

Examen de Matemáticas 1º de Bachillerato

Marzo 2005

Problema 1 Calcular la derivada de las siguientes funciones:

1. $f(x) = e^{x^2-2x-1}$
2. $f(x) = (x^2 - x - 1)(x^2 + 2)$

Solución:

1. $f(x) = e^{x^2-2x-1} \implies f'(x) = (2x - 2)e^{x^2-2x-1}$
2. $f(x) = (x^2 - x - 1)(x^2 + 2) = 4x^3 - 3x^2 + 2x - 2$

Problema 2 Dada la función $f(x) = 4x^3 - 6x^2 + 1$, calcular sus máximos y sus mínimos utilizando el criterio de la segunda derivada.

Solución:

$$f'(x) = 12x^2 - 12x = 0 \implies x = 0, \quad x = 1$$

$$f''(x) = 24x - 12 \implies \begin{cases} f''(0) = -12 < 0 \implies x = 0 \text{ Máximo} \\ f''(1) = 12 > 0 \implies x = 1 \text{ Mínimo} \end{cases}$$

Luego la función tiene un Mínimo en el punto $(1, -1)$ y tiene un Máximo en el punto $(0, 1)$.

Problema 3 Resolver

1. Estudiar la continuidad de la función

$$f(x) = \begin{cases} x^2 - 2 & \text{si } x < 1 \\ x^2 - x - 1 & \text{si } x \geq 1 \end{cases} \quad \text{en } x = 1$$

2. Calcular k de manera que la función

$$f(x) = \begin{cases} kx^2 - 1 & \text{si } x < 2 \\ 2x + k & \text{si } x \geq 2 \end{cases}$$

sea continua en todo R .

Solución:

1.

$$\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1} (x^2 - x - 1) = -1$$

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1} (x^2 - 2) = -1$$

$$f(1) = -1$$

Luego:

$$\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = f(1) = -1$$

Por tanto $f(x)$ es continua en $x = 1$, es más, es continua en todo R .

2.

$$\lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2} (2x + k) = 4 + k$$

$$\lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2} (kx^2 - 1) = 4k - 1$$

$$4 + k = 4k - 1 \implies k = \frac{5}{3}$$

Problema 4 Calcular el siguiente límite

$$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^4 - 2x^3 - 2x^2 + 5x - 2}{x^3 - x^2 - 3x + 2}$$

Solución:

$$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^4 - 2x^3 - 2x^2 + 5x - 2}{x^3 - x^2 - 3x + 2} = 1$$

Problema 5 Dada la función

$$f(x) = \frac{(x-1)^2}{x-3}$$

Calcular:

1. Dominio.
2. Puntos de corte con los ejes.
3. Simetrías.
4. Asíntotas.
5. Monotonía.
6. Máximos y Mínimos.
7. Dibujar la gráfica de la función.

Solución:

1. $\text{Dom}f = \mathbb{R} - \{3\}$
2. Si hacemos $x = 0 \implies (0, -1/3)$. Y si hacemos $f(x) = 0 \implies (1, 0)$.
- 3.

$$f(-x) = \frac{(-x-1)^2}{(-x-3)}$$

La función ni es par ni impar.

4.
 - **Verticales:** $x = 3$

$$\lim_{x \rightarrow 3^+} \frac{(x-1)^2}{x-3} = \left[\frac{9}{0^+} \right] = +\infty, \quad \lim_{x \rightarrow 3^-} \frac{(x-1)^2}{x-3} = \left[\frac{9}{0^-} \right] = -\infty$$

- **Horizontales:**

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{(x-1)^2}{x-3} = \infty \implies \text{No Hay}$$

- **Oblicuas:** $y = mx + n$

$$m = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2 - 2x + 1}{x^2 - 3x} = 1$$

$$n = \lim_{x \rightarrow \infty} (f(x) - mx) = \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x^2 - 2x + 1}{x - 3} - x \right) = 1$$
$$y = x + 1$$

- 5.

$$f'(x) = \frac{x^2 - 6x + 5}{(x-3)^2} = 0$$

$$x^2 - 6x + 5 = 0 \implies x = 1, x = 5$$

	$(-\infty, 1)$	$(1, 5)$	$(5, \infty)$
$x - 1$	-	+	+
$x - 5$	-	-	+
$f'(x)$	+	-	+

La función es creciente en el intervalo $(-\infty, 1) \cup (5, \infty)$.

La función es decreciente en el intervalo $(1, 5)$.

6. En $x = 1$ la función pasa de crecer a decrecer, luego estamos ante un máximo, que corresponde al punto $(1, 0)$.

En $x = 5$ la función pasa de decrecer a crecer, luego estamos ante un mínimo, que corresponde al punto $(5, 8)$.

