

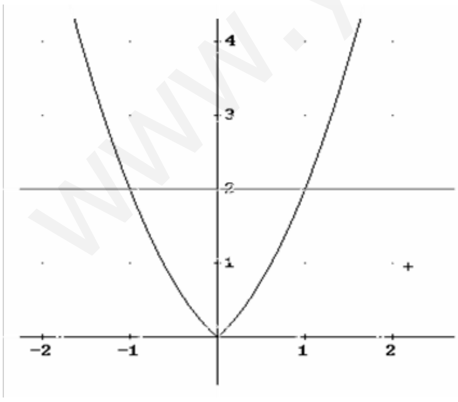
a) $-x\cos x+\operatorname{sen} x+C$ b) $\frac{9}{2}u^2$

Actividad 96:

a) f es la a) y f' es la b) b) $\frac{18\ln 3-8}{3}u^2$

Actividad 97:

a)



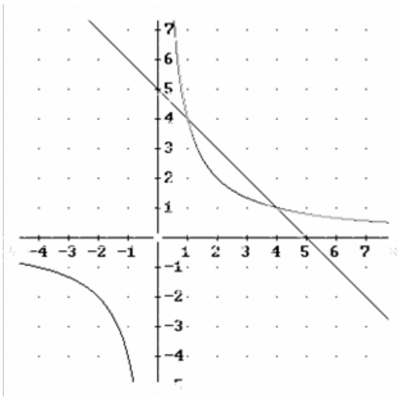
b) $\frac{7}{3}u^2$

Actividad 98: $a=1$

Actividad 99: $a=5$

Actividad 100: 2π

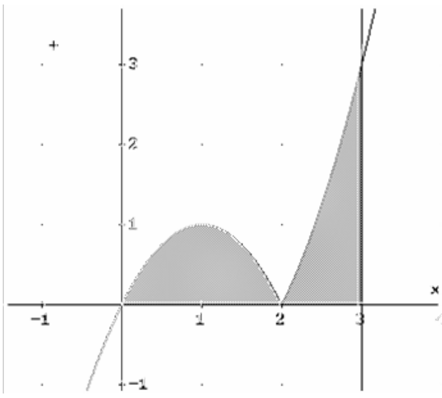
Actividad 101:

a) 

b) $\left(\frac{15}{2}-4\ln 4\right)u^2$

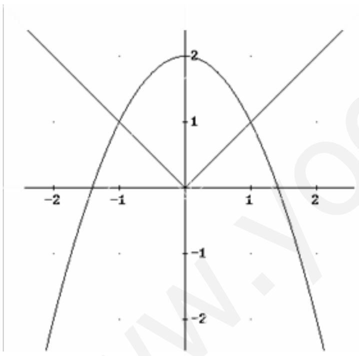
Actividad 102: $2\ln 2\ u^2$

Actividad 103:

a) 

b) $\frac{8}{3}u^2$

Actividad 104:

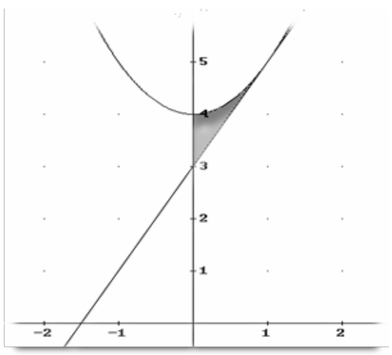
a) 

b) $\frac{7}{3}u^2$

Actividad 105:

a) Hacer

b) $\frac{2e+1}{2e}u^2$



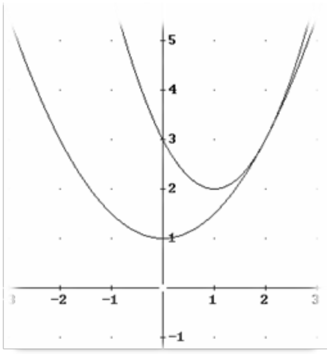
Actividad 106:

a) $y=2x+3$

b) $\frac{1}{3}u^2$

Actividad 107:

a)

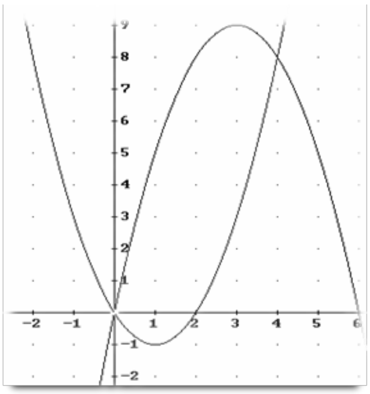


b) $\frac{4}{3}u^2$

Actividad 108: $b=\frac{1}{2}$

Actividad 109:

a)

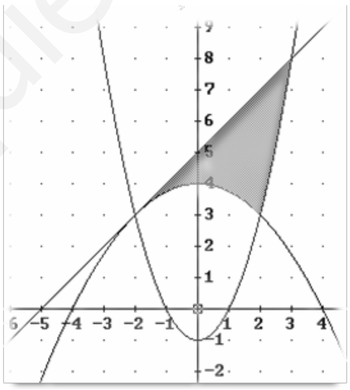


b) $\frac{64}{3}u^2$

Actividad 110:

a) $y=x+5$

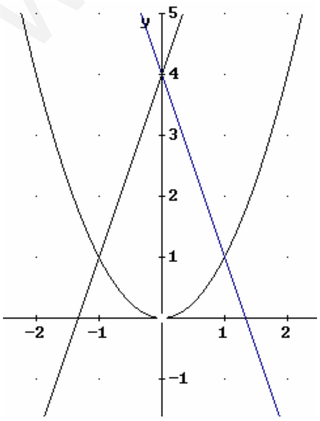
b)



c) $\frac{15}{2}u^2$

Actividad 111:

a)



b) $\frac{13}{3}u^2$

Actividad 112: $\frac{\pi}{2}-1$

Actividad 113: $a=\frac{1}{2}$

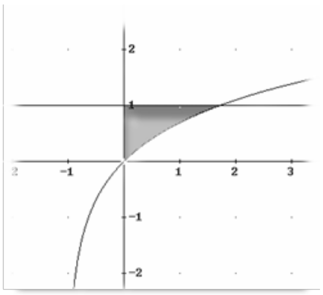
Actividad 114:

a) Hacer

b) $\frac{1}{6}u^2$

Actividad 115:

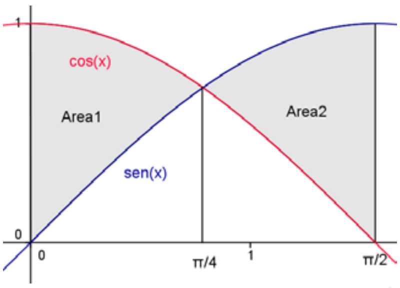
a)



b) $(e-2)u^2$

Actividad 116:

a)

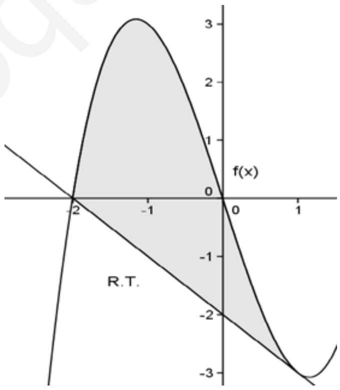


b) $\left(2\sqrt{2}-2\right)u^2$

Actividad 117:

a) $y=-x-2$

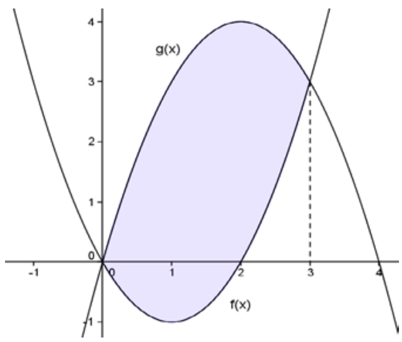
b)



c) $\frac{27}{4}u^2$

Actividad 118:

a)



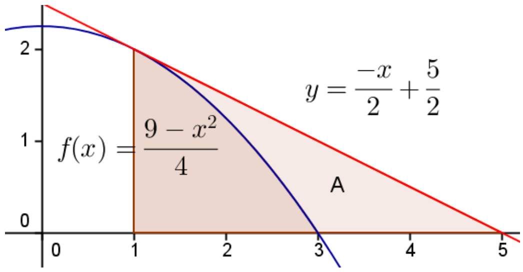
b) $9u^2$

Actividad 119:

a) $I = 2\int_0^1 \left(t - t^2\right) dt$ b) $I = \frac{1}{3}$

Actividad 120:

a) $y = \frac{-1}{2}x + \frac{5}{2}$ b)



c) $\frac{5}{3}u^2$

Actividad 121:

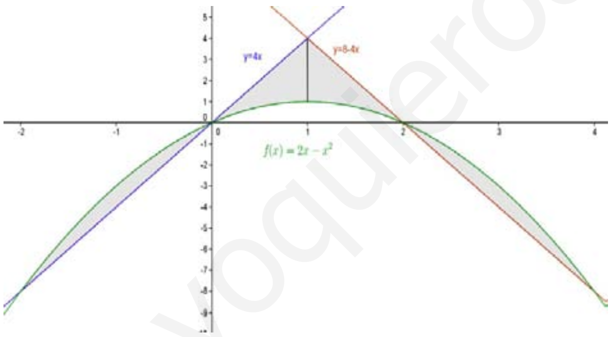
a) 1 b) -2 c) $\frac{7}{3}$

Actividad 122:

a) $\ln|x-1| - \ln|x+1|$ b) $k = 5$

Actividad 123:

a) b)

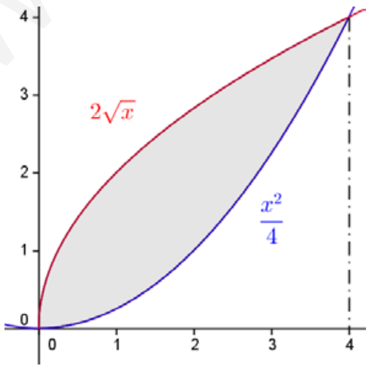


$\frac{20}{3}u^2$

Actividad 124: $a = 1$ y $b = -2$

Actividad 125:

a)



b) $\frac{16}{3}u^2$

NOTA IMPORTANTE: Las actividades de la 30 a la 124 son de Selectividad. En las dos páginas web siguientes se encuentran las soluciones de todos los exámenes de forma detallada:

- ***http://emestrada.wordpress.com/2010/02/20/matematicas-ii-problemas-selectividad-resueltos/***
- ***http://www.iesayala.com/selectividadmatematicas/***