1.-INTEGRAL INDEFINIDA. PROPIEDADES

El Cálculo Integral o integración consiste en hallar la función f(x) cuando se conoce su función derivada f´(x).
Por eso se dice que la integración es la operación inversa de la derivación.

Mientras que las reglas de derivación nos permiten hallar la derivada de cualquier combinación (suma, producto, composición) de las llamadas funciones elementales, con la integración no podemos decir lo mismo.

Por ejemplo, no existen funciones elementales cuyas derivadas sean $f(x)=\frac{sen(x)}{x};\quad g(x)=e^{-x^2};\quad h(x)=\frac{1}{\ln(x)}$

Primitiva de una función. Integral indefinida

Dada una función f(x), diremos que F(x) es una **primitiva** suya si F´(x) = f(x).

La primitiva de una función no es única. Por ejemplo, si $f(x) = 3x^2$, entonces $F_1(x) = x^3$, $F_2(x) = x^3 + 2$,…………,etc, etc son primitivas de f(x).

En general, si una función f(x) tiene una función primitiva F(x), entonces tiene infinitas primitivas cuyas expresiones serán $F_k(x) = F(x) + k$, siendo $k \in R$.

El conjunto de las infinitas primitivas de f(x), se llama **integral indefinida** de f(x) y se denota mediante $\int f(x)dx$.

Se lee "integral de f de x diferencial de x". Por ejemplo: $\int 3x^2dx = x^3 + k,\ \ con\ k\in\mathbb{R}$.

Integrales inmediatas

Puesto que la integración es el proceso contrario al de la derivación, de la tabla de derivadas vista en el tema anterior se deduce una tabla de integrales inmediatas:

$\int x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1}+k \quad (n\neq -1)$	$\int \frac{1}{x}dx = \ln\lvert x\rvert + k$	$\int e^x dx = e^x + k$	$\int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a}+k$
$\int \operatorname{sen} x\, dx = -\cos x + k$ $\int \cos x\, dx = \operatorname{sen} x + k$	$\int \frac{1}{\cos^2 x}dx = tg\,x + k$ $\int \left(1+tg^2x\right)\, dx = tg\,x+k$	$\int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\, dx = arcsen\ x + k$ $= -\arccos\ x + k$	$\int \frac{1}{1+x^2}\, dx = arctg\ x + k$

Ejemplos:

1) $\int x^2dx = \frac{x^3}{3}+k$

2) $\int \frac{1}{x^5}dx = \int x^{-5}dx = \frac{x^{-4}}{-4}+k = \frac{-1}{4x^4}+k$

3) $\int 2^x dx = \frac{2^x}{\ln 2}+k$

4) $\int \sqrt{x}\ dx = \int x^{1/2}\,dx = \frac{x^{3/2}}{3/2}+k = \frac{2\sqrt{x^3}}{3}+k$

5) $\int \frac{1}{\sqrt[5]{x^7}}\ dx = \int x^{-7/5}\ dx = \frac{x^{-2/5}}{-2/5}+k = \frac{-5}{2\ \sqrt[5]{x^2}}+k$

Propiedades de la integral indefinida

1) La integral de la suma o diferencia de dos funciones es igual a la suma o diferencia de las integrales de dichas funciones.

$$\boxed{\int [f(x)+g(x)]\,dx = \int f(x)\,dx + \int g(x)\,dx} \qquad \boxed{\int [f(x)-g(x)]\,dx = \int f(x)\,dx - \int g(x)\,dx}$$

2) La integral del producto de un número por una función es igual al producto del número por la integral de dicha función.

$$\boxed{\int a\ f(x)\ dx = a\int f(x)\ dx}$$

$\boxed{\text{Ejercicio 1}}$ Calcula: a) $\int\left(3x^4-\frac{5}{x^3}+\frac{2}{\sqrt{x}}\right)dx$ b) $\int \frac{x^3-7x}{x^2}\,dx$

$\boxed{\text{Ejercicio 2}}$ Sea f: [0, 4] → R una función tal que su función derivada viene dada por $f'(x)=\begin{cases}\frac{2}{3}\text{x}, & si\ \ 0<x<3\\ -2x+8, & si\ 3\le x<4\end{cases}$

(a) Determina la expresión de f sabiendo que f(1) = 16/3.
(b) Halla la ecuación de la recta tangente a la gráfica de f en el punto de abscisa x = 1.

Ejercicio 3 Determina una función f: R → R sabiendo que su derivada viene dada por $f'(x) = x^2 + x - 6$ y que el valor que alcanza f en su máximo relativo es el triple del valor que alcanza en su mínimo relativo.

Ejercicio 4 Halla la función f: ℜ → ℜ sabiendo que $f''(x) = 12x - 6$ y que la recta tangente a la gráfica de f en el punto de abscisa x = 2 tiene de ecuación $4x - y - 7 = 0$.

Practica tú:

1 Calcula: a) $\int 9\,dx$ b) $\int \frac{dx}{\sqrt[5]{x}}$ c) $\int \left(3\sqrt[7]{x^4} - \frac{7}{x^2} + \frac{3}{5\sqrt{x}} - x\right) dx$ d) $\int (4x^2 - 5x + 7)dx$

e) $\int x(x-1)\,dx$ f) $\int \frac{5\cos x}{3} dx$ g) $\int (x - sen x)dx$

Sol.: a) $F(x) = 9x + c$ b) $F(x) = \frac{5\sqrt[5]{x^4}}{4} + c$ c) $F(x) = \frac{21\sqrt[7]{x^{11}}}{11} + \frac{7}{x} + \frac{6\sqrt{x}}{5} - \frac{x^2}{2} + c$ d) $F(x) = \frac{4x^3}{3} - \frac{5x^2}{2} + 7x + c$

e) $F(x) = \frac{x^3}{3} - \frac{x^2}{2} + c$ f) $F(x) = \frac{5\,sen\,x}{3} + c$ g) $F(x) = \frac{x^2}{2} + \cos x + c$

2 De una función f: [0, 5] → R se sabe que f(3) = 6 y que su función derivada está dada por

$$f'(x) = \begin{cases} 5x - 2, & si\ \ 0 < x < 1 \\ x^2 - 6x + 8, & si\ \ 1 \le x < 5 \end{cases}$$

(a) Calcula la ecuación de la recta tangente a la gráfica de f en el punto de abscisa x = 3.
(b) Determina los intervalos de crecimiento y de decrecimiento de f y calcula sus extremos relativos o locales (puntos en los que se obtienen y valores que alcanza la función).

Sol.: a) rtg: $y = 9 - x$ b) f es creciente en $(\frac{2}{5}, 1) \cup (1,2) \cup (4,5)$ y decrec. en $(0, \frac{2}{5}) \cup (2,4)$ Máx.: $M(2, \frac{20}{3})$ Mín.: $N_1(\frac{2}{5}, \frac{133}{30}), N_2(4, \frac{16}{3})$

3 Determina la función f: R → R sabiendo que $f'(x) = 2x^3 - 6x^2$ y que su valor mínimo es –12.
Calcula también las ecuaciones de las rectas tangentes a la gráfica de f en los puntos de inflexión de su gráfica.

Sol.: $f(x) = \frac{x^4 - 4x^3 + 3}{2}$; en $x = 0$, rtg: $y = \frac{3}{2}$; en $x = 2$, rtg: $y = \frac{19 - 16x}{2}$

4 Determina la función f: ℜ → ℜ sabiendo que $f''(x) = x^2 - 1$ y que la recta tangente a la gráfica de f en el punto de abscisa x = 0 es la recta y = 1. Sol.: $f(x) = \frac{x^4 - 6x^2 + 12}{12}$

5 Halla la función f: ℜ → ℜ para que su gráfica pase por el punto M(0, 1), que la tangente en el punto M sea paralela a la recta $2x - y + 3 = 0$ y que $f''(x) = 3x^2$. Sol.: $f(x) = \frac{x^2 + 8x + 4}{4}$

2.- INTEGRACIÓN POR CAMBIO DE VARIABLE

Para calcular una integral del tipo $\int f\,[g(x)] \cdot g'(x)\,dx$ se hace un cambio de variable

$$\begin{cases} t = g(x) \\ dt = g'(x)\,dx \end{cases} \quad \text{de forma que queda} \int f(t)\,dt$$

En la práctica se busca en el integrando una función t = g(x) cuya derivada g´(x) (salvo una constante) aparezca multiplicando en el integrando y de forma que $\int f(t)\,dt$ se sepa integrar.

Ejemplos:

1) $$\int x^2 e^{x^3} dx = \left\{ \begin{aligned} & t = x^3 \\ & dt = 3x^2\,dx \to x^2\,dx = \frac{1}{3}dt \end{aligned} \right\} = \int e^t \cdot \frac{1}{3}\,dt = \frac{1}{3}\int e^t\,dt = \frac{1}{3}(e^t + k) = \frac{1}{3}e^{x^3} + k'$$

2) $$\int (x-2)\cos(x^2 - 4x + 5)dx = \left\{ \begin{aligned} & t = x^2 - 4x + 5 \\ & dt = (2x-4)dx = 2(x-2)dx \to (x-2)\,dx = \frac{1}{2}dt \end{aligned} \right\} = \int (\cos t)\,\frac{1}{2}\,dt = \frac{1}{2}\int \cos t\,dt = \frac{1}{2}(sen\,t + k) = \frac{1}{2}sen(x^2 - 4x + 5) + k'$$

Ejercicio 5 Halla: a) $\int \frac{3x+4}{x^2+1}dx$ b) $\int \frac{x-3}{x^2+49}dx$ c) $\int \frac{1}{e^x+1}dx$

Ejercicio 6 Sea f la función definida por $f(x)=\dfrac{\ln(x)}{2x}$ para x > 0 y sea F la primitiva de f tal que F(1) = 2.
a) Calcula F´(e). b) Halla la ecuación de la recta tangente a la gráfica de F en el punto de abscisa x = e.

Ejercicio 7 Sea f la función definida por $f(x)=\dfrac{x}{\sqrt{4-9x^4}}$. Halla la primitiva F de f que cumple F(0) = 3.

Practica tú:

6 Halla: a) $\displaystyle\int \frac{1}{\sqrt{(x+2)^3}}\,dx$ b) $\displaystyle\int \sqrt{1+2x}\,dx$ c) $\displaystyle\int \cos(5x+1)\,dx$ d) $\displaystyle\int x^2\cos x^3\,dx$ e) $\displaystyle\int (x+1)\,sen\,(3x^2+6x+1)\,dx$

f) $\displaystyle\int \frac{6x+3}{x^2+x-6}dx$ g) $\displaystyle\int (x-1)\,e^{x^2-2x+5}dx$ h) $\displaystyle\int \frac{dx}{4+x^2}$ i) $\displaystyle\int \frac{1+2x}{1+x^2}\,dx$ j) $\displaystyle\int \frac{\cos x}{sen^2 x}\,dx$ k) $\displaystyle\int \frac{\text{sen } x+\text{tg } x}{\cos x}\,dx$ l) $\displaystyle\int \frac{\ln^3 x}{x}\,dx$

Sol.: a) $F(x)=\dfrac{-2}{\sqrt{x+2}}+c$ b) $F(x)=\dfrac{\sqrt{(1+2x)^3}}{3}+c$ c) $F(x)=\dfrac{1}{5}\,\text{sen}(5x+1)+c$ d) $F(x)=\dfrac{\text{sen}\,(x^3)}{3}+c$

e) $F(x)=\dfrac{-\cos(3x^2+6x+1)}{6}+c$ f) $F(x)=3\ln\left|x^2+x-6\right|+c$ g) $F(x)=\dfrac{e^{x^2-2x+5}}{2}+c$ h) $F(x)=\dfrac{\text{arctg}(\frac{x}{2})}{2}+c$

i) $F(x)=\text{arctg } x+\ln(1+x^2)+c$ j) $F(x)=\dfrac{-1}{\text{sen } x}+c$ k) $F(x)=\ln\left|-\cos x\right|+\dfrac{1}{\cos x}+c$ l) $F(x)=\dfrac{\ln^4 x}{4}+c$

7 Considera la función f dada por $f(x)=\sqrt{x}+\dfrac{\ln(x)}{x}$ para x > 0.
a) Halla todas las primitivas de f. b) Determina la primitiva de f que toma el valor 3 para x = 1.

Sol.: a) $F_c(x)=\dfrac{2\sqrt{x^3}}{3}+\dfrac{\ln^2(x)}{2}+c,$ con $c\in R$ b) $F(x)=\dfrac{2\sqrt{x^3}}{3}+\dfrac{\ln^2(x)}{2}+\dfrac{7}{3}$

8 Determina la función f: R → R tal que f´´(x) = −2 sen(2x), f(0) = 1 y $f(\frac{\pi}{2})=0$ Sol.: $f(x)=\dfrac{\text{sen}(2x)}{2}-\dfrac{2x}{\pi}+1$

9 Considera la funciones f :(0,π) → R definida por $f(x)=\dfrac{sen(x)}{\cos^3(x)}$. Halla la primitiva de f que toma el valor 1 cuando x = $\dfrac{\pi}{3}$ (Sugerencia: Se puede hacer el cambio de variable t = cos x). Sol.: $F(x)=\dfrac{1}{2\cos^2 x}-1$

10 Sea f: D → ℜ la función definida por $f(x)=\dfrac{1}{x\,(\ln(x))^2}$

(a) Determina el conjunto D sabiendo que está formado por todos los puntos x ∈ ℜ para los que existe f(x).
Sol.: $D=(0,\infty)=R^+$

(b) Usa el cambio de variable t = Ln(x) para calcular una primitiva de f. Sol.: $F_c(x)=\dfrac{-1}{\ln x}+c,$ con $c\in R$

3.- INTEGRACIÓN POR PARTES

Tiene por objeto transformar una integral en otra más sencilla aplicando una expresión deducida a partir de la derivada de un producto de funciones.

Sean $u=u(x)$ y $v=v(x)$ dos funciones derivables. Aplicando la regla de la derivada del producto:

$$d(uv)=udv+vdu \;\rightarrow\; udv=d(uv)-vdu \xrightarrow{\text{Integrando}} \int u\,dv=u\,v-\int v\,du$$

El método consiste en expresar el integrando como producto de dos factores u y dv, de tal forma que la nueva integral $\int vdu$ sea más fácil de calcular.

Podemos usar el esquema siguiente:

$$\int u\,.\,v'dx=\int u\,.\,dv \rightarrow \begin{bmatrix} u & \rightarrow & du=u'\,dx \\ dv=v'dx & \rightarrow & v=\int v'dx \end{bmatrix} \Rightarrow \boxed{\int u\,dv=u\,v-\int v\,du}$$

Si una de las partes del integrando no se sabe integrar, se tomará esta función como u

Ejercicio 8 Halla: a) $\int (x^2-1)\,e^{-x}\,dx$ b) $\int e^x sen(2x)\,dx$ c) $\int x^2 \cos 3x\,dx$ d) $\int x \ln x\,dx$

e) $\int arcsen\ x\ dx$ f) $\int sen\left(\ln x\right)\,dx$ g) $\int \sqrt{25-x^2}\ dx$ (Sugerencia: Hacer el cambio x = 5 sen t)

Ejercicio 9 Sea f: R → R la función definida por f(x) = e^x cos(x).
a) Calcula la ecuación de la recta tangente a la gráfica de f en el punto de abscisa x = 0.
b) Calcula la primitiva de f cuya gráfica pasa por el punto (0, 0).

Ejercicio 10 Determina la función f: (0, ∞) → R sabiendo que f´´(x) = ln(x) y que su gráfica tiene tangente horizontal en el punto P(1, 2).

Practica tú:

11 Calcula: a) $\int (x-1)e^x\,dx$ b) $\int x^3 e^x\,dx$ c) $\int e^{2x} sen(x)\,dx$ d) $\int e^{-x}\cos x\,dx$ e) $\int x\cos x\,dx$

f) $\int x^3 \ln x\ dx$ g) $\int arctg\ x\ dx$ h) $\int \cos^2 x\ dx$

Sol.: a) $F(x) = e^x(x-2)+c$ b) $F(x) = e^x(x^3-3x^2+6x-6)+c$ c) $F(x) = \frac{1}{5}e^{2x}(2\ sen\ x - \cos x)+c$

d) $F(x) = \frac{1}{2}e^{-x}(sen\ x - \cos x)+c$ e) $F(x) = x\ sen\ x + \cos x + c$ f) $F(x) = \frac{x^4(4\ln x - 1)}{16}+c$

g) $F(x) = x\ arctg\ x - \frac{\ln(1+x^2)}{2}+c$ h) $F(x) = \frac{x + sen\ x\cos x}{2}+c$

12 Sea f la función f: R → R definida por f(x) = x^2 cos(x). Determina la primitiva de f cuya gráfica pasa por el punto (π, 0).
Sol.: $F(x) = x^2\ sen\ x + 2x\cos x - 2\ sen\ x + 2\pi$

13 Sea la función f: R → R definida por f(x) = $(1-x^2)\,e^{-x}$. Determina la primitiva de f cuya gráfica pasa por el punto (–1, 0)
Sol.: $F(x) = e^{-x}\,(x^2+2x+1)$

14 Sea f: (0, ∞) → R la función definida por f(x) = x [1 – ln(x)]. Determina la primitiva de f cuya gráfica pasa por el punto P(1, 1). Sol.: $F(x) = \frac{3x^2-2x^2\ln x+1}{4}$

15 Sea f: R → R la función definida por f(x) = x^2 sen(2x). Calcula la primitiva de f cuya gráfica pasa por el punto (0, 1). Sol.: $F(x) = \frac{2x^2\cos(2x)+2x\,sen(2x)+\cos(2x)+3}{4}$

16 Sea f: R → R la función definida por f(x) = (x – 1) e^{2x}. Calcula la primitiva de f cuya gráfica pasa por el punto (1, e^2). Sol.: $F(x) = \frac{e^{2x}(2x-3)+5e^2}{4}$

17 Determina la función f :(–1, +∞) → R tal que f´´(x) = 1/x y su gráfica tiene tangente horizontal en P(1, 1).
Sol.: $f(x) = x\left(\ln|x| - 1\right) + 2$

4.- INTEGRACIÓN DE FUNCIONES RACIONALES

Supongamos que queremos calcular una integral del tipo $\int \frac{p(x)}{q(x)}dx$, donde $p(x)$ y $q(x)$ son polinomios.

Si grado($p(x)$) ≥ grado($q(x)$) se efectúa la división y se expresa en forma mixta: $\frac{p(x)}{q(x)} = c(x) + \frac{r(x)}{q(x)}$, quedando reducida la integral inicial a la de un polinomio más una integral racional donde el grado($r(x)$) < grado($q(x)$).

Sólo consideraremos entonces integrales de este último tipo.

Para resolver esta, descompondremos $\frac{r(x)}{q(x)}$ en fracciones simples lo que equivaldrá a sustituir la integral inicial por una suma de integrales más elementales.

Descomposición en fracciones simples

Para descomponer una fracción algebraica propia $\frac{p(x)}{q(x)}$ en suma de fracciones simples se factoriza el polinomio q(x). Supongamos que q(x) tiene todas las raíces reales. (Sólo se estudia este caso que es el más simple).
Una vez factorizado q(x):

A cada factor de q(x) del tipo (x – r) le corresponde una fracción simple $\frac{A}{x-r}$

A cada factor del tipo $(x – r)^2$ le corresponden 2 fracciones: $\frac{M}{(x-r)^2}+\frac{N}{x-r}$

Si el factor fuese $(x – r)^3$ le corresponderían 3 fracciones: $\frac{M}{(x-r)^3}+\frac{N}{(x-r)^2}+\frac{P}{x-r}$

El esquema es el siguiente:

$$\begin{aligned}\frac{p(x)}{q(x)} &= \frac{A}{x-a}+\frac{B}{x-b}+\frac{C}{x-c}+\dots\dots\dots(\textit{factores lineales simples})\\ &+\frac{M}{(x-m)^2}+\frac{N}{x-m}+\dots\dots\dots(\textit{factor lineal doble})\\ &+\frac{S}{(x-p)^3}+\frac{T}{(x-p)^2}+\frac{U}{x-p}\dots\dots\dots(\textit{factor lineal triple})\\ &+\dots\dots\dots\dots\dots\dots\end{aligned}$$

Para la determinación de las constantes A, B, C,....,M, N,.....,S, T, U.... se hace lo siguiente:

1º) Se multiplica la igualdad anterior por q(x), obteniéndose la igualdad entre polinomios

2º) Se dan valores numéricos en ambos miembros, tantos como constantes haya que determinar. Por comodidad se utilizan las raíces, obteniéndose un sistema de ecuaciones.

3º) Se resuelve el sistema y las soluciones obtenidas se sustituyen en las fracciones simples.

Ejemplo: Vamos a descomponer en fracciones simples la función racional $f(x)=\frac{3x+5}{x^3-x^2-x+1}$

El denominador se descompone usando la regla de Ruffini y queda $(x + 1)(x – 1)^2$.

Entonces podremos descomponer así: $f(x)=\frac{3x+5}{x^3-x^2-x+1}=\frac{A}{x+1}+\frac{B}{(x-1)^2}+\frac{C}{x-1}$

Multiplicando la igualdad anterior por $(x + 1)(x – 1)^2$ resulta $3x + 5 = A(x – 1)^2 + B(x + 1) + C(x + 1)(x – 1)$
Dando valores:

Para x = 1 tenemos 8 = 2B ⇒ B = 4

Para x = –1 tenemos 2 = 4A ⇒ A = $\frac{1}{2}$

Para x = 0 (por ejemplo) tenemos 5 = A+B – C = $\frac{1}{2}$ + 4 – C ⇒ C = $\frac{-1}{2}$

Entonces la descomposición en fracciones simples es: $\frac{3x+5}{x^3-x^2-x+1}=\frac{1/2}{x+1}+\frac{4}{(x-1)^2}+\frac{-1/2}{x-1}$.

Integración de las fracciones simples

- Fracciones correspondientes a raíces reales simples: $\int\frac{A}{x-r}dx = A.\,ln|x-r|+k$ (Inmediata)

- Fracciones correspondientes a raíces reales múltiples: $\int\frac{A}{(x-r)^n}\,dx = A.\frac{(x-r)^{-n+1}}{-n+1}+k$ (Inmediata)

Por ejemplo, $\int\frac{3x+5}{x^3-x^2-x+1}\,dx=\int\frac{1/2}{x+1}\,dx+\int\frac{4}{(x-1)^2}\,dx+\int\frac{-1/2}{x-1}\,dx=\frac{1}{2}\cdot\ln|x+1|-\frac{4}{x-1}-\frac{1}{2}\cdot\ln|x-1|+k$

Ejercicio 11 Determina: a) $\int \frac{x^3+2x^2-2x+3}{x^2-1}\,dx$ b) $\int \frac{e^x\,dx}{(e^{2x}-1)(e^x+1)}$. (Sugerencia: efectúa el cambio t = e^x)

c) $\int \frac{\sqrt{2x+1}}{2x+1+\sqrt{2x+1}}\,dx$ (Sugerencia : $t=\sqrt{2x+1}$)

Ejercicio 12 De la función f: (–1, +∞) → R se sabe que $f'(x)=\frac{3}{(x+1)^2}$ y que f(2) = 0.

(a) Determina f. (b) Halla la primitiva de f cuya gráfica pasa por el punto (0, 1).

Practica tú:

18 Calcula: a) $\int \frac{x^2+1}{x-1}\,dx$ b) $\int \frac{dx}{x(x-1)^2}$ c) $\int \frac{(x^3+x^2)\,dx}{x^2+x-2}$ d) $\int \frac{x+2}{x^3-x^2-4x+4}\,dx$

Sol.: a) $F(x)=\frac{x^2}{2}+x+2\ln|x-1|+c$ b) $F(x)=\ln|x|-\frac{1}{x-1}-\ln|x-1|+c$

c) $F(x)=\frac{x^2}{2}+\frac{2}{3}\ln|x-1|+\frac{4}{3}\ln|x+2|+c$ d) $F(x)=\ln|x-2|-\ln|x-1|+c$

19 Determina: a) $\int \frac{dx}{(x-2)\sqrt{x+2}}$ (Sugerencia: $\sqrt{x+2}=t$) Sol.: $F(x)=\frac{\ln\left|\sqrt{x+2}-2\right|-\ln\left|\sqrt{x+2}+2\right|}{2}+c$

b) $\int \frac{dx}{2x\left(x+\sqrt{x}\right)}$ (Sugerencia: cambio de variable t = $\sqrt{x}$) Sol.: $F(x)=\ln\left|\sqrt{x}+1\right|-\ln\sqrt{x}-\frac{1}{\sqrt{x}}+c$

c) $\int \frac{1+x}{1+\sqrt{x}}\,dx$ (Sugerencia: Se puede hacer el cambio de variable $t=\sqrt{x}$)

Sol.: $F(x)=\frac{2\sqrt{x^3}}{3}-x+4\sqrt{x}-4\ln\left|\sqrt{x}+1\right|+c$

d) $\int \frac{e^{2x}-3e^x}{e^x+1}\,dx$ (puedes hacer el cambio t = e^x) Sol.: $F(x)=e^x-4\ln\left(e^x+1\right)+c$

20 Sea la función definida por f(x) = x ln(x+1) para x > –1. Determina la primitiva de f cuya gráfica pasa por el punto (1, 0). Sol.: $F(x)=\frac{2x^2\ln(x+1)-x^2+2x-2\ln(x+1)-1}{4}$

21 Dada la función f : R → R definida por f(x) = Ln(1 + x^2), halla la primitiva de f cuya gráfica pasa por el origen de coordenadas. Sol.: $F(x)=x\ln(1+x^2)-2x+2\,\text{arctg}\,x$

22 Sea f la función definida por $f(x)=\frac{x^2+1}{x^2(x-1)}$, para x ≠ 0 y x ≠ 1 y sea F la primitiva de f cuya gráfica pasa por el punto P(2, ln(2)).

a) Calcula la recta tangente a la gráfica de F en el punto P. b) Determina la función F.

Sol.: a) rtg: $y=\frac{5}{4}(x-2)+\ln 2$ b) $F(x)=\frac{1}{x}-\ln|x|+2\ln|x-1|+2\ln 2-\frac{1}{2}$

23 Sea la función f dada por $f(x)=\frac{1}{x^2+x}$, para x ≠ – 1 y x ≠ 0. Determina una primitiva F de f tal que F(1) = 1.

Sol.: $F(x)=\ln|x|-\ln|x+1|+\ln 2+1$

24 Calcula una primitiva de la función f definida por $f(x)=\frac{2x^2+10x}{x^2+2x-3}$, para x ≠ 1 y x ≠ –3.

Sol.: $F(x)=2x+3\ln|x-1|+3\ln|x+3|+c$

25 Sea g: (0, +∞) → R la función definida por $g(x)=\frac{1}{x+\sqrt{x}}$. Determina la primitiva de g cuya gráfica pasa por el punto P(1, 0). (Sugerencia: Se puede hacer el cambio de variable t = $\sqrt{x}$) Sol.: $G(x)=2\ln\left(\sqrt{x}+1\right)-2\ln 2$

26 Sea $I=\int \dfrac{2}{2-e^{x}}\,dx$. (a) Expresa I haciendo el cambio de variable t = e^x. (b) Calcula I.

Sol.: a) $I=\int \dfrac{2\ dt}{t\ (2-t)}$ b) $I=\ \ln\left(e^{x}\right)\ -\ \ln\left(2-e^{x}\right)+c$

27 Sea $I=\int \dfrac{5\,dx}{1+\sqrt{e^{-x}}}$. (a) Expresa I haciendo el cambio de variable $t^2 = e^{-x}$. (b) Determina I.

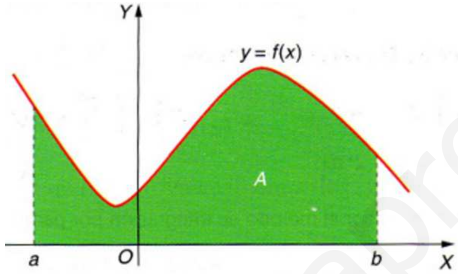
Sol.: a) $I=\int \dfrac{-10\ dt}{t\ (1+t)}$ b) $I=\ -10\ln\left(\sqrt{e^{-x}}\right)\ +\ 10\ \ln\left(1+\sqrt{e^{-x}}\right)+c$

5.- INTEGRAL DEFINIDA

Sea una función $f:[a,b]\to$ R. La integral definida de f en el intervalo $[a,b]$ se representa por $\int_a^b f(x)\,dx$.

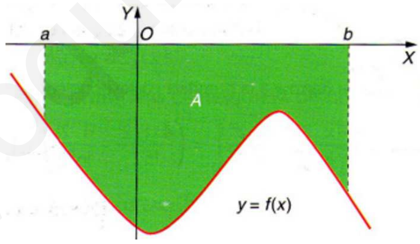
- Si f(x) > 0 en el intervalo $[a,b]$, entonces la integral definida es el área comprendida entre la gráfica de f y el eje X:

$$\boxed{\int_a^b f(x)\,dx = A}$$



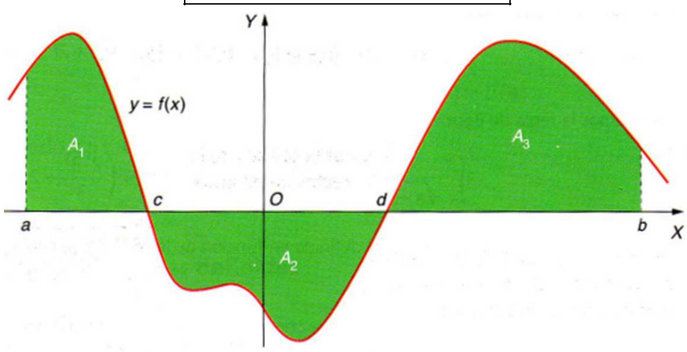
- Si f(x) < 0 en el intervalo $[a,b]$, entonces la integral definida es el área comprendida entre la gráfica de f y el eje X pero con signo negativo:

$$\boxed{\int_a^b f(x)\,dx = -A}$$



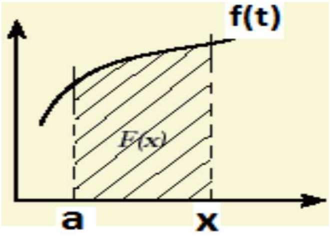
- Si f(x) cambia de signo en el intervalo $[a,b]$, entonces la integral definida es la suma de las áreas de los recintos situados por encima y por debajo del eje X (positiva si la gráfica está por encima del eje X y negativa si está por debajo):

$$\boxed{\int_a^b f(x)\,dx = A_1 - A_2 + A_3}$$



Teorema fundamental del cálculo integral

Dada una función f continua en $[a,b]$, se llama función área a la función $F:[a,b] \to$ R, $F(x)=\int_a^x f(t)\,dt$



Geométricamente, si f(t) > 0 en [a, x] F(x) es el área comprendida entre la gráfica de f y el eje X en el intervalo [a, x]

El teorema fundamental del cálculo integral dice que F(x) es derivable y su derivada es la función f: $F'(x)=f(x)$

Por tanto, $\begin{cases} \text{Si } f(t) > 0, \text{ en [a, b], entonces F(x) es creciente en dicho intervalo} \\ \text{Si } f(t) < 0, \text{ en [a, b], entonces F(x) es decreciente en dicho intervalo} \end{cases}$

Regla de Barrow

Si f es una función continua en $[a,b]$ y $F(x)$ es cualquier primitiva de f entonces $\boxed{\int_a^b f(x)\,dx=\left[F(x)\right]_a^b=F(b)-F(a)}$

Ejercicio 13 Considera la función f dada por $f(x)=\sqrt{x}+\dfrac{\ln(x)}{x}$ para x > 0. Halla $\int_1^3 f(x)\,dx$

Ejercicio 14 Sea f una función continua en el intervalo [2, 3] y F una primitiva de f tal que F(2) = 1 y F(3) = 2, Calcula:

(a) $\int_2^3 f(x)\,dx$ (b) $\int_2^3 (5f(x)-7)\,dx$ (c) $\int_2^3 [F(x)]^2 f(x)\,dx$

Ejercicio 15 Calcula las siguientes integrales definidas: a) $\int_0^{\pi^2} \operatorname{sen}(\sqrt{x})\,dx$ (Sugerencia: Haz el cambio $t=\sqrt{x}$)

b) $\int_0^{\pi/4} \dfrac{x}{\cos^2(x)}\,dx$ (Sugerencia: integrar por partes) c) $\int_0^1 \dfrac{x^2}{2x^2-2x-4}\,dx$

Ejercicio 16 Se sabe que la función f: $\mathfrak{R} \to \mathfrak{R}$ definida por f(x) = $ax^2 + bx + c$ tiene máximo absoluto en el punto de abscisa x = 1, que su gráfica pasa por el punto (1, 4) y que $\int_{-1}^3 f(x)\,dx=\dfrac{32}{2}$. Halla a, b y c.

Ejercicio 17 Calcula los valores de a y b sabiendo que la función f: (0, 1) → R definida por f(x)= $ax^2 + b\ln(x)$, tiene un extremo relativo en x = 1 y que $\int_1^4 f(x)\,dx=27-8\ln(4)$

Ejercicio 18 Calcula el valor de a > 0 para el que se verifica $\int_0^a \dfrac{x}{2+x^2}\,dx=1$

Practica tú:

28 Determina las siguientes integrales definidas: a) $\int_0^{\pi} x^2 sen(x)\,dx$ b) $\int_{-1}^1 \ln(4-x)\,dx$ c) $\int_{-2}^{-1} \dfrac{dx}{(x^2-x)(x-1)}$

d) $\int_0^1 \dfrac{3x^3+1}{x^2-x-2}\,dx$ e) $\int_2^4 \dfrac{e^x}{1+\sqrt{e^x}}\,dx$ (Sugerencia: se puede hacer el cambio de variable $t=\sqrt{e^x}$)

Sol.: a) π^2+4 b) $5\ln 5-3\ln 3-6$ c) $\dfrac{1}{6}+\ln 3-\ln 4$ d) $\dfrac{9}{2}-\dfrac{23}{3}\ln 2$ e) $2e^2-2e+2\ln\dfrac{1+e}{1+e^2}$

29 Sea $I=\int_0^1 \dfrac{x}{1+\sqrt{1-x}}\,dx$. (a) Expresa la integral I aplicando el cambio de variable $t=\sqrt{1-x}$

(b) Calcula el valor de I. Sol.: a) $\int_1^0 (2t^2-2t)dt$ b) $\dfrac{1}{3}$

30 Sea f: R → R la función dada por f(x) = ax^2 + b. Halla los valores de a y b sabiendo $\int_0^6 f(x)\,dx = 6$ y que la pendiente de la recta tangente a la gráfica de la función f en el punto de abscisa 3 vale −12. Sol.: $a=-2$, $b=25$

31 Sea f: R → R la función definida por f(x) = ax^3+ bx^2+ cx + d. Se sabe que f tiene un máximo local en x = 1, que el punto (0, 1) es un punto de inflexión de su gráfica y que $\int_0^1 \mathrm{f(x)}\,dx = \frac{9}{4}$. Calcula a, b, c y d. Sol.: $a=-1$ $b=0$ $c=3$ $d=1$

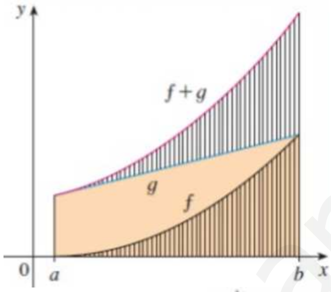
32 De la función f: R → R definida por f(x) = ae^x − bx, donde a, b ∈ R se sabe que su gráfica tiene tangente horizontal en x = 0 y que $\int_0^1 f(x)\,dx = e - \frac{3}{2}$. Halla los valores de a y b. Sol.: $a=b=\frac{2e-3}{2e-1}$

6.- PROPIEDADES DE LA INTEGRAL DEFINIDA

1) $\int_a^a f(x)\,dx = 0$, para cualquier función f

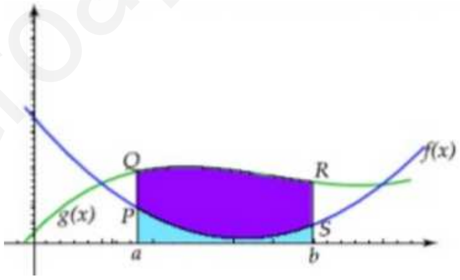
2) $\begin{cases} Si\ \ f(x)>0\ ,\ \forall\, x\in[a,b] \Rightarrow \int_a^b f(x)\,dx > 0 \\ Si\ \ f(x)<0\ ,\ \forall\, x\in[a,b] \Rightarrow \int_a^b f(x)\,dx < 0 \end{cases}$

3) $\int_a^b (f+g)(x)\,dx = \int_a^b f(x)\,dx + \int_a^b g(x)\,dx$

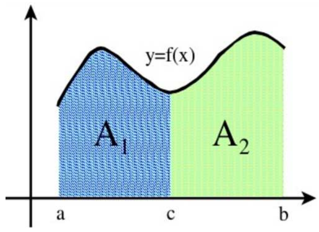


4) $\int_a^b c.(f)(x)\,dx = c.\int_a^b f(x)\,dx \quad c\in\Re$

5) $Si\ \ \forall x\in[a,b],\ \ f(x)\le g(x) \Rightarrow \int_a^b f(x)\,dx \le \int_a^b g(x)\,dx$



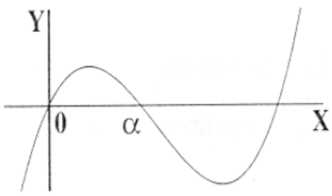
6) $Si\ \ a<c<b \Rightarrow \int_a^c f(x)\,dx + \int_c^b f(x)\,dx = \int_a^b f(x)\,dx$



Ejercicio 19 Dada la función g: R → R, definida por g(x) = 2x + |x^2 − 1|. (a) Esboza la gráfica de g. (b) Calcula $\int_0^2 \mathrm{g(x)}\,dx$

Ejercicio 20 Consideremos $F(x) = \int_0^x f(t)\,dt$

(a) Si f fuese la función cuya gráfica aparece en el dibujo, indica si son verdaderas o falsas las siguientes afirmaciones, razonando la respuesta:



i) F(α) = 0 ii) F´(α) = 0 iii) F es creciente en (0, α) (b) Calcula F(1) siendo $f(t) = \frac{1}{\sqrt{t+1}}$

Ejercicio 21 Sea f: (−2,0) → $\Re$ la función definida mediante $f(x)=\begin{cases} \dfrac{\alpha}{x}, & si\ -2<x\le -1 \\ \dfrac{x^2-\beta}{2}, & si\ -1<x<0 \end{cases}$

(a) Determina □ y □ sabiendo que f es derivable. (b) Calcula $\int_{-2}^{1} f(x)\,dx$

Practica tú:

33 Sea f: (0, 2) → $\Re$ la función definida por $f(x)=\begin{cases} \ln(x), & si\ \ 0<x\le 1 \\ \ln(2-x), & si\ \ 1<x<2 \end{cases}$

(a) Estudia la derivabilidad de f en el punto x = 1. Sol.: No es derivable (aunque sí es continua)

(b) Calcula $\int_{1/2}^{3/2} f(x)\,dx$ Sol.: $\ln(2)-1$

34 Sea f: $\Re \to \Re$ la función definida por $f(x)=\begin{cases} 1+mx, & si\ \ x<0 \\ e^{-x}, & si\ \ x\ge 0 \end{cases}$

(a) Determina el valor de m sabiendo que f es derivable. Sol.: $m=-1$ (b) Haz un esbozo de la gráfica de f.

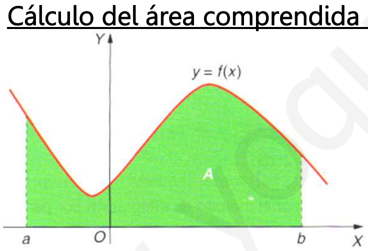
(c) Calcula $\int_{-1}^{1} f(x)\,dx$. Sol.: $\dfrac{5e-2}{2e}$

35 Se sabe que la función f: [0, ∞) → R definida por $f(x)=\begin{cases} \sqrt{ax}, & si\ \ 0\le x\le 8 \\ \dfrac{x^2-32}{x-4}, & si\ \ x>8 \end{cases}$ es continua en [0, ∞).

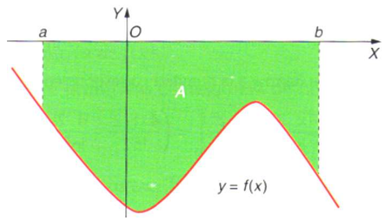
(a) Halla el valor de a. Sol.: $a=8$ (b) Calcula $\int_{0}^{10} f(x)\,dx$ Sol.: $\dfrac{206}{3}+16\ln(2)-16\ln(3)$

7.- APLICACIONES DE LA INTEGRAL DEFINIDA: CÁLCULO DE ÁREAS

Cálculo del área comprendida entre la gráfica de una función y el eje X en [a, b]

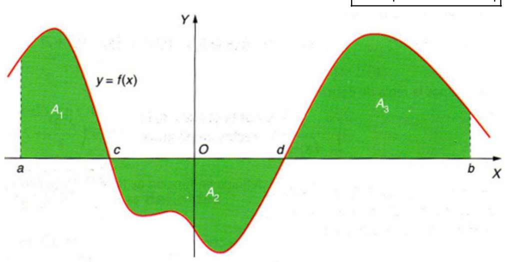


$$\boxed{A=\int_a^b f(x)\,dx}$$



$$\boxed{A=-\int_a^b f(x)\,dx}$$

En todo caso, cuando la gráfica de f no atraviese al eje X el área es $\boxed{A=\left|\int_a^b f(x)\,dx\right|}$



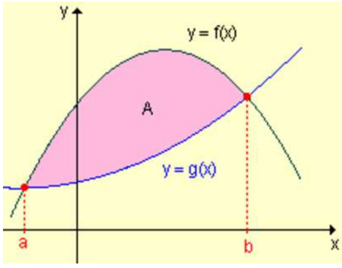
$$\boxed{A=A_1+A_2+A_3=\int_a^c f(x)\,dx\ -\ \int_c^d f(x)\,dx\ +\ \int_d^b f(x)\,dx}$$

En todo caso, cuando la gráfica de f atraviese al eje X en los puntos c y d, el área es:

$$\boxed{A=\left|\int_a^c f(x)\,dx\right|\ +\ \left|\int_c^d f(x)\,dx\right|\ +\ \left|\int_d^b f(x)\,dx\right|}$$

Cálculo del área comprendida entre las gráficas de dos funciones en un intervalo [a, b]

Si f(x) ≥ g(x) en el intervalo [a, b], el área es $\boxed{A=\int_a^b \left[f(x)-g(x)\right]dx}$



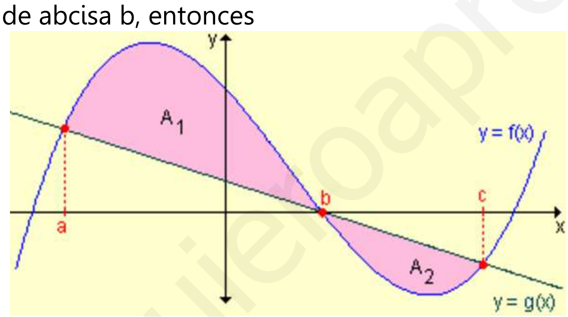
Si fuese f(x) ≤ g(x) en el intervalo [a, b], el área sería

$$A=\int_a^b \left[g(x)-f(x)\right]dx=\int_a^b -\left[f(x)-g(x)\right]dx=-\int_a^b \left[f(x)-g(x)\right]dx$$

En todo caso, sea f(x) ≥ g(x) ó f(x) ≤ g(x) en el intervalo [a, b]

$$\boxed{A=\left|\int_a^b \left[f(x)-g(x)\right]dx\right|}$$

Si las gráficas se cortan en un punto de abcisa b, entonces

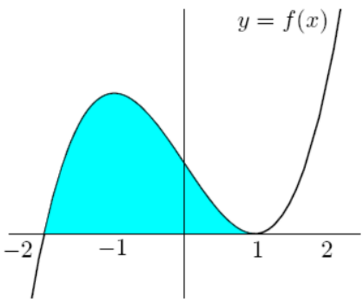


$$\boxed{A=A_1+A_2=\left|\int_a^b \left[f(x)-g(x)\right]dx\right|+\left|\int_b^c \left[f(x)-g(x)\right]dx\right|}$$

$\boxed{\text{Ejercicio 23}}$ Sea f: $\mathfrak{R}\to\mathfrak{R}$ la función definida por $f(x)=-\frac{1}{3}x^2+\frac{2}{3}x+1$

(a) Halla la ecuación de la recta tangente a la gráfica de f en un punto de la misma de ordenada y = 1, teniendo en cuenta que dicha recta tangente tiene pendiente negativa.
(b) Calcula el área de la región del plano limitada por la gráfica de f, la recta tangente obtenida y el eje de ordenadas.

$\boxed{\text{Ejercicio 24}}$ Se sabe que la gráfica de la función f: R → R definida por f (x)= x^3+ ax^2+ bx + c es la que aparece en el dibujo.



(a) Determina f. (b) Calcula el área de la región sombreada.

Ejercicio 25 La curva $y=\frac{1}{2}x^2$ divide el rectángulo de vértices A = (0, 0) , B = (2, 0) , C=(2, 1) y D = (0, 1) en dos recintos.

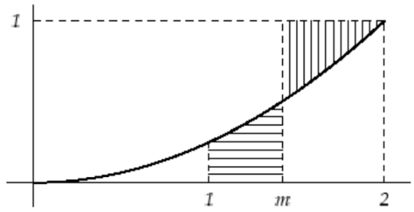
a) Dibujar dichos recintos b) Hallar el área de cada uno de ellos

Ejercicio 26 Dada la función f: R → R definida por $f(x)= -2x^2 + 3x - 1$

(a) Prueba que las rectas $y = -x +1$ e $y = 3x - 1$ son tangentes a su gráfica.

(b) Halla el área del recinto limitado por la gráfica de f y las rectas mencionadas en el apartado anterior.

Ejercicio 27 En la figura adjunta puedes ver representada en el intervalo [0, 2] la gráfica de la parábola de ecuación $y = x^2/4$. Halla el valor de m para el que las áreas de las superficies rayadas son iguales.



Ejercicio 28 Considera la función f: R → R definida por $f(x)=\frac{3x(2m-x)}{m^3}$, con $m > 0$.

Calcula el área del recinto encerrado por la gráfica de f y el eje OX.

Ejercicio 29 Determina b sabiendo que $b > 0$ y que el área del recinto limitado por la parábola de ecuación $y=\left(\frac{1}{3}x-b\right)^2$ y los ejes coordenados es igual a 8.

Ejercicio 30 Sea f: R → R la función definida por $f(x) = x^3 - 3x^2 - x + 3$.

a) Halla, si existe, el punto de la gráfica de f en el que la recta tangente es $y = 3 - x$.

b) Calcula el área del recinto limitado por la gráfica de f y la recta del apartado anterior.

Ejercicio 31 Sea f: R → R la función definida por $f(x) = x^4$. Encuentra la recta horizontal que corta a la gráfica de f formando con ella un recinto con área 8/5

Ejercicio 32 Sea la función f definida por $f(x)=\frac{2}{x^2-1}$ para $x \neq -1$ y $x \neq 1$.

(a) Halla una primitiva de f.

(b) Halla k para que el área del recinto limitado por el eje de abscisas y la gráfica de f en el intervalo [2, k] sea ln(2)

Ejercicio 33 Calcula el valor de $b > 0$, sabiendo que el área de la región comprendida entre la curva $y=\sqrt{x}$ y la recta $y = bx$ es de 4/3 unidades cuadradas.

Ejercicio 34 Sea f: R → R definida por $f(x) = | x^2 - 4 |$.

(a) Haz un esbozo de la gráfica de f. (b) Calcula el área del recinto limitado por la gráfica de f y la recta $y = 5$.

Ejercicio 35 Sea f: R → R la función definida por $f(x)=\begin{cases} x\,|x|, & si\ \ x\le 2 \\ 6-x, & si\ \ x>2 \end{cases}$

(a) Esboza la gráfica de f. (b) Estudia la derivabilidad de f.

(c) Calcula el área comprendida entre la gráfica de f y el eje de abscisas.

Ejercicio 36 Sea f la función definida por $f(x)=\begin{cases} e^x-1, & si\ \ x\ge 0 \\ x\,e^{-x^2}, & si\ \ x<0 \end{cases}$

(a) Estudia la derivabilidad de f en x = 0 y, si es posible, calcula la derivada de f en dicho punto.

(b) Calcula el área del recinto limitado por la gráfica de f, el eje de abscisas y la recta $x = -1$.

Ejercicio 37 Sea f: (0, ∞) → R definida por $f(x) = 1 + \ln(x)$

a) Comprueba que la recta $y=1+\frac{1}{e}x$ es la recta tangente a la gráfica de f en el punto de abscisa x = e

b) Calcula el área del recinto limitado por la gráfica de f, el eje de abscisa y la recta tangente del apartado a)

Ejercicio 37 bis Sea f: R → R la función definida por $f(x) = xe^{-x}$. Esboza el recinto limitado por la curva y = f(x), los ejes coordenados y la recta x = –1. Calcula su área.

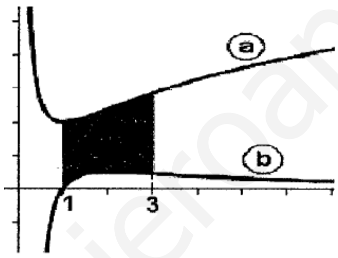
Ejercicio 38 Considera la función f: $\Re \to \Re$ definida por $f(x) = e^x + 4e^{-x}$.
(a) Determina los intervalos de crecimiento y de decrecimiento de f y halla sus extremos absolutos o globales (puntos en los que se obtienen y valores que alcanza la función).
(b) Calcula el área del recinto limitado por la gráfica de f, el eje de abscisas y las rectas x = 0 y x = 2.

Ejercicio 39 Sean f, g: R → R las funciones definidas por f(x) = sen(x) y g(x) = cos(x), respectivamente.
(a) Realiza un esbozo de las gráficas de f y g en el intervalo [0, π/2].
(b) Calcula el área total de los recintos limitados por ambas gráficas y las rectas x = 0 y x = π/2.

Ejercicio 40 Sean f: R → R y g: R → R las funciones definidas por f(x) = | x(x – 2) | y g(x) = x + 4.
a) Esboza las gráficas de f y g sobre los mismos ejes. Calcula el punto de corte entre ambas gráficas.
b) Calcula el área del recinto limitado por las gráficas de f y g.

Ejercicio 41 Sean f y g las funciones definidas por f(x) = 2 − x y $g(x) = \dfrac{2}{x+1}$ para x ≠ −1.
a) Calcula los puntos de corte entre las gráficas de f y g.
b) Esboza las gráficas de f y g sobre los mismos ejes.
c) Halla el área del recinto limitado por las gráficas de f y g.

Ejercicio 42 Las dos gráficas del dibujo corresponden a la función f: (0, ∞) → R definida por $f(x) = \dfrac{2}{x} + 2\ln(x)$ y a la de su derivada f´: (0, ∞) → R



a) Indica, razonando la respuesta, cuál es la gráfica de f y cuál la de f´.
b) Calcula el área de la región sombreada.

Ejercicio 43 El área del recinto limitado por las curvas $y = \dfrac{x^2}{a}$ e $y = \sqrt{ax}$, con a > 0, vale 3. Calcula el valor de a.

Ejercicio 44 Calcula □ > 0 para que el área del recinto limitado por las gráficas de las funciones f: $\Re \to \Re$ y g: $\Re \to \Re$ definidas por $f(x) = x^2$ y $g(x) = -x^2 + 2□^2$ sea 72 (unidades de área).

Practica tú:

36 De una función f: R → R se sabe que f(0) = 2 y que f´(x) = 2x. (a) Determina f. Sol.: $f(x) = x^2 + 2$
(b) Halla el área de la región limitada por la gráfica de f, el eje de abscisas y por las rectas de ecuaciones x = − 2 y x = 2.
Sol.: $\dfrac{40}{3}$ u²

37 Considera la función f: R → R dada por $f(x) = x^2 + 4$.
(a) Calcula la ecuación de la recta tangente a la gráfica de f en el punto de abscisa x = 1. Sol.: rtg: $y = 2x + 3$
(b) Halla el área del recinto limitado por la gráfica de f, el eje de ordenadas y la recta la recta tangente anterior. Sol.: $\dfrac{1}{3}$ u²

38 Halla el área de la región limitada por la recta y = 1 + x y la parábola $y = 1 + x^2$ Sol.: $\dfrac{1}{6}$ u²

39 Considera la función f: R → R definida por $f(x) = x^2 - 5x + 4$.
(a) Halla la ecuación de la recta tangente a la gráfica de f en el punto de abscisa x = 3. Sol.: rtg: $y = x - 5$
(b) Calcula el área de la región acotada que está limitada por el eje de ordenadas, por la gráfica de f y por la recta tangente obtenida. (Dibuja dicha región) Sol.: 9 u²

40 Sea f: R → R la función definida por f(x) = – x^2 + 2x + 3.
(a) Calcula la ecuación de la recta tangente a la gráfica de f en el punto de abscisa x = 2. Sol.: rtg: $y = 7 - 2x$
(b) Calcula el área de la región acotada que está limitada por el eje de ordenadas, por la gráfica de f y por la recta tangente obtenida. (Dibuja dicha región) Sol.: $\frac{8}{3}$ u^2

41 La recta tangente a la gráfica de la función f: R → R, definida por f(x) = mx^2 + nx − 3 en el punto (1, −6), es paralela a la recta y = −x.
a) Determina las constantes m y n y halla la ecuación de dicha recta tangente Sol.: $m = 2$, $n = -5$; rtg: $y = -x - 5$
b) Halla el área del recinto limitado por la gráfica de la función, la recta tangente anterior y el eje de ordenadas Sol.: $\frac{2}{3}$ u^2

42 Calcula el valor de a > 1 sabiendo que el área del recinto comprendido entre la parábola y = $-x^2$ + ax y la recta y = x es 4/3. Sol.: $a = 3$

43 Sea g: R → R la función definida por g(x) = (1/4)x^3 − x^2 + x . (a) Esboza la gráfica de g.
(b) Determina la ecuación de la recta tangente a la gráfica de g en el punto de abscisa x = 2. Sol.: rtg: $y = 0$
(c) Calcula el área del recinto limitado por la gráfica de g y el eje de abscisas. Sol.: $\frac{1}{3}$ u^2

44 Sea la función f: ℜ → ℜ definida por f(x) = $2x^3$ – 6x + 4. Calcula el área del recinto limitado por la gráfica de f y su recta tangente en el punto de abscisa correspondiente al máximo relativo de la función. Sol.: $\frac{27}{2}$ u^2

45 Dada la función f definida por $f(x) = \dfrac{3}{x^2 - 5x + 4}$ para x ≠ 1 y x ≠ 4. Calcula el área del recinto limitado por la gráfica de f, el eje de abscisas, y las rectas x = 2, x = 3. Sol.: $2\ln(2)$ u^2

46 Sea f: ℜ → ℜ la función definida por f(x) = x | x – 4 |
(a) Esboza la gráfica de f. (b) Estudia su derivabilidad en x = 4. Sol.: No es derivable en $x = 4$ (aunque sí es continua)
(c) Calcula el área del recinto limitado por la gráfica de f y el eje de abscisas Sol.: $\frac{32}{3}$ u^2

47 Sea f: R → R y g: R → R las funciones definidas por f(x) = x^2 + | x | , g(x) = 2
a) Determina los puntos de corte de las gráficas de f y g. Esboza dichas gráficas. Sol.: (−1,2) y (1,2)
b) Calcula el área del recinto limitado por dichas graficas Sol.: $\frac{5}{3}$ u^2

48 Sea f: R → R la función definida por $f(x) = \begin{cases} 2x+4, & si\ \ x \le 0 \\ (x-2)^2, & si\ \ x > 0 \end{cases}$
(a) Calcula los puntos de corte de la gráfica de f con el eje de abscisas y esboza dicha gráfica. Sol.: (–2,0) y (2,0)
(b) Halla el área de la región acotada que está limitada por la gráfica de f y por el eje de abscisas. Sol.: $\frac{20}{3}$ u^2

49 Sea f :(–1, +∞) → R la función definida como f(x) = ln(x + 1).
(a) Esboza el recinto limitado por la gráfica de f, el eje OY y la recta y = 1.
(b) Calcula el punto de corte de las gráficas. Sol.: (e – 1, 1)
(c) Halla el área del recinto anterior. Sol.: (e – 2) u^2

50 Dada la función f: (0,+∞) → R definida por f(x) = ln x, se pide:
a) Comprueba que la recta de ecuación y = –ex + 1+ e^2 es la recta normal a la gráfica de f en el punto de abscisa x = e.
b) Calcula el área de la región limitada por la gráfica de f, el eje de abscisas y la recta normal del apartado (a). Sol.: $\frac{2e+1}{2e}$ u^2

51 Sea f la función definida por f(x) = | ln (x) |, para x > 0.
a) Esboza el recinto limitado por la gráfica de f y la recta y = 1.
b) Calcula los puntos de corte de la gráfica de f con la recta y = 1. Sol.: $(1/e, 1)$ y $(e,1)$
c) Calcula el área del recinto citado. Sol.: $e + \frac{1}{e} - 2$ u^2

52 Considera la función f: ℜ → ℜ definida por $f(x) = e^{-x/2}$.
(a) Halla la ecuación de la recta tangente a la gráfica de f en el punto de abscisa x = 0. Sol.: rtg: $y = \frac{-1}{2}x + 1$
(b) Calcula el área de la región acotada que está limitada por la gráfica de f, la recta de ecuación x = 2 y la recta tangente obtenida en (a). Sol.: $1 - \frac{2}{e}$ u^2

53 Halla el área del recinto limitado por la gráfica de la función f(x) = sen x y las rectas tangentes a dicha gráfica en los puntos de abscisas x = 0 y x = π. Sol.: $\frac{\pi^2}{4} - 2$ u²

54 Sean f, g: R → R las funciones definidas por $f(x) = x^2 - 2x$ y $g(x) = -x^2 + 4x$, respectivamente.
(a) Halla los puntos de corte de sus gráficas y realiza un esbozo del recinto que limitan. Sol.: (0, 0) y (3,3)
(b) Calcula el área de dicho recinto. Sol.: 9 u²

55 Considera la función f: R → R dada por $f(x) = -x^2 + mx$ siendo m > 0. Esboza el recinto limitado por la gráfica de f y la recta y = −mx y calcula el valor de m para que el área de dicho recinto sea 36. Sol.: $m = 3$

56 Se considera el recinto del plano situado en el primer cuadrante limitado por las rectas y = 4x, y = 8 – 4x y la curva $y = 2x - x^2$. (a) Realiza un esbozo de dicho recinto. (b) Calcula su área Sol.: $\frac{8}{3}$ u²

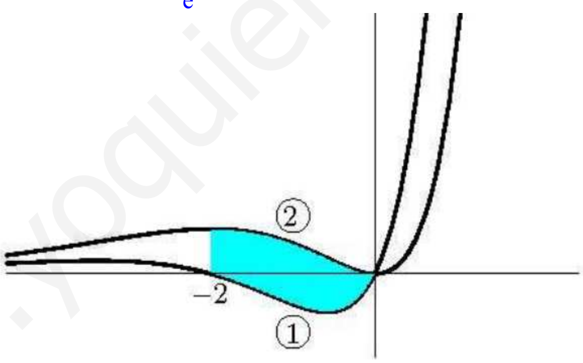
57 Sean f: R → R y g: R → R las funciones definidas por $f(x) = \frac{|x|}{2}$ y $g(x) = \frac{1}{1+x^2}$

a) Esboza las gráficas de f y g sobre los mismos ejes y halla los puntos de corte entre ambas gráficas. Sol.: $(1, \frac{1}{2})$ y $(-1, \frac{1}{2})$

b) Calcula el área del recinto limitado por las gráficas de f y g. Sol.: $\frac{\pi-1}{2}$ u²

58 Sean f : R → R y g : R → R las funciones definidas por: f(x) = 4 − 3|x| y $g(x) = x^2$.
(a) Esboza las gráficas de f y g. Determina sus puntos de corte. Sol.: (1, 1) y (−1, 1)
(b) Calcula el área del recinto limitado por las gráficas de f y g. Sol.: $\frac{13}{3}$ u²

59 Se sabe que las dos gráficas del dibujo corresponden a la función f: R → R definida por $f(x) = x^2 e^x$ y a su función derivada f´.
(a) Indica, razonando la respuesta, cuál es la gráfica de f y cuál la de f´. Sol.: 1→f´ 2→f
(b) Calcula el área de la región sombreada. Sol.: $2 - \frac{6}{e^2}$ u²



ACTIVIDADES COMPLEMENTARIAS

1 Se sabe que la función f: (0; 3) → ℜ es derivable en todo punto de su dominio, siendo $f'(x) = \begin{cases} x-1, & si\ 0 < x \le 2 \\ -x+3, & si\ 2 < x < 3 \end{cases}$, y que f(1) = 0. Halla la expresión analítica de f. Sol.: $f(x) = \begin{cases} \frac{(x-1)^2}{2}, & \text{si } 0<x\le 2 \\ \frac{-x^2+6x-7}{2}, & \text{si } 2<x<3 \end{cases}$

2 Determina una función derivable f: R → R sabiendo que f(1) = –1 y que $f'(x) = \begin{cases} x^2 - 2x, & si\ x < 0 \\ e^x - 1, & si\ x \ge 0 \end{cases}$

Sol.: $f(x) = \begin{cases} \frac{x^3}{3} - x^2 + 1 - e, & \text{si } x<0 \\ e^x - x - e, & \text{si } x \ge 0 \end{cases}$

3 Sea f: (–1, 1) → ℜ la función definida por $f(x) = \mathrm{Ln}(1 - x^2)$. Calcula la primitiva de f cuya gráfica pasa por el punto (0, 1).
Sol.: $f(x) = x\ \ln(1-x^2) - 2x - \ln|x-1| + \ln|x+1| + 1$

4 Determina la función f: R → R tal que $f'(x) = (2x + 1)e^{-x}$ y su grafica pasa por el origen de coordenadas. Calcula también la recta tangente a la gráfica de f en el punto de abscisa x = 0. Sol.: $f(x)=e^{-x}(-2x-4)+4$, rtg: $y=x$

5 Sea f :(−2, +∞) → R la función definida por f(x) = ln(x+2). Halla una primitiva F de f que verifique F(0)= 0.
Sol.: $F(x)=x\ln(x+2)-x+\ln|x+2|-\ln 2$

6 Sea f : (0, ∞) → $\mathfrak{R}$ la función definida por f(x) = (x – 1) Ln(x). Calcula la primitiva de f cuya gráfica pasa por el punto (1, –3/2). Sol.: $F(x)=\dfrac{(2x^2-4x)\ln x-x^2+4x-9}{4}$

7 Calcula: a) $\displaystyle\int \frac{3x^3+x^2-10x+1}{x^2-x-2}\,dx$ Sol.: $F(x)=\dfrac{3x^2}{2}+4x+3\ln|x-2|-3\ln|x+1|+c$ b) $\displaystyle\int_0^{\pi/2} x\,sen(2x)\,dx$ Sol.: $\dfrac{\pi}{4}$

c) $\displaystyle\int_1^e x^2\ln(x)\,dx$ Sol.: $\dfrac{2e^3+1}{9}$ d) $\displaystyle\int_{-1}^0 \ln(2+x)\,dx$ Sol.: $2\ln(2)-1$ e) $\displaystyle\int_0^1 x\,e^{-3x}\,dx$ Sol.: $\dfrac{e^3-4}{9e^3}$

f) $\displaystyle\int_2^4 \frac{x^2}{x^2-6x+5}\,dx$ Sol.: $\dfrac{8-26\ln(3)}{4}$ g) $\displaystyle\int_{-2}^0 \frac{1}{x^2+2x-3}\,dx$ Sol.: $\dfrac{-\ln(3)}{2}$

8 Sea f: (−1,3) → R la función definida por $f(x)=\dfrac{x+9}{(x+1)(x-3)}$. Determina la primitiva de f cuya gráfica pasa por el punto (1, 0). Sol.: $F(x)=3\ln|x-3|-2\ln|x+1|-\ln(2)$

9 Considera la integral definida $I=\displaystyle\int_1^9 \frac{1}{1+\sqrt{x}}\,dx$

(a) Exprésala haciendo el cambio de variable $1+\sqrt{x}=t$ Sol.: $I=\displaystyle\int_2^4 \frac{2(t-1)}{t}dt$ (b) Calcula I. Sol.: $4-2\ln(2)$

10 Considera la integral definida $I=\displaystyle\int_3^8 \frac{1}{\sqrt{1+x}-1}\,dx$

(a) Exprésala aplicando el cambio de variable $\sqrt{1+x}-1=t$ Sol.: $I=\displaystyle\int_1^2 \frac{2(t+1)}{t}dt$ (b) Calcula I. Sol.: $2+2\ln(2)$

11 De la función f: R → R definida por $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$ se sabe que alcanza un máximo relativo en x = 1, que la gráfica tiene un punto de inflexión en (0, 0) y que $\displaystyle\int_0^1 f(x)\,dx = 5/4$. Calcula a, b, c y d

Sol.: $a=-1$ $c=3$ $b=d=0$

12 Se sabe que la función f: R → R definida por $f(x) = x^3 + ax^2 + bx + c$ tiene un extremo relativo en el punto de abscisa x = 0 y que su gráfica tiene un punto de inflexión en el punto de abscisa x = –1. Conociendo además que $\displaystyle\int_0^1 f(x)\,dx=6$, halla a, b y c. Sol.: $a=3$ $b=0$ $c=\dfrac{19}{4}$

13 Determina un polinomio P(x) de segundo grado sabiendo que P(0) = P(2) = 1 y $\displaystyle\int_0^2 P(x)\,dx=\frac{1}{3}$

Sol.: $P(x)=\dfrac{5}{4}x^2-\dfrac{5}{2}x+1$

14 Sean las funciones f, g: R → R, definidas por $f(x) = -x^2 + 1$ y $g(x) = x - 1$. Calcula el área del recinto limitado por sus gráficas. Sol.: $\dfrac{9}{2}$ u²

15 Sean f: R → R y g: R → R las funciones definidas por $f(x) = x^2 - 1$ y $g(x) = 2x + 2$
(a) Esboza las gráficas de f y g. (b) Calcula el área del recinto limitado por dichas gráficas. Sol.: $\dfrac{32}{3}$ u²

16 Sea f: R → R la función definida por $f(x)=\dfrac{9-x^2}{4}$

(a) Halla la ecuación de la recta tangente a la gráfica de la función f en el punto de abscisa x = 1. Sol.: $\text{rtg}: y=\dfrac{5-x}{2}$

(b) Calcula el área del recinto limitado por la gráfica de f, el eje de abscisas y la recta tangente anterior. Sol.: $\dfrac{209}{3}\ u^2$

17 Sea g: R → R la función definida por g(x) = $-x^2+6x-5$.

a) Halla la ecuación de la recta normal a la gráfica de g en el punto de abscisa x = 4. Sol.: $r_N: y=\dfrac{x+2}{2}$

b) Calcula el área del recinto limitado por la gráfica de g y la recta normal anterior. Sol.: $\dfrac{125}{48}\ u^2$

18 Sea f: R → R la función definida por f(x) = x^2-2x+2.

(a) Halla la ecuación de la recta normal a la gráfica de f en el punto de abscisa x = 3. Sol.: $r_N: y=\dfrac{23-x}{4}$

(b) Calcula el área del recinto limitado por la gráfica de f, la recta normal obtenida y el eje OY. Sol.: $\dfrac{81}{8}\ u^2$

19 Esboza el recinto limitado por la gráfica de la parábola $y=-(x-2)^2-2$, la recta tangente a la gráfica de la parábola en el punto de abscisas x = 3, el semieje positivo de abscisas y el semieje negativo de ordenadas. Calcula su área

Sol.: $\dfrac{27}{2}\ u^2$

20 Determina b sabiendo que b > 0 y que el área de la región limitada por la curva $y=x^2$ y la recta y = bx es igual a 9/2. Sol.: $b=3$

21 Calcula un número positivo a, menor que 4, para que el recinto limitado por la parábola de ecuación $y=x^2$ y las dos rectas de ecuaciones y = 4 , y = a, tenga un área de 28/3 unidades cuadradas. Sol.: $a=\sqrt[3]{36}$

22 Calcula un número positivo "a", menor que 2, para que el recinto limitado por la parábola de ecuación $y=x^2/2$ y las dos rectas horizontales de ecuaciones y = a e y = 2, tenga un área de 14/3 unidades cuadradas.

Sol.: $a=\sqrt[3]{\dfrac{1}{32}}$

23 Considera la curva de ecuación $y=x^3-3x$.

(a) Halla la ecuación de la recta tangente a la curva en el punto de abscisa x = –1. Sol.: $\text{rtg}: y=2$

(b) Calcula el área del recinto limitado por la curva dada y la recta y = 2. Sol.: $\dfrac{27}{4}\ u^2$

24 Sea f : R → R la función definida por f(x) = x^3-4x

(a) Halla la ecuación de la recta tangente a la gráfica de f en el punto de abscisa x = 1. Sol.: $\text{rtg}: y=-x-2$

(b) Esboza el recinto limitado por la gráfica de f y la recta tangente anterior, determinando los puntos de corte de ambas gráficas. Sol.: $(1,-3)$ y $(-2,0)$ (c) Calcula el área del recinto anterior Sol.: $\dfrac{21}{4}\ u^2$

25 Sean f: R → R y g: R → R las funciones definidas mediante f(x) = x^3-4x y g(x) = 3x – 6

(a) Determina los puntos de corte de las gráficas de f y g. Sol.: $(1,-3)$, $(2,0)$ y $(-3,-15)$

(b) Calcula el área del recinto limitado por dichas gráficas. Sol.: $\dfrac{131}{4}\ u^2$

26 Sea f: $\mathfrak{R}\to\mathfrak{R}$ la función definida por f(x)= $x(x-3)^2$.

(a) Calcula los intervalos de crecimiento y de decrecimiento de f. Sol.: creciente en $(-\infty,1)\cup(3,\infty)$ y decreciente en $(1,3)$

(b) Haz un esbozo de la gráfica de f.

(c) Calcula el área del recinto limitado por la gráfica de f y el eje de abscisas. Sol.: $\dfrac{27}{4}\ u^2$

27 Sea f: R → R la función dada por $f(x)=\dfrac{2x}{(x^2+1)^2}$. Calcula el área del recinto limitado por la gráfica de f, el eje de abscisas y las rectas x = 0 y x = 1. Sol.: $\dfrac{1}{2}\ u^2$

28 Considera la función f dada por f(x) = 5 – x y la función g definida como g(x) = $\dfrac{4}{x}$, para x ≠ 0.

(a) Esboza el recinto limitado por las gráficas de f y g indicando sus puntos de corte. Sol.: Se cortan en los puntos (1,4) y (4,1)

(b) Calcula el área de dicho recinto. Sol.: $\dfrac{15}{2} - 8\ln(2)$ u²

29 Considera la función f: ℜ → ℜ definida por f (x)= x | x |.

(a) Dibuja la región acotada del plano que está limitada por la gráfica de f y la bisectriz del primer y tercer cuadrante.

(b) Calcula el área de la región descrita en el apartado anterior. Sol.: $\dfrac{1}{3}$ u²

30 Sea f : R → R la función definida por $f(x) = \begin{cases} -\dfrac{a}{x}, & si\ \ x \le -1 \\ x^2+1, & si\ x > -1 \end{cases}$

(a) Halla el valor de a sabiendo que f es continua. Sol.: a = 2 (b) Esboza la gráfica de f .

(c) Calcula el área del recinto limitado por la gráfica de f, el eje de abscisas y las rectas x + 2 = 0 y x – 2 = 0.

Sol.: $6 + 2\ln(2)$ u²

31 Considera las funciones f: (0, +∞) → ℜ y g: ℜ → ℜ definidas, respectivamente, por f(x) = Ln(x) y g(x) = 1 – 2x. Calcula el área del recinto limitado por las rectas x = 1 y x = 2 y las gráficas de f y g. Sol.: $1 + 2\ln(2)$ u²

32 Sea f: ℜ ⟶ ℜ la función definida por f(x) = e^{-2x}.

(a) Justifica que la recta de ecuación y = –2ex es la recta tangente a la gráfica de f en el punto de abscisa x = –1/2.

(b) Calcula el área el recinto limitado por la gráfica e f, el eje de ordenadas y la recta tangente del apartado anterior

Sol.: $\dfrac{e-2}{4}$ u²

33 Se consideran las funciones f: (0, ∞) ⟶ R y g: R ⟶ R definidas por $f(x) = \sqrt{3x}$, $g(x) = \dfrac{1}{3}x^2$

a) Haz un esbozo de sus gráficas

b) Calcula el área del recinto limitado por las gráficas de ambas funciones. Sol.: $\dfrac{11}{9}$ u²

34 Sean f, g: R ⟶ R las funciones definidas por f(x)= x^2 − 2x + 3 y g(x)= (1/2)x^2 + 1.

(a) Esboza las gráficas de f y g, y halla su punto de corte. Sol.: Se cortan en el punto (2,3)

(b) Calcula el área del recinto limitado por las gráficas de ambas funciones y el eje de ordenadas. Sol.: $\dfrac{4}{3}$ u²

35 Dadas las funciones f : [0,+ ∞) ⟶ R y g : [0, +∞) ⟶ R definidas por $f(x) = \sqrt{x}$

$g(x) = \sqrt[3]{x}$. Calcula el área del recinto limitado por las gráficas de f y g. Sol.: $\dfrac{1}{12}$ u²

36 Considera las funciones f, g: R ⟶ R definidas por f(x) = 2 – x^2 , g(x) = |x|.

(a) Esboza sus gráficas en unos mismos ejes coordenados.

(b) Calcula el área del recinto limitado por las gráficas de f y g. Sol.: $\dfrac{7}{3}$ u²

37 Considera las funciones f: ℜ → ℜ y g : ℜ → ℜ definidas por f(x) = e^{x-1} y g(x) = e^{1-x}.

(a) Esboza las gráficas de f y de g y determina su punto de corte. Sol.: Se cortan en el punto (1,1)

(b) Calcula el área del recinto limitado por el eje OY y las gráficas de f y g. Sol.: $e + \dfrac{1}{e} - 2$ u²

38 Haz un esbozo del recinto limitado por las curvas $y = \dfrac{15}{1+x^2}$ e $y = x^2 - 1$ y calcula el área de dicho recinto.

Sol.: $30\,\mathrm{arctg}(2) - \dfrac{4}{3}$ u²

39 Sean las funciones f y g: [0, +∞) → ℜ, dadas por f (x) = x^2 y $g(x) = \lambda\sqrt{x}$, donde □ es un número real positivo fijo. Calcula el valor de □ sabiendo que área del recinto limitado por las gráficas de ambas funciones es 1/3. Sol.: λ = 1