

Examen de Matemáticas 1º de Bachillerato
Febrero 2005

Problema 1 Calcular el dominio de las siguientes funciones:

1. $f(x) = \frac{3 + \sqrt{x^2 + x - 2}}{x - 3}$

2. $f(x) = \frac{x - 1}{\sqrt{x + 1}}$

Solución:

1. $f(x) = \frac{3 + \sqrt{x^2 + x - 2}}{x - 3} \implies \text{Dom } f = (-\infty, -2] \cup [1, 3) \cup (3, \infty)$

2. $f(x) = \frac{1 - x}{\sqrt{x + 1}} \implies \text{Dom } f = (-1, \infty)$

Problema 2 Dadas las funciones $f(x) = \frac{1}{1 - x}$ y $g(x) = \sqrt{x^2 - 1}$, calcular:
 $f \circ g$, $g \circ f$, $f \circ f$ y $g \circ g$.

Solución:

$$(f \circ g)(x) = f(g(x)) = f(\sqrt{x^2 - 1}) = \frac{1}{\sqrt{x^2 - 1} - 1}$$

$$(g \circ f)(x) = g\left(\frac{1}{x - 1}\right) = \sqrt{\frac{1}{(x - 1)^2} - 1}$$

$$(f \circ f)(x) = f(f(x)) = f\left(\frac{1}{x - 1}\right) = \frac{1}{\frac{1}{x - 1} - 1} = \frac{x - 1}{2 - x}$$

$$(g \circ g)(x) = g(g(x)) = g(\sqrt{x^2 - 1}) = \sqrt{(\sqrt{x^2 - 1})^2 - 1} = \sqrt{x^2 - 2}$$

Problema 3 Dada la función $f(x) = \frac{3x - 1}{x + 2}$, calcular la función inversa.

Solución:

$$y = \frac{3x - 1}{x + 2} \implies yx + 2y = 3x - 1 \implies yx - 3x = -2y - 1 \implies$$

$$(y - 3)x = -(2y + 1) \implies x = -\frac{2y + 1}{y - 3}$$

$$f^{-1}(x) = -\frac{2x + 1}{x - 3}$$

Problema 4 Calcular los siguientes límites

$$1. \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^3 - 5x^2 + 7x - 2}{x^4 - 2x^3 + x^2 - 3x + 2}$$

$$2. \lim_{x \rightarrow 3} \frac{\sqrt{x^2 - 5} - 2}{x - 3}$$

Solución:

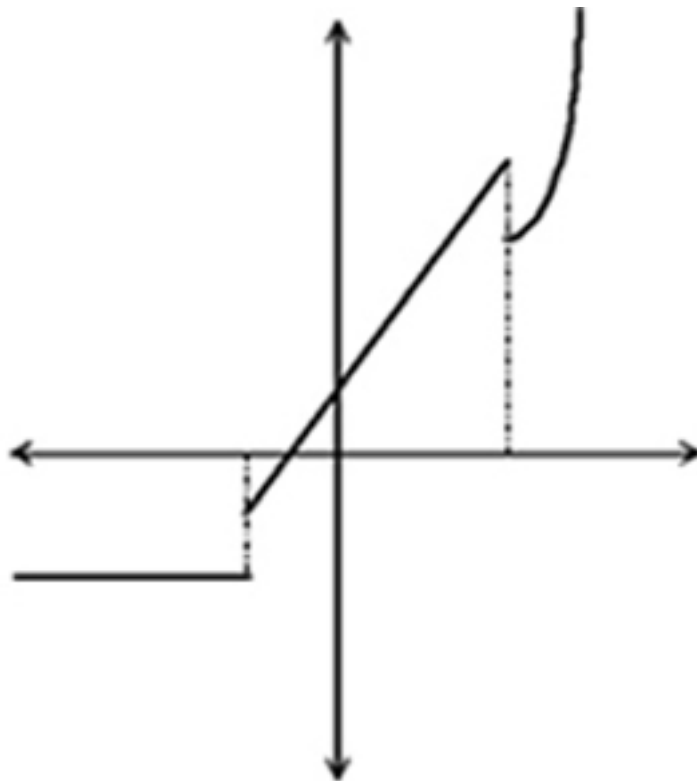
$$1. \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^3 - 5x^2 + 7x - 2}{x^4 - 2x^3 + x^2 - 3x + 2} = -\frac{1}{9}$$

$$2. \lim_{x \rightarrow 3} \frac{\sqrt{x^2 - 5} - 2}{x - 3} = \frac{3}{2}$$

Problema 5 Dibujar la siguiente función definida a trozos

$$f(x) = \begin{cases} -3 & \text{si } x \leq -1 \\ 2x + 1 & \text{si } -1 < x \leq 2 \\ x^2 & \text{si } x > 2 \end{cases}$$

Solución:



Problema 6 Dada la función

$$f(x) = \frac{x^2 - 1}{x + 3}$$

Calcular:

1. Dominio.
2. Puntos de corte con los ejes.
3. Simetrías.
4. Asíntotas.
5. Dibujar la gráfica de la función.

Solución:

1. $\text{Dom}f = \mathbb{R} - \{-3\}$
2. Si hacemos $x = 0 \implies (0, -1/3)$. Y si hacemos $f(x) = 0 \implies (1, 0)$ y $(-1, 0)$
- 3.

$$f(-x) = \frac{(-x)^2 - 1}{(-x) + 3} = \frac{x^2 - 1}{-x + 3}$$

La función ni es par ni impar.

4. **• Verticales:** $x = -3$

$$\lim_{x \rightarrow -3^+} \frac{x^2 - 1}{x + 3} = \left[\frac{8}{0^+} \right] = \infty, \quad \lim_{x \rightarrow -3^-} \frac{x^2 - 1}{x + 3} = \left[\frac{8}{0^-} \right] = -\infty$$

- Horizontales:**

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2 - 1}{x + 3} = \infty \implies \text{No Hay}$$

- Oblicuas:** $y = mx + n$

$$m = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2 - 1}{x^2 - 3x} = 1$$

$$n = \lim_{x \rightarrow \infty} (f(x) - mx) = \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x^2 - 1}{x + 3} - x \right) = -3$$

$$y = x - 3$$

