

Examen de Matemáticas 2º Bachillerato (CS)

Marzo 2011

Problema 1 Estudiar la continuidad de la siguiente función:

$$f(x) = \begin{cases} x^2 + 1 & \text{si } x < 1 \\ 2x & \text{si } 1 \leq x < 2 \\ 3x - 2 & \text{si } 2 < x < 3 \\ 7x & \text{si } 3 < x \end{cases}$$

en los puntos $x = 1$, $x = 2$ y en $x = 3$. Representarla gráficamente

Solución:

En $x = 1$ es continua, en $x = 2$ hay una discontinuidad evitable (agujero), y en $x = 3$ es discontinua no evitable (salto).

Problema 2 Calcular a y b para que la siguiente función:

$$f(x) = \begin{cases} ax^2 + 1 & \text{si } x < 1 \\ 2bx & \text{si } 1 \leq x < 2 \\ 3ax - 5b & \text{si } 2 \leq x \end{cases}$$

sea continua en los puntos $x = 1$ y en $x = 2$.

Solución:

Continuidad en $x = 1$:

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^-} (ax^2 + 1) = a + 1$$

$$\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^+} (2bx) = 2b$$

$$a + 1 = 2b \implies a - 2b = -1$$

Continuidad en $x = 2$:

$$\lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2^-} (2bx) = 4b$$

$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) &= \lim_{x \rightarrow 2^+} (3ax - 5b) = 6a - 5b \\ 4b &= 6a - 5b \implies 6a - 9b = 0 \\ \begin{cases} a - 2b = -1 \\ 6a - 9b = 0 \end{cases} &\implies \begin{cases} a = 3 \\ b = 2 \end{cases}\end{aligned}$$

Problema 3 Dada la función $f(x) = \frac{(x-3)^2}{x+3}$, determina

1. Calcula sus asíntotas
2. Determina sus intervalos de crecimiento y decrecimiento, sus máximos y mínimos.

Solución:

1. Asíntotas:

- Verticales: en $x = -3$

$$\lim_{x \rightarrow -3^-} \frac{(x-3)^2}{x+3} = \left[\frac{64}{0^-} \right] = -\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow -3^+} \frac{(x-3)^2}{x+3} = \left[\frac{64}{0^+} \right] = +\infty$$

- Horizontales: No hay

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{(x-3)^2}{x+3} = \infty$$

- Oblicuas: $y = mx + n$

$$m = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{(x-3)^2}{x^2 + 3x} = 1$$

$$n = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{(x-3)^2}{x+3} - x \right) = -9$$

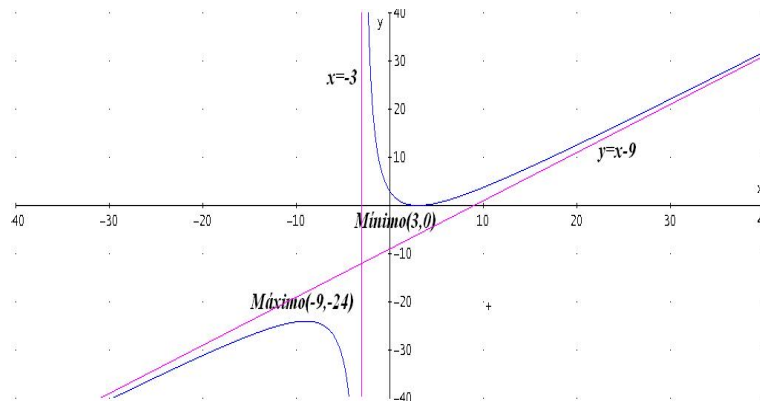
2. Monotonía y extremos:

$$f(x) = \frac{(x-3)^2}{x+3}, \quad f'(x) = \frac{x^2 + 6x - 27}{(x+3)^2} = 0 \implies x = 3, \quad x = -9$$

	$(-\infty, -9)$	$(-9, 3)$	$(3, \infty)$
$f'(x)$	+	-	+
$f(x)$	creciente ↗	decreciente ↘	creciente ↗

La función es creciente en el intervalo $(-\infty, -9) \cup (3, \infty)$ y decrece en el intervalo $(-9, -3) \cup (-3, 3)$

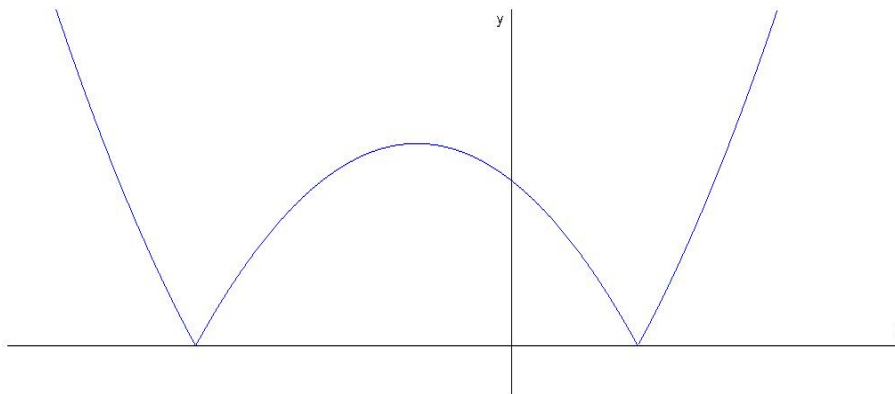
La función tiene un máximo en el punto $(-9, -24)$ y un mínimo en el punto $(3, 0)$.



Problema 4 Estudiar la continuidad de la función $f(x) = |x^2 + 3x - 10|$ y representarla gráficamente.

Solución:

Hacemos $g(x) = x^2 + 3x - 10 \implies g'(x) = 2x + 3 = 0 \implies x = -\frac{3}{2}$:



x	y
0	-10
-5	0
2	0
$-\frac{3}{2}$	$-\frac{49}{4}$

$g''(x) = 2 \implies g''\left(-\frac{3}{2}\right) > 0 \implies$ por lo que hay un mínimo en el punto $\left(-\frac{3}{2}, -\frac{49}{4}\right)$. La función valor absoluto convertirá la parte negativa de la curva en su simétrica positiva, por lo que el mínimo se convertirá en un máximo en el punto: $\left(-\frac{3}{2}, \frac{49}{4}\right)$

$$f(x) = \begin{cases} x^2 + 3x - 10 & \text{si } x \leq -5 \\ -(x^2 + 3x - 10) & \text{si } -5 < x \leq 2 \\ x^2 + 3x - 10 & \text{si } 2 \leq x \end{cases}$$

Continuidad en $x = -5$:

$$\lim_{x \rightarrow -5^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow -5^-} (x^2 + 3x - 10) = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow -5^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow -5^+} (-x^2 - 3x + 10) = 0$$

$$f(-5) = 0$$

Luego f es continua en $x = 2$

$$\lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2^-} (-x^2 - 3x + 10) = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2^+} (x^2 + 3x - 10) = 0$$

$$f(2) = 0$$

Problema 5 Calcular los números reales a , b y c de la función $f(x) = ax^2 - 2bx + c$, sabiendo que esta función pasa por el punto $(1, 2)$ y tiene un extremo en el punto $(3, 0)$.

Solución:

$$f(x) = ax^2 - 2bx + 3c, \quad f'(x) = 2ax - 2b$$

$$\begin{cases} f(1) = 2 \implies a - 2b + c = 2 \\ f(3) = 0 \implies 9a - 6b + c = 0 \\ f'(3) = 0 \implies 6a - 2b = 0 \end{cases} \implies \begin{cases} a = 1/2 \\ b = 3/2 \\ c = 9/2 \end{cases}$$