

Examen de Matemáticas 1º Bachillerato (CS)
Febrero 2013

Problema 1 Dada la función

$$f(x) = \frac{x^2 + 3}{x - 1}$$

Se pide:

- a) Calcular su dominio.
- b) Calcular sus puntos de corte con los ejes coordenados.
- c) Calcular su signo.
- d) Calcular su simetría.
- e) Calcular sus asíntotas.
- f) Calcular sus intervalos de crecimiento y decrecimiento, calculando sus extremos relativos.
- g) Representación gráfica.
- h) Calcular las rectas tangente y normal a f en el punto de abscisa $x = 0$.

Solución:

- a) Dominio de f : $\text{Dom}(f) = \mathbb{R} - \{1\}$
- b) Puntos de Corte
 - Corte con el eje OX hacemos $f(x) = 0 \implies x^2 + 3 = 0 \implies$ No hay puntos de corte con OX .
 - Corte con el eje OY hacemos $x = 0 \implies f(0) = -3 \implies (0, -3)$.
- c)

| | | |
|-------|-----------------|-----------------|
| | $(-\infty, -1)$ | $(-1, +\infty)$ |
| signo | - | + |

- d) $f(-x) \neq \pm f(x) \implies$ la función no tiene simetrías.
- e) Asíntotas:

- **Verticales:** $x = 1$

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 + 3}{x - 1} = \pm\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{x^2 + 3}{x - 1} = \left[\frac{4}{0^-} \right] = -\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{x^2 + 3}{x - 1} = \left[\frac{4}{0^+} \right] = +\infty$$

- **Horizontales:** No hay

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2 + 3}{x - 1} = \infty$$

- **Oblicuas:** $y = mx + n$

$$m = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2 + 3}{x^2 - x} = 1$$

$$n = \lim_{x \rightarrow \infty} (f(x) - mx) = \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x^2 + 3}{x - 1} - x \right) = 1$$

Luego la asíntota oblicua es $y = x + 1$

f)

$$f'(x) = \frac{x^2 - 2x - 3}{(x - 1)^2} = 0 \implies x = -1, x = 3$$

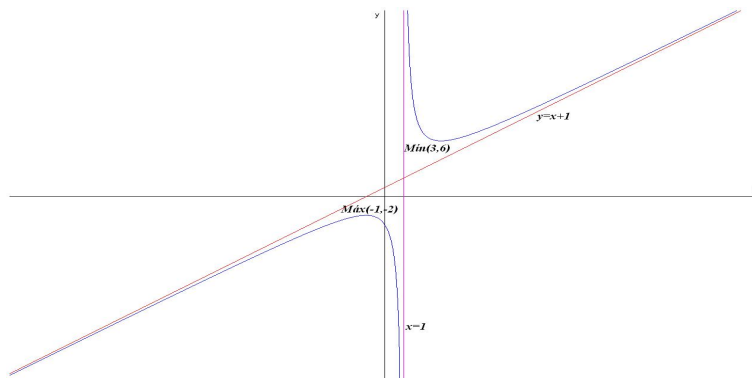
| | | | |
|---------|-----------------|-------------|----------------|
| | $(-\infty, -1)$ | $(-1, 3)$ | $(3, +\infty)$ |
| $f'(x)$ | + | - | + |
| $f(x)$ | creciente | decreciente | creciente |

La función es creciente en el intervalo $(-\infty, -1) \cup (3, +\infty)$.

La función es decreciente en el intervalo $(-1, 1) \cup (1, 3)$.

La función tiene un máximo en el punto $(-1, -2)$ y un mínimo en $(3, 6)$.

g) Representación:



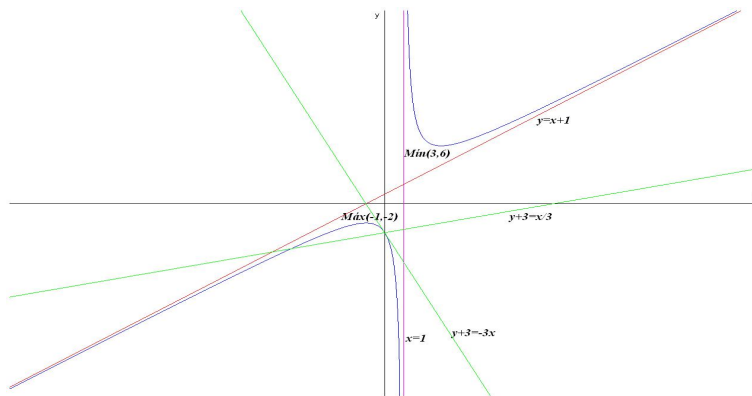
- h) Calcular las rectas tangente y normal a la gráfica de f en el punto de abscisa $x = 0$:

Como $m = f'(1) = -3$ tenemos que

$$\text{Recta Tangente : } y + 3 = -3x$$

$$\text{Recta Normal : } y + 3 = \frac{1}{3}x$$

Como $f(0) = -3$ las rectas pasan por el punto $(0, -3)$.



Problema 2 Calcular las derivadas de las siguientes funciones:

- $y = e^{3x^2+5x-1}$
- $y = \ln(3x^2 + 1)$
- $y = (x^2 + 3)(x^3 + 5)$
- $y = (3x^2 + 5)^{15}$

$$e) y = \frac{4x^2 - 1}{x^2 + 2}$$

Solución:

$$a) y = e^{3x^2+5x-1} \implies y' = (6x + 5)e^{3x^2+5x-1}$$

$$b) y = \ln(3x^2 + 1) \implies y' = \frac{6x}{3x^2 + 1}$$

$$c) y = (x^2 + 3)(x^3 + 5) \implies y' = 2x(x^3 + 5) + (x^2 + 3)(3x^2)$$

$$d) y = (3x^2 + 5)^{15} \implies y' = 15(3x^2 + 5)^{14}(6x)$$

$$e) y = \frac{4x^2 - 1}{x^2 + 2} \implies y' = \frac{8x(x^2 + 2) - (4x^2 - 1)(2x)}{(x^2 + 2)^2}$$

Problema 3 Calcular los siguientes límites:

$$a) \lim_{x \rightarrow 1} \frac{3x^5 + 2x^3 - 7x + 2}{x^2 + x - 2}$$

$$b) \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{5x^3 + 2x^2 - x + 3}{-x^2 + x + 2}$$

Solución:

$$a) \lim_{x \rightarrow 1} \frac{3x^5 + 2x^3 - 7x + 2}{x^2 + x - 2} = \frac{14}{3}$$

$$b) \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{5x^3 + 2x^2 - x + 3}{-x^2 + x + 2} = -\infty$$