4 Inecuaciones

Una **inecuación** es una desigualdad en la que el criterio de comparación es la relación de orden inherente al conjunto de los números reales. Hay que tener en cuenta que esta relación de orden verifica las siguientes propiedades:

- Si $a > b$ y $x \in \mathbb{R}$, entonces $a + x > b + x$ y $a - x > b - x$.
- Si $a > b$ y $x \in \mathbb{R}^+$, entonces $ax > bx$ y $\dfrac{a}{x} > \dfrac{b}{x}$.
- Si $a > b$ y $x \in \mathbb{R}^-$, entonces $ax < bx$ y $\dfrac{a}{x} < \dfrac{b}{x}$.

Estas tres propiedades son también válidas si cambiamos el símbolo $>$ por $\geq$, y $<$ por $\leq$. Resolver una inecuación consiste en encontrar el conjunto de valores en los que la desigualdad es cierta.

4.1 Inecuaciones de primer grado

Una inecuación de **primer grado** es una expresión de la forma:

$$ax + b < 0, \quad ax + b > 0, \quad ax + b \leq 0 \quad \text{o} \quad ax + b \geq 0,$$

donde $a \neq 0$. Se resuelve despejando la incógnita x.

Ejemplo 4.1 *Resuelve la inecuación*

$$\frac{2x}{3} + \frac{x-1}{2} \geq 1.$$

Notar que el mínimo común múltiplo de los denominadores es 6. Así, en primer lugar multiplicamos ambos miembros de la inecuación por 6 para quitar denominadores. De esta forma se tiene

$$4x + 3x - 3 \geq 6.$$

A continuación, reordenando términos,

$$7x \geq 9,$$

y finalmente, dividiendo por 7,

$$x \geq \frac{9}{7}.$$

Es decir, el conjunto solución de la inecuación planteada es el intervalo $[9/7, +\infty)$.

4.2 Inecuaciones de segundo grado

Una inecuación de **segundo grado** es una expresión de la forma:

$$ax^2 + bx + c < 0, \quad ax^2 + bx + c > 0, \quad ax^2 + bx + c \leq 0 \quad \text{o} \quad ax^2 + bx + c \geq 0,$$

con $a \neq 0$. Para resolver una inecuación de segundo grado se calculan las soluciones de la ecuación $ax^2 + bx + c = 0$. Si x_1 y x_2 son estas soluciones y $x_1 < x_2$, entonces se determinan tres intervalos en la recta real, a saber $(-\infty, x_1)$, (x_1, x_2) y $(x_2, +\infty)$, donde los intervalos pueden ser también cerrados o semicerrados dependiendo de si en la inecuación aparece una desigualdad estricta o no. Finalmente se comprueba cuáles de los anteriores intervalos son solución de la inecuación.

Ejemplo 4.2 *Resuelve la inecuación* $x^2 - 3x + 2 \geq 0$.

Las soluciones de la ecuación $x^2 - 3x + 2 = 0$ son 1 y 2. Por tanto, dado que la desigualdad no es estricta, vemos cuáles de los intervalos $(-\infty, 1]$, $[1, 2]$ y/o $[2, +\infty)$ son solución de la inecuación. Para ello basta probar con algún punto contenido en el correspondiente intervalo. Por ejemplo, el 0 está en el intervalo $(-\infty, 1]$. Así, como $0^2 - 3 \cdot 0 + 2 \geq 0$, el 0 es solución de la inecuación, y por tanto el intervalo $(-\infty, 1]$ es solución de la inecuación. Análogamente se comprueba si los otros dos intervalos son o no solución de la inecuación propuesta. Finalmente se concluye que la solución es

$$(-\infty, 1] \cup [2, +\infty).$$

4.3 Inecuación lineal con dos incógnitas

Una **inecuación lineal con dos incógnitas** es una expresión de la forma

$$ax + by + c < 0, \quad ax + by + c > 0, \quad ax + by + c \leq 0 \quad \text{o} \quad ax + by + c \geq 0,$$

donde a y b no pueden ser 0 al mismo tiempo. El conjunto de soluciones de estas inecuaciones es uno de los semiplanos determinado por la recta $ax + by + c = 0$, En el caso de inecuaciones con $\geq$ o $\leq$, en el conjunto de soluciones se incluyen los puntos de la recta.

Ejemplo 4.3 *Resuelve la inecuación* $2x + 3y > 6$.

Para resolver la inecuación $2x + 3y > 6$ representamos gráficamente la recta de ecuación $2x + 3y = 6$.

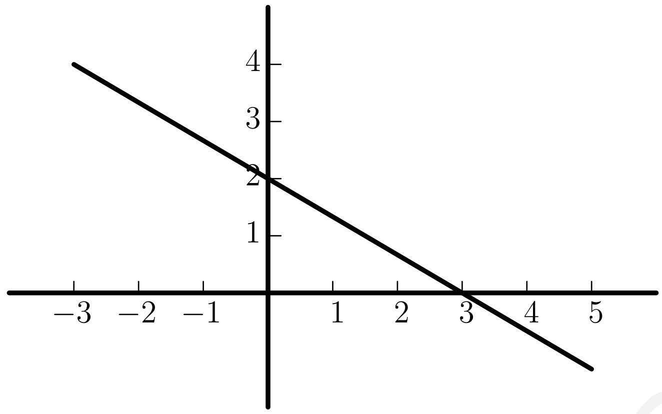

Figura 1.1: Recta de ecuación $2x + 3y = 6$.

A continuación vemos, por ejemplo, que el punto $(0, 0)$ no es solución de la inecuación considerada ya que $2 \cdot 0 + 3 \cdot 0 \not> 6$. Así deducimos que el semiplano solución es el que determina la recta $2x + 3y = 6$ y no contiene al punto $(0, 0)$.

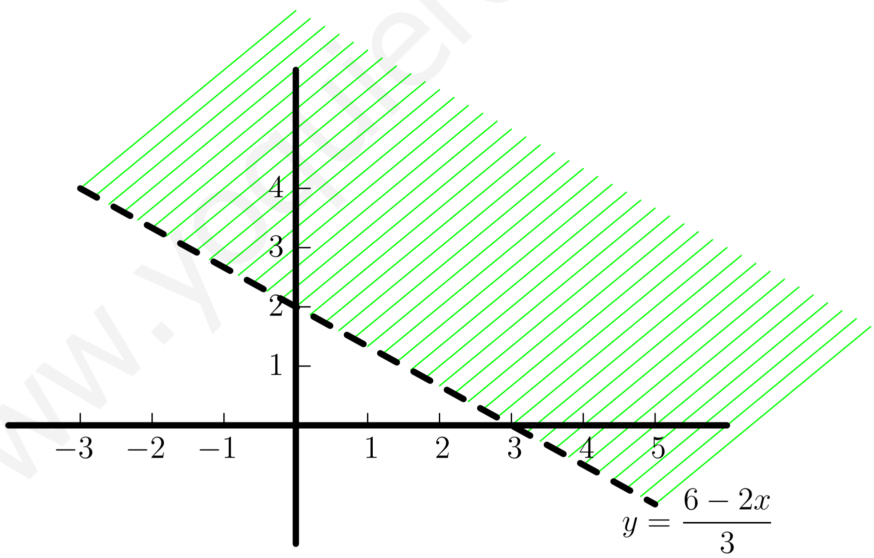

Figura 1.2: Semiplano solución de la inecuación $2x + 3y > 6$.

Finalmente llamamos la atención sobre el hecho de que al ser la desigualdad estricta en la inecuación, los puntos de la recta $2x + 3y = 6$ no son solución de la inecuación. Es por esto que representamos la recta con una línea discontinua.

4.4 Sistema de inecuaciones lineales con dos incógnitas

Son sistemas de la forma:

$$\begin{cases} a_{11}x + a_{12}y & < & b_1 \\ a_{21}x + a_{22}y & < & b_2. \end{cases}$$

Los signos $<$ pueden ser sustituidos por $>$, $\leq$ o $\geq$. La solución de un sistema de inecuaciones lineales con dos incógnitas viene dada por la región del plano común a los semiplanos que definen cada una de las inecuaciones.

Ejemplo 4.4 *Resuelve el sistema de inecuaciones*

$$\begin{cases} 2x + 3y & > & 6 \\ -x + y & > & -1. \end{cases}$$

Dado que la primera inecuación es la misma que la considerada en el ejemplo anterior, la región solución es la que representábamos en la Figura 1.2. Por otra parte, siguiendo el mismo procedimiento es fácil comprobar que la región solución de la segunda inecuación es la que representamos en la siguiente figura.

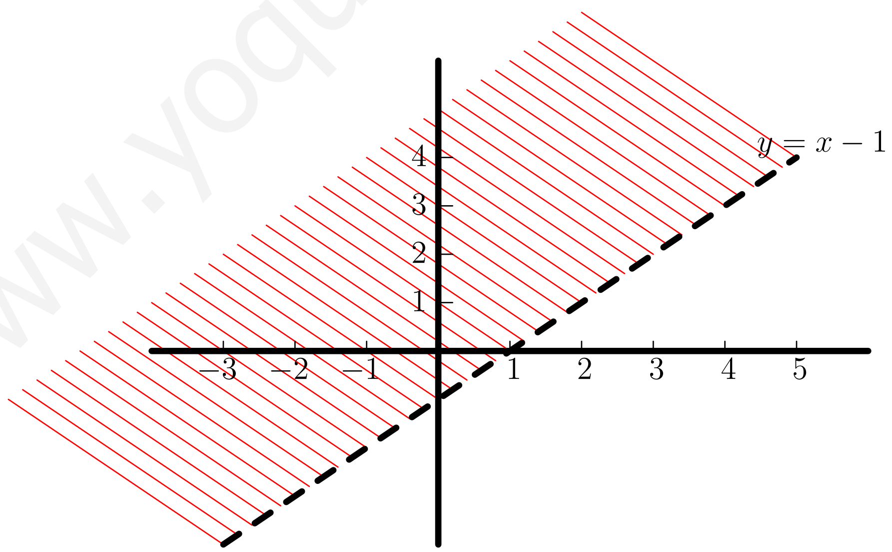

Figura 1.3: Semiplano solución de la inecuación $-x + y < -1$.

Finalmente, la solución del sistema de inecuaciones será la región intersección de las obtenidas en las Figuras 1.2 y 1.3.

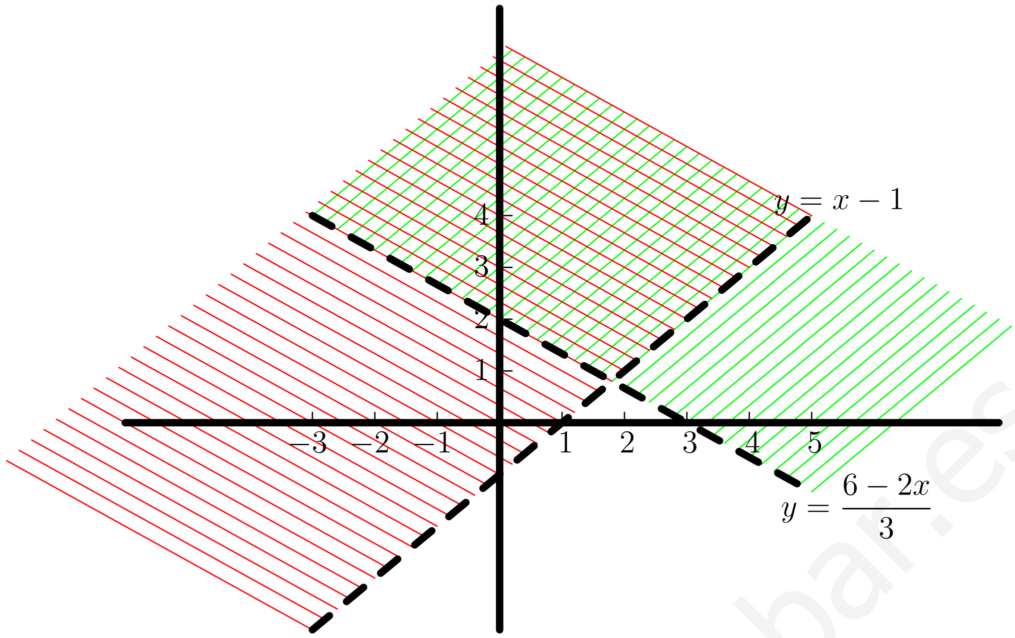

Figura 1.4: Solución del sistema de inecuaciones.

4.5 Ejercicios Propuestos

Ejercicio 38. *Resuelve la inecuación*

$$\frac{2x-1}{3}+x<\frac{-6+2x}{2}+\frac{5x+6}{4}.$$

Ejercicio 39. *Resuelve las siguientes inecuaciones:*

(a) $x^2-x-6>0$; **(b)** $2x^2+x+3<0$; **(c)** $x^2+2x+1\geq 0$.

Ejercicio 40. *Resuelve las siguientes inecuaciones:*

(a) $x+2y\leq 20$ **(b)** $5x-2y>40$.

Ejercicio 41. *Resuelve los siguientes sistemas de inecuaciones:*

(a) $\left.\begin{array}{rcl} x+2y & \leq & 20 \\ 5x-2y & > & 40 \end{array}\right\}$ **(b)** $\left.\begin{array}{rcl} x+2y & \leq & 1 \\ \dfrac{x+1}{2} & < & \dfrac{3}{2}+y \end{array}\right\}.$