4 MOVIMIENTO ARMÓNICO SIMPLE

4.1. MOVIMIENTOS PERIÓDICOS

1. Conocido el período de rotación de la Luna alrededor de la Tierra, y sabiendo que la Luna no emite luz propia, sino que refleja la que recibe del Sol, explica las fases de la Luna y la periodicidad con que se producen.

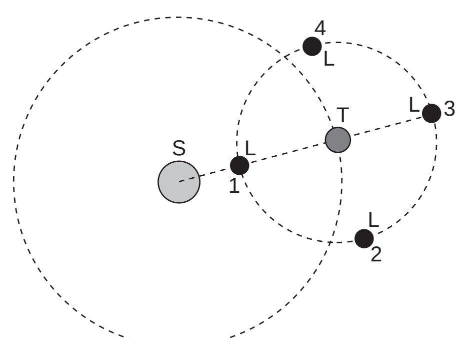
La Luna efectúa un giro a la Tierra cada 28 días, aproximadamente. Según la posición en que se encuentre respecto al Sol y la Tierra, la Luna puede interceptar o no los rayos de luz que proceden del Sol. En la posición 1 (véase la gráfica de la cuestión 2), la Luna intercepta la luz que recibe del Sol y la refleja, impidiendo que llegue a la Tierra. Debido a ello, la Luna no se verá; es la fase que denominamos luna nueva.

En la figura de la siguiente cuestión están representadas las cuatro fases de la Luna. Las fases se representan cada cuarto de vuelta. Ello supone que, si el ciclo total es de 28 días, se produzca una fase cada semana.

2. ¿En qué sentido (horario o antihorario) gira la Luna en torno a la Tierra? Dedúcelo de la forma en que se suceden las fases lunares.

Las fases se suceden del siguiente modo: luna nueva, cuarto creciente, luna llena y cuarto menguante.

Partiremos de la posición de luna nueva (posición número 1). Para deducir el sentido de giro, recurrimos a la observación. En cuarto creciente, la Luna tiene forma de D. La posición de la figura que se corresponde con esa observación es la posición número 2. En ese instante, la Luna recibe la luz por el lado derecho, que es el que vemos iluminado. Por tanto, la Luna realiza un recorrido antihorario.



3. Al colgar un objeto de 300 g de un muelle, se produce en este un alargamiento de 3,5 cm. Calcula su constante recuperadora.

La fuerza que produce el alargamiento del muelle es el peso del objeto que se cuelga de él:

$$P = m \cdot g = 0{,}3 \cdot 9{,}8 = 2{,}94 \text{ N}$$

Teniendo en cuenta la expresión que corresponde a la fuerza elástica recuperadora, dada por la ley de Hooke, despejando y sustituyendo los datos de que disponemos, obtenemos el valor de la constante recuperadora del resorte:

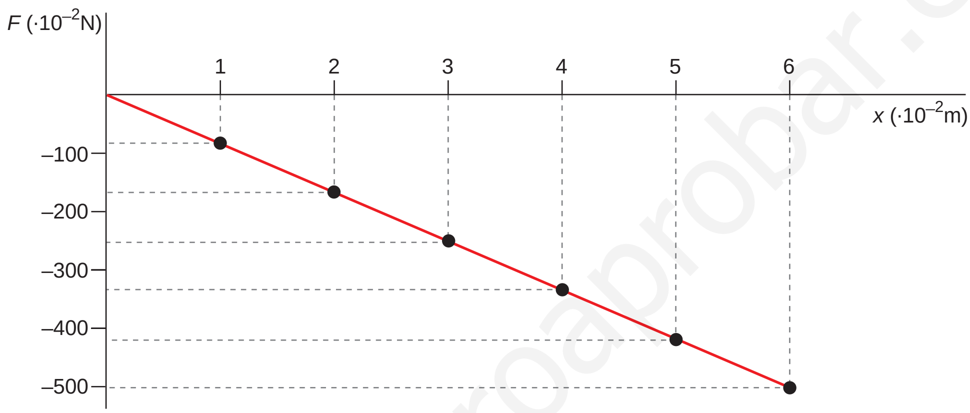
$$F = -k \cdot x = -P \rightarrow k = \frac{P}{x} = \frac{2{,}94}{0{,}035} = 84 \text{ N} \cdot \text{m}^{-1}$$

4. Confecciona un gráfico que muestre cómo varía la fuerza recuperadora del muelle anterior en función de la distancia para deformaciones que vayan de 0 a 6 cm.

La fuerza recuperadora que ejerce el muelle, de acuerdo con la ley de Hooke, es:

$$F = -k \cdot x$$

Esta fuerza es de sentido contrario a la que ejerce la masa que cuelga de él, y tiene su mismo valor. Su representación gráfica es una recta, como se muestra a continuación:



4.2. ESTUDIO CINEMÁTICO DEL M.A.S.

1. Un cuerpo oscila con m.a.s. de acuerdo con la ecuación:

$$x = 3 \cdot sen\left(10 \cdot \pi \cdot t + \frac{\pi}{2}\right)$$

en la que todas las magnitudes se expresan en unidades S.I.:

a) Calcula la amplitud, la frecuencia angular y la fase inicial del movimiento.

b) Escribe las ecuaciones de la velocidad y la aceleración del movimiento.

c) Calcula la elongación, la velocidad y la aceleración en el instante $t = 2$ s.

a) La ecuación de un m.a.s. es la siguiente:

$$x = A \cdot sen\,(\omega \cdot t + \varphi)$$

donde:

$$A = \text{amplitud} \quad ; \quad \omega = \text{frecuencia angular}$$

$$t = \text{tiempo} \quad ; \quad \varphi = \text{fase inicial}$$

Si identificamos términos con la ecuación del enunciado:

$$x = 3 \cdot sen\left(10 \cdot \pi \cdot t + \frac{\pi}{2}\right)$$

las magnitudes características del movimiento del cuerpo resultan:

$$A = 3 \text{ m} \quad ; \quad \omega = 10 \cdot \pi \text{ rad} \cdot \text{s}^{-1} \quad ; \quad \varphi = \pi/2 \text{ rad}$$

Teniendo en cuenta la relación entre la frecuencia angular y el período, podemos obtener también este último:

$$\omega = \frac{2 \cdot \pi}{T} \rightarrow T = \frac{2 \cdot \pi}{\omega} = \frac{2 \cdot \pi}{10 \cdot \pi} = 0{,}2 \text{ s}$$

b) Como hemos visto en el apartado anterior, la expresión que permite calcular la elongación es:

$$x = 3 \cdot sen \left(10 \cdot \pi \cdot t + \frac{\pi}{2}\right)$$

Derivando respecto al tiempo, obtenemos las ecuaciones de la velocidad y la aceleración:

$$v = \frac{dx}{dt} = 30 \cdot \pi \cdot cos \left(10 \cdot \pi \cdot t + \frac{\pi}{2}\right)$$

$$a = \frac{dv}{dt} = -300 \cdot \pi^2 \cdot sen \left(10 \cdot \pi \cdot t + \frac{\pi}{2}\right)$$

c) Para el instante $t = 2$ s, los valores de la elongación, la velocidad y la aceleración son:

$$x = 3 \cdot sen \left(10 \cdot \pi \cdot 2 + \frac{\pi}{2}\right) = 3 \cdot 1 = 3 \text{ m}$$

$$v = 30 \cdot \pi \cdot cos \left(10 \cdot \pi \cdot 2 + \frac{\pi}{2}\right) = 0 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$$

$$a = -300 \cdot \pi^2 \cdot sen \left(10 \cdot \pi \cdot 2 + \frac{\pi}{2}\right) = -300 \cdot \pi^2 \text{ m} \cdot \text{s}^{-2}$$

2. Una partícula se mueve con m.a.s. En el instante inicial se encuentra a 10 cm de la posición de equilibrio, siendo su velocidad nula. Si el período del movimiento es 10 s, escribe las ecuaciones que le corresponden para la elongación, la velocidad y la aceleración.

Las ecuaciones generales de la posición, la velocidad y la aceleración en un m.a.s. son:

$$x = A \cdot sen\ (\omega \cdot t + \varphi)$$

$$v = A \cdot \omega \cdot cos\ (\omega \cdot t + \varphi)$$

$$a = -A \cdot \omega^2 \cdot sen\ (\omega \cdot t + \varphi)$$

En el instante inicial, la velocidad es nula ($v = 0$). Por tanto:

$$v(0) = A \cdot \omega \cdot cos\ \varphi = 0 \rightarrow cos\ \varphi = 0 \rightarrow \varphi = \frac{\pi}{2}$$

Por otra parte, del dato del período podemos obtener la frecuencia angular:

$$\omega = \frac{2 \cdot \pi}{T} = \frac{2 \cdot \pi}{10} = 0{,}2 \cdot \pi \text{ rad} \cdot \text{s}^{-1}$$

La amplitud del movimiento la obtenemos teniendo en cuenta que en el instante inicial la elongación es de 10 cm:

$$x(0) = A \cdot sen\left(0 + \frac{\pi}{2}\right) = 0,1 \rightarrow A = 0,1 \text{ n}$$

Conocidos los valores de la amplitud, la frecuencia angular y la fase inicial, podemos escribir las ecuaciones de la elongación, la velocidad y la aceleración:

$$x = A \cdot sen\ (\omega \cdot t + \varphi) \rightarrow x = 0,1 \cdot sen\left(0,2 \cdot \pi \cdot t + \frac{\pi}{2}\right)$$

$$v = A \cdot \omega \cdot cos\ (\omega \cdot t + \varphi) \rightarrow v = 0,02 \cdot \pi \cdot cos\left(0,2 \cdot \pi \cdot t + \frac{\pi}{2}\right)$$

$$a = -A \cdot \omega^2 \cdot sen\ (\omega \cdot t + \varphi) \rightarrow a = -4 \cdot 10^{-3} \cdot \pi^2 \cdot sen\left(0,2 \cdot \pi \cdot t + \frac{\pi}{2}\right)$$

3. La elongación de un m.a.s. viene dada por la ecuación $x = 25 \cdot sen\ (4 \cdot t)$. En esta expresión, *x* viene dada en mm si *t* se expresa en s. Indica la amplitud, la frecuencia y el período del movimiento. Escribe las ecuaciones de la velocidad y de la aceleración y calcula los valores máximos de ambas magnitudes.

La ecuación general de un m.a.s. es la siguiente:

$$x = A \cdot sen\ (\omega \cdot t + \varphi)$$

donde:

$$A = \text{amplitud} \quad ; \quad \omega = \text{frecuencia angular}$$

$$t = \text{tiempo} \quad ; \quad \varphi = \text{fase inicial}$$

Si identificamos términos con la ecuación del enunciado:

$$x = 25 \cdot sen\ (4 \cdot t)$$

resulta:

$$A = 25 \text{ mm} \quad ; \quad \omega = 4 \text{ rad} \cdot \text{s}^{-1} \quad ; \quad \varphi = 0 \text{ rad}$$

El período está relacionado con la frecuencia angular:

$$\omega = \frac{2 \cdot \pi}{T} \rightarrow T = \frac{2 \cdot \pi}{\omega} = \frac{2 \cdot \pi}{4} = 1,57 \text{ s}$$

Derivando respecto al tiempo, obtenemos las ecuaciones de la velocidad y de la aceleración:

$$v = 100 \cdot cos\ (4 \cdot t)$$

$$a = -400 \cdot sen\ (4 \cdot t)$$

La velocidad máxima se obtiene cuando $cos\ (4 \cdot t) = 1$, siendo su valor:

$$v_{máx} = 100 \text{ mm/s}$$

y la aceleración máxima, cuando $sen\ (4 \cdot t) = -1$:

$$a_{máx} = 400 \text{ mm/s}^2$$

4.3. DETERMINACIÓN DEL PERÍODO DE UN M.A.S.

1. Calcula las expresiones que permiten calcular la velocidad y la aceleración con que se mueve un cuerpo que oscila unido al extremo de un muelle.

La ecuación de la posición para el muelle que oscila es:

$$x = A \cdot sen\left(\sqrt{\frac{k}{m}} \cdot t + \theta_0\right)$$

Al derivar respecto al tiempo, obtenemos las ecuaciones de la velocidad y de la aceleración:

$$v = A \cdot \sqrt{\frac{k}{m}} \cdot cos\left(\sqrt{\frac{k}{m}} \cdot t + \theta_0\right)$$

$$a = -A \cdot \frac{k}{m} \cdot sen\left(\sqrt{\frac{k}{m}} \cdot t + \theta_0\right)$$

2. Calcula el período con que oscila un péndulo de 1 m de longitud en un lugar en el que la aceleración de la gravedad es 9,8 m · s^{-2}.

El período de oscilación del péndulo lo podemos calcular a partir de la siguiente expresión:

$$T = 2 \cdot \pi \cdot \sqrt{\frac{l}{g}}$$

Por tanto:

$$T = 2 \cdot \pi \cdot \sqrt{\frac{1}{9,8}} = 2 \text{ s}$$

3. Calcula la longitud de un péndulo cuyo período de oscilación es (2,31 ± 0,01) s, si oscila en un lugar de la Tierra en el que *g* = (9,806 ± 0,001) m · s^{-2}. Expresa el resultado con todas sus cifras significativas.

NOTA: Consulta en el CD los contenidos relacionados con cálculo de errores, que estudiaste el curso pasado.

El período de oscilación de un péndulo es:

$$T = 2 \cdot \pi \cdot \sqrt{\frac{l}{g}}$$

Despejando, la longitud del péndulo será:

$$l = \frac{T^2 \cdot g}{4 \cdot \pi^2} = \frac{2,31^2 \cdot 9,806}{4 \cdot \pi^2} = 1,325428 \text{ m}$$

Para calcular el valor que daremos como bueno, tenemos en cuenta los criterios de error vistos el curso pasado.

De ese modo, al tratarse de una medida indirecta, resulta:

$$\frac{\Delta l}{l} = 2 \cdot \frac{\Delta T}{T} + \frac{\Delta g}{g}$$

$$\Delta l = l \cdot \left(2 \cdot \frac{\Delta T}{T} + \frac{\Delta g}{g} \right)$$

$$\Delta l = 1,325428 \cdot \left(2 \cdot \frac{0,01}{2,31} + \frac{0,001}{9,806} \right)$$

$$\Delta l = 0,0116 \text{ m}$$

Como imprecisión del período y de la aceleración de la gravedad hemos considerado una unidad de la última cifra significativa en cada caso, y para el número "pi" hemos supuesto un valor exacto, entendiendo por exacto el valor que proporciona la calculadora con todos los dígitos que ofrece. De acuerdo con las normas que ya conocemos, la longitud se expresará en la forma:

$$l = 1,33 \pm 0,01 \text{ m}$$

4.4. ENERGÍA ASOCIADA A UN M.A.S.

1. Una masa de 200 g está suspendida de un muelle. Debido a ello, este se deforma 4 cm. A continuación, separamos el muelle 10 cm de la posición de equilibrio y lo dejamos en libertad.

En esas condiciones, calcula la frecuencia, la frecuencia angular y la amplitud del m.a.s. que describe la masa.

La frecuencia angular del sistema será su frecuencia propia, dada por:

$$\omega = \sqrt{\frac{k}{m}}$$

Sabemos que, al colocar una masa de 200 g, el muelle se estira 4 cm. Eso nos permite calcular la constante elástica, ya que la fuerza elástica recuperadora, dada por la ley de Hooke, es igual y opuesta al peso del cuerpo:

$$F = -k \cdot x = -P \rightarrow k = \frac{P}{x} = \frac{m \cdot g}{x} = \frac{0,2 \cdot 9,8}{0,04} = 49 \text{ N} \cdot \text{m}^{-1}$$

Por tanto, la frecuencia angular (o propia) del sistema resulta:

$$\omega = \sqrt{\frac{k}{m}} = \sqrt{\frac{49}{0,2}} = 15,65 \text{ rad} \cdot \text{s}^{-1}$$

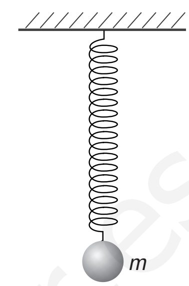
siendo la frecuencia:

$$\omega = 2 \cdot \pi \cdot f \rightarrow f = \frac{\omega}{2 \cdot \pi} = \frac{15,65}{2 \cdot \pi} = 2,49 \text{ Hz}$$

La amplitud del movimiento es de 10 cm.

2. Calcula la elongación para la que, en un oscilador armónico de amplitud *A*, la energía cinética y la energía potencial elástica son iguales.

Supongamos una masa *m*, puntual, suspendida de un muelle sin masa.



De acuerdo con el enunciado:

$$\left.\begin{array}{l} E_{p_e} = \dfrac{1}{2} \cdot k \cdot x^2 \\[2ex] E_c = \dfrac{1}{2} \cdot m \cdot v^2 \end{array}\right\} \rightarrow \frac{1}{2} \cdot k \cdot x^2 = \frac{1}{2} \cdot m \cdot v^2 \rightarrow x = \pm\, v \cdot \sqrt{\frac{m}{k}}$$

3. Un muelle de 10 cm de longitud requiere un trabajo exterior de 20 J para comprimirlo hasta 8 cm. Calcula su constante elástica.

A partir de la expresión del trabajo realizado al comprimir el muelle:

$$W = \frac{1}{2} \cdot k \cdot x^2 \rightarrow k = \frac{2 \cdot W}{x^2}$$

Sustituyendo los datos de que disponemos, se obtiene:

$$k = \frac{2 \cdot 20}{0{,}1^2} = 4\,000 \text{ N} \cdot \text{m}^{-1}$$

AMPLIACIÓN DE CONTENIDOS. COMPOSICIÓN DE MOVIMIENTOS ARMÓNICOS SIMPLES

1. De acuerdo con lo expuesto en este apartado de ampliación de contenidos, señala cómo será el movimiento armónico simple resultante si los dos movimientos que interfieren:

a) Son de igual fase.

b) Son de igual fase y amplitud.

c) Están en oposición de fase.

d) Están en oposición de fase y tienen la misma amplitud.

e) Están en cuadratura de fase.

f) Están en cuadratura de fase y tienen la misma amplitud.

En todos los casos, el m.a.s. resultante será de la misma frecuencia que los dos movimientos que se superponen si estos son de igual frecuencia. Estudiaremos lo que sucede con la amplitud y la fase del m.a.s. resultante.

a) Movimientos de igual fase. En este caso, la amplitud resulta:

$$\left.\begin{array}{l} A_R = \sqrt{A_1^2 + A_2^2 + 2 \cdot A_1 \cdot A_2 \cdot cos\,(\theta_1 - \theta_2)} \\ \theta_1 = \theta_2 = \theta \end{array}\right\} \rightarrow$$

$$\rightarrow A_R = \sqrt{A_1^2 + A_2^2 + 2 \cdot A_1 \cdot A_2 \cdot cos\,0} = \sqrt{(A_1 + A_2)^2}$$

Por tanto:

$$A_R = \sqrt{(A_1 + A_2)^2} = A_1 + A_2$$

La amplitud resultante es la suma de las amplitudes.

En cuanto a la fase:

$$tg\ \Phi = \frac{A_1 \cdot sen\ \theta + A_2 \cdot sen\ \theta}{A_1 \cdot cos\ \theta + A_2 \cdot cos\ \theta} = \frac{sen\ \theta}{cos\ \theta} = tg\ \theta \rightarrow \Phi = \theta$$

La fase del movimiento resultante coincide con la fase de los movimientos que dan lugar a él.

b) Movimientos de igual fase y amplitud. En este caso, la amplitud resulta:

$$\left.\begin{array}{l} A_R = \sqrt{A_1^2 + A_2^2 + 2 \cdot A_1 \cdot A_2 \cdot cos\ (\theta_1 - \theta_2)} \\ Si\ \ \theta_1 = \theta_2 = \theta\ \ \text{y}\ \ A_1 = A_2 = A \end{array}\right\} \rightarrow$$

$$\rightarrow A_R = \sqrt{A^2 + A^2 + 2 \cdot A \cdot A \cdot cos\ 0} = \sqrt{4 \cdot A^2} = 2 \cdot A$$

La amplitud resultante es igual a la suma de las amplitudes de los dos movimientos.

En cuanto a la fase:

$$tg\ \Phi = \frac{A \cdot sen\ \theta + A \cdot sen\ \theta}{A \cdot cos\ \theta + A \cdot cos\ \theta} = \frac{sen\ \theta}{cos\ \theta} = tg\ \theta \rightarrow \Phi = \theta$$

La fase del movimiento resultante coincide con la fase de los movimientos que dan lugar a él.

c) Movimientos en oposición de fase. Dos movimientos se encuentran en oposición de fase si sus fases iniciales difieren en "pi" radianes, es decir, si: $\theta_2 = \theta_1 + \pi$.

Teniendo en cuenta lo anterior, la amplitud del movimiento resultante es:

$$A_R = \sqrt{A_1^2 + A_2^2 + 2 \cdot A_1 \cdot A_2 \cdot cos\ \pi} \rightarrow$$

$$\rightarrow A_R = \sqrt{A_1^2 + A_2^2 - 2 \cdot A_1 \cdot A_2} = \sqrt{(A_1 - A_2)^2}$$

Por tanto:

$$A_R = A_1 - A_2$$

Como vemos, la amplitud resultante es la diferencia de amplitudes.

En cuanto a la fase:

$$tg\ \Phi = \frac{A_1 \cdot sen\ \theta_1 + A_2 \cdot sen\ \theta_2}{A_1 \cdot cos\ \theta_1 + A_2 \cdot cos\ \theta_2}$$

$$tg\ \Phi = \frac{A_1 \cdot sen\ \theta_1 + A_2 \cdot sen\ (\theta_1 + \pi)}{A_1 \cdot cos\ \theta_1 + A_2 \cdot cos\ (\theta_1 + \pi)} =$$

$$= \frac{A_1 \cdot sen\ \theta_1 - A_2 \cdot sen\ \theta_1}{A_1 \cdot cos\ \theta_1 - A_2 \cdot cos\ \theta_1} = tg\ \theta_1 \rightarrow \Phi = \theta_1$$

d) Movimientos en oposición de fase y con igual amplitud. Valiéndonos de lo expuesto para el caso anterior:

$$A_R = \sqrt{A_1^2 + A_2^2 + 2 \cdot A_1 \cdot A_2 \cdot cos\ \pi} \rightarrow$$
$$\rightarrow A_R = \sqrt{A_1^2 + A_2^2 - 2 \cdot A_1 \cdot A_2} = \sqrt{(A_1 - A_2)^2}$$

Al ser $A_1 = A_2$, $A_R = 0$. La amplitud es nula. La interferencia es total y el movimiento nulo.

Como el movimiento es nulo, el desfase también lo será.

e) Movimientos en cuadratura de fase. Decimos que dos movimientos se encuentran en cuadratura de fase si sus fases iniciales cumplen la relación: $\theta_2 = \theta_1 + \pi/2$.

Teniendo en cuenta lo anterior, la amplitud del movimiento resultante es:

$$A_R = \sqrt{A_1^2 + A_2^2 + 2 \cdot A_1 \cdot A_2 \cdot cos\ (\pi/2)} \rightarrow$$
$$\rightarrow A_R = \sqrt{A_1^2 + A_2^2}$$

En cuanto a la fase inicial del movimiento resultante:

$$tg\ \Phi = \frac{A_1 \cdot sen\ \theta_1 + A_2 \cdot sen\ \theta_2}{A_1 \cdot cos\ \theta_1 + A_2 \cdot cos\ \theta_2}$$

$$tg\ \Phi = \frac{A_1 \cdot sen\ \theta_1 + A_2 \cdot sen\left(\theta_1 + \frac{\pi}{2}\right)}{A_1 \cdot cos\ \theta_1 + A_2 \cdot cos\left(\theta_1 + \frac{\pi}{2}\right)}$$

$$tg\ \Phi = \frac{A_1 \cdot sen\ \theta_1 + A_2 \cdot cos\ \theta_1}{A_1 \cdot cos\ \theta_1 - A_2 \cdot sen\ \theta_1} = \frac{tg\ \theta_1 + \frac{A_2}{A_1}}{1 - \frac{A_2}{A_1} \cdot tg\ \theta_1}$$

f) Movimientos en cuadratura de fase e igual amplitud. Valiéndonos de los cálculos anteriores, resulta para la amplitud:

$$A_R = \sqrt{A_1^2 + A_2^2 + 2 \cdot A_1 \cdot A_2 \cdot cos\ (\pi/2)} \rightarrow$$
$$\rightarrow A_R = \sqrt{A_1^2 + A_2^2}$$

Como $A_1 = A_2 = A$:

$$A_R = \sqrt{A_1^2 + A_2^2} = \sqrt{2 \cdot A^2} = \sqrt{2} \cdot A$$

Mientras que para la fase, aplicando igualmente que $A_1 = A_2 = A$:

$$tg\ \Phi = \frac{tg\ \theta_1 + \frac{A_2}{A_1}}{1 - \frac{A_2}{A_1} \cdot tg\ \theta_1} \rightarrow tg\ \Phi = \frac{1 + tg\ \theta_1}{1 - tg\ \theta_1}$$

ACTIVIDADES DE LA UNIDAD

CUESTIONES

1. Señala cuál será el desplazamiento de una partícula que se mueve efectuando un movimiento armónico simple al cabo de un período completo.

El movimiento armónico simple es un movimiento periódico. Al cabo de un período completo, la partícula se encontrará de nuevo en la misma posición; por tanto, su desplazamiento, que es una magnitud vectorial, será nulo.

2. Sabemos que la velocidad de una partícula que describe un movimiento armónico simple es nula en ciertos instantes. Con esta información, ¿podemos conocer su posición en esos instantes?

Las expresiones que corresponden, respectivamente, a la posición y a la velocidad en un movimiento armónico simple son:

$$x = A \cdot sen\ (\omega \cdot t + \theta_0)$$

$$v = A \cdot \omega \cdot cos\ (\omega \cdot t + \theta_0)$$

Observa que, en los instantes en que la velocidad se anula, $cos\ (\omega \cdot t + \theta_0) = 0$, y, por tanto, $sen\ (\omega \cdot t + \theta_0)$ alcanza un valor máximo, positivo ($sen\ (\omega \cdot t + \theta_0) = +1$) o negativo ($sen\ (\omega \cdot t + \theta_0) = -1$). En consecuencia, en esos instantes la partícula se encontrará en los puntos de amplitud máxima:

$$x = A \quad ; \quad x = -A$$

3. ¿Qué valor toma la aceleración de un oscilador armónico, de amplitud *A* y frecuencia *f*, cuando su velocidad es máxima?

¿Y cuando su elongación es máxima?

Las ecuaciones que corresponden a la posición, la velocidad y la aceleración de un oscilador armónico de amplitud A y frecuencia f son, respectivamente:

$$x = A \cdot sen\ (2 \cdot \pi \cdot f \cdot t + \theta_0)$$

$$v = A \cdot 2 \cdot \pi \cdot f \cdot cos\ (2 \cdot \pi \cdot f \cdot t + \theta_0)$$

$$a = -A \cdot 4 \cdot \pi^2 \cdot f^2 \cdot sen\ (2 \cdot \pi \cdot f \cdot t + \theta_0)$$

Los valores máximo y mínimo de la velocidad son:

$$v_{máx} = A \cdot 2 \cdot \pi \cdot f \quad ; \quad v_{mín} = -A \cdot 2 \cdot \pi \cdot f$$

Estos valores se dan cuando $cos\ (2 \cdot \pi \cdot f \cdot t + \theta_0) = 1$ o $cos\ (2 \cdot \pi \cdot f \cdot t + \theta_0) = -1$. En esos instantes, el valor de la elongación y de la aceleración es cero, ya que en ellos se cumple que $sen\ (2 \cdot \pi \cdot f \cdot t + \theta_0) = 0$.

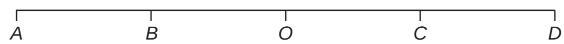
Del mismo modo, cuando la elongación es máxima, la aceleración es mínima:

$$x = A \rightarrow a = -A \cdot 2 \cdot \pi^2 \cdot f^2$$

y cuando la elongación es mínima, la aceleración es máxima:

$$x = -A \rightarrow a = A \cdot 2 \cdot \pi^2 \cdot f^2$$

4. El siguiente esquema representa un movimiento armónico simple:



Señala si son positivos, negativos o nulos los valores de la elongación, la velocidad y la aceleración de la partícula que describe dicho movimiento en los siguientes casos:

a) La partícula se encuentra en *O* y se desplaza hacia *D*.

b) La partícula se encuentra en *C* y se desplaza hacia *O*.

c) La partícula está en el punto *D*.

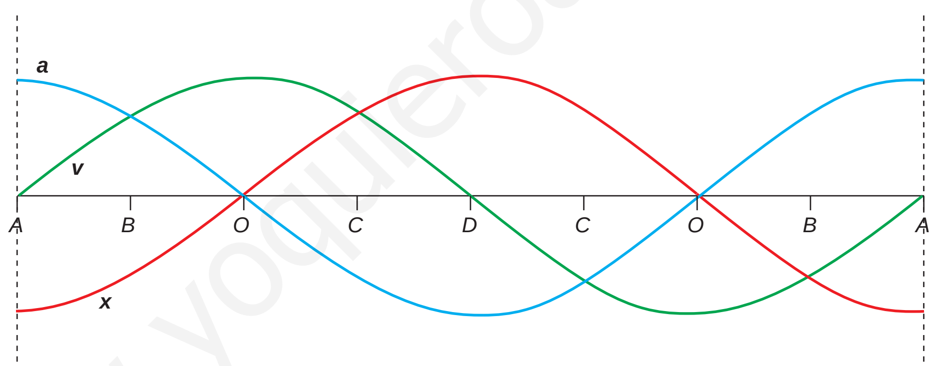
d) La partícula pasa por *O* y se dirige hacia *A*.

e) La partícula está en *A*.

f) La partícula pasa por *B*, de camino hacia *O*.

En primer lugar, debemos tener en cuenta que, en un m.a.s., los sentidos que corresponden a la elongación y a la aceleración siempre son opuestos.

En la siguiente figura se representa la posición, la velocidad y la aceleración que corresponden a una partícula que efectúa una oscilación completa:



De acuerdo con ella, las respuestas a los casos que propone el enunciado son las siguientes (en ellas, la letra *A* designa el valor máximo de la elongación, es decir, la amplitud del movimiento).

a) $x = 0$

$v > 0$

$a = 0$

b) $x > 0$

$v < 0$

$a < 0$

c) $x = A > 0$

$v = 0$

$a < 0$ (valor mínimo)

d) $x = 0$

$v < 0$

$a = 0$

e) $x = -A < 0$

$v = 0$

$a > 0$ (valor máximo)

f) $x < 0$

$v > 0$

$a > 0$

5. **En un movimiento armónico simple, la energía es proporcional:**

a) Al ángulo de fase.

b) A la amplitud.

c) Al cuadrado de la amplitud.

d) A la frecuencia.

La expresión de la energía mecánica de un m.a.s. es:

$$E_m = \frac{1}{2} \cdot k \cdot A^2 = \frac{1}{2} \cdot m \cdot \omega^2 \cdot A^2 = \frac{1}{2} \cdot m \cdot \frac{4 \cdot \pi^2}{T^2} \cdot A^2 = \frac{2 \cdot \pi^2 \cdot m}{T^2} \cdot A^2 = 2 \cdot \pi^2 \cdot m \cdot f^2 \cdot A^2$$

Como se puede apreciar en la expresión anterior, la energía de un m.a.s. es directamente proporcional al cuadrado de la amplitud y al cuadrado de la frecuencia de vibración.

Por tanto, la respuesta correcta es la **c).**

6. **Si se duplica la amplitud de un oscilador armónico simple, ¿cómo varía su energía?**

La energía de un oscilador armónico simple se puede expresar del siguiente modo:

$$E_m = \frac{1}{2} \cdot k \cdot A^2$$

Si se duplica la amplitud:

$$E'_m = \frac{1}{2} \cdot k \cdot (2 \cdot A)^2 = 4 \cdot \frac{1}{2} \cdot k \cdot A^2 = 4 \cdot E'_m$$

Por tanto, al duplicar la amplitud, la energía se multiplica por cuatro.

EJERCICIOS

7. **Un muelle vibra con una frecuencia angular de 30 rad · s^{-1}. Sabiendo que la masa del muelle es 100 g, calcula su constante elástica.**

A partir de la expresión de la frecuencia propia del sistema, obtenemos la constante elástica del muelle:

$$\omega = \sqrt{\frac{k}{m}} \rightarrow k = \omega^2 \cdot m = 30^2 \cdot 0,1 = 90 \text{ N} \cdot \text{m}^{-1}$$

8. **Calcula la longitud del hilo del que cuelga la masa en un péndulo simple cuyo período es 2 segundos.**

Aplicando directamente la expresión que permite calcular el período para un péndulo simple, obtenemos el siguiente resultado:

$$T = 2 \cdot \pi \cdot \sqrt{\frac{l}{g}} \rightarrow l = \frac{T^2 \cdot g}{4 \cdot \pi^2} = \frac{2^2 \cdot 9,8}{4 \cdot \pi^2} = 0,993 \text{ m}$$

9. Un péndulo formado por un hilo inextensible, del que cuelga una masa de 400 g, tiene un período de 2 segundos. Calcula la longitud del péndulo.

El período de un péndulo no depende de la masa que cuelga de él, sino de su longitud y del valor de la aceleración de la gravedad; por tanto, el dato de la masa es innecesario. Si tomamos el valor de 9,8 m/s² para la aceleración de la gravedad, la longitud del péndulo será:

$$T = 2 \cdot \pi \cdot \sqrt{\frac{l}{g}}$$

$$l = \frac{T^2 \cdot g}{4 \cdot \pi^2} = \frac{2^2 \cdot 9,8}{4 \cdot \pi^2} = 0,993 \text{ m}$$

10. Cuando una masa, m_1, cuelga del extremo inferior de un resorte vertical, este realiza oscilaciones con movimiento armónico simple, de período T_0. Calcula el período de las oscilaciones cuando se agrega una masa m_2 a dicho resorte.

Partiendo del primer dato, podemos calcular la constante elástica del resorte:

$$T_0 = 2 \cdot \pi \cdot \sqrt{\frac{m_1}{k}} \rightarrow k = \frac{4 \cdot \pi^2 \cdot m_1}{T_0^2}$$

El muelle sigue siendo el mismo. No obstante, ahora se le añade una segunda masa, m_2, con lo que el período pasa a ser:

$$T_1 = 2 \cdot \pi \cdot \sqrt{\frac{m_1 + m_2}{k}}$$

Si sustituimos la constante del muelle por su valor y simplificamos la expresión resultante, el período queda en la forma:

$$T_1 = 2 \cdot \pi \cdot \sqrt{\frac{m_1 + m_2}{\left(\frac{4 \cdot \pi^2 \cdot m_1}{T_0^2}\right)}} = T_0 \cdot \sqrt{\frac{m_1 + m_2}{m_1}} = T_0 \cdot \sqrt{1 + \frac{m_2}{m_1}}$$

11. Dos objetos, de la misma masa, se encuentran unidos a sendos muelles, idénticos. Se estiran a la vez, el primero 10 cm y el segundo 5 cm, y se dejan en libertad. ¿Cuál de los dos objetos alcanzará primero la posición de equilibrio?

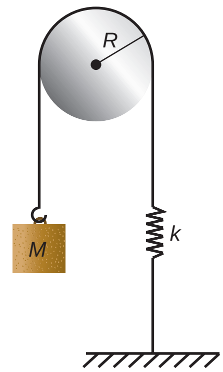
El período de oscilación de una partícula ligada a un muelle cuando este oscila libremente es:

$$T = 2 \cdot \pi \cdot \sqrt{\frac{m}{k}}$$

Por tanto, en un movimiento armónico simple, el período (y, en consecuencia, la frecuencia) es independiente de la amplitud.

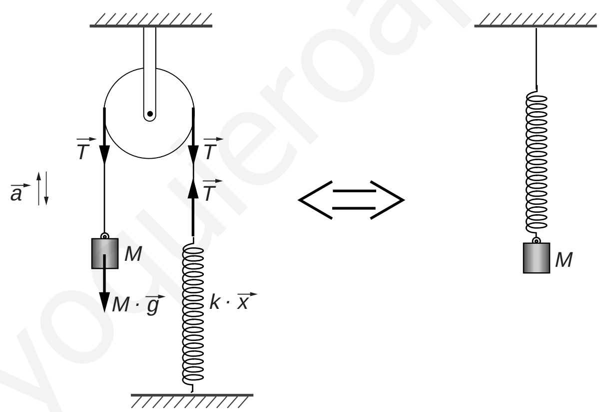
Como en el caso que propone el enunciado tanto la masa como el muelle son iguales, los dos objetos alcanzarán a la vez la posición de equilibrio.

12. En el esquema de la figura, la masa *M* se encuentra en la posición de equilibrio, *k* es la constante elástica del muelle, y *R*, el radio de la polea.



Calcula el período de las oscilaciones que realizará al desplazar ligeramente la masa *M* de dicha posición.

Si consideramos despreciable el efecto de rotación de la polea, el dispositivo es similar a un muelle ideal que separamos de su posición de equilibrio.



El período será, por tanto:

$$T = 2 \cdot \pi \cdot \sqrt{\frac{M}{k}}$$

13. Variando la longitud de un péndulo simple y midiendo el período de oscilación que corresponde a dicha longitud, se puede determinar con precisión el valor de la aceleración de la gravedad. Diseña una experiencia que permita calcular dicho valor. Ten en cuenta los criterios que debes seguir al realizar una experiencia práctica.

Podemos despejar el valor de la aceleración de la gravedad de la expresión que permite calcular el período de oscilación de un péndulo simple:

$$T = 2 \cdot \pi \cdot \sqrt{\frac{l}{g}} \rightarrow g = \frac{4 \cdot \pi^2 \cdot l}{T^2}$$

Teniendo en cuenta que la aceleración de la gravedad depende únicamente de la longitud del hilo y del período de la oscilación, puede determinarse de manera indirecta como se indica a continuación.

Diseño de la experiencia:

- Enganchamos un hilo fino a una bola. Es preferible que la bola sea pequeña y de densidad elevada para que interaccione poco con el aire y se disminuya al máximo el rozamiento. Es conveniente realizar la experiencia en un lugar cerrado, sin corrientes de aire.
- Enganchamos el péndulo a un punto fijo (por ejemplo, el techo).
- Separamos la bola de la vertical un ángulo pequeño (menor de 5°); de lo contrario, la hipótesis que nos ha llevado a obtener el resultado no es válida.
- Medimos el período de las oscilaciones. Para ello, dejamos oscilar el péndulo y, tras realizar una o dos oscilaciones, medimos el tiempo que tarda en realizar diez oscilaciones, al menos. De ese modo, la imprecisión en la medida del tiempo que tarda en realizarse una oscilación disminuye de forma apreciable.
- Realizamos varias mediciones para distintas longitudes del hilo.
- Tras aplicar la fórmula para cada longitud, obtendremos diversos valores para la gravedad. Como valor de la gravedad tomaremos el valor medio de todos ellos.

14. Comprueba que en un movimiento armónico simple la relación entre la velocidad y la posición viene dada por la expresión:

$$\boldsymbol{v^2 = \omega^2 \cdot (A^2 - x^2)}$$

La expresión que permite calcular la elongación o posición en un m.a.s. es:

$$x = A \cdot sen\ (\omega \cdot t + \theta_0)$$

siendo la de la velocidad:

$$v = A \cdot \omega \cdot cos\ (\omega \cdot t + \theta_0)$$

Por tanto:

$$\frac{x}{A} = sen\ (\omega \cdot t + \theta_0) \quad ; \quad \frac{v}{A \cdot \omega} = cos\ (\omega \cdot t + \theta_0)$$

Si elevamos al cuadrado ambas expresiones y las sumamos, el segundo miembro será igual a la unidad:

$$\frac{x^2}{A^2} + \frac{v^2}{A^2 \cdot \omega^2} = 1$$

de donde resulta, al despejar:

$$\omega^2 \cdot x^2 + v^2 = A^2 \cdot \omega^2 \rightarrow v^2 = \omega^2 \cdot (A^2 - x^2)$$

15. La expresión:

$$\boldsymbol{x = 0{,}2 \cdot sen\ (\pi \cdot t)}$$

en la que x se mide en metros si t se mide en segundos, describe el movimiento de una partícula. Se pide:

a) **La amplitud, el período, la frecuencia y la frecuencia angular que corresponden al movimiento.**

b) **Obtén las ecuaciones $v = f(t)$ y $a = f(t)$.**

c) **Completa una tabla como la que se adjunta:**

t	x	v	a
0			
$T/4$			
$T/2$			
$3 \cdot T/4$			
T			
$5 \cdot T/4$			
$3 \cdot T/2$			
$7 \cdot T/4$			
$2 \cdot T$			

d) **Haz la representación gráfica de las ecuaciones $x = f(t)$, $v = f(t)$ y $a = f(t)$. Utiliza para ello los valores de la tabla anterior.**

a) La ecuación de un m.a.s. es la siguiente:

$$x = A \cdot sen\ (\omega \cdot t + \varphi)$$

donde: A es amplitud; ω, la frecuencia angular; t,el tiempo, y φ, la fase inicial.

Si identificamos términos con la ecuación del enunciado:

$$x = 0{,}2 \cdot sen\ (\pi \cdot t)$$

resulta:

$$A = 0{,}2 \text{ m} \quad ; \quad \omega = \pi \text{ rad} \cdot \text{s}^{-1} \quad ; \quad \varphi = 0$$

A partir de la relación que existe entre la frecuencia angular y el período, obtenemos este último:

$$\omega = \frac{2 \cdot \pi}{T} \rightarrow T = \frac{2 \cdot \pi}{\omega} = \frac{2 \cdot \pi}{\pi} = 2 \text{ s}$$

Por tanto, la frecuencia, que es la inversa del período, es:

$$T = \frac{1}{f} \rightarrow f = \frac{1}{T} = \frac{1}{2} = 0{,}5 \text{ Hz}$$

b) Las ecuaciones que corresponden a la velocidad y a la aceleración del movimiento las obtenemos derivando la ecuación de la posición respecto al tiempo. De ese modo:

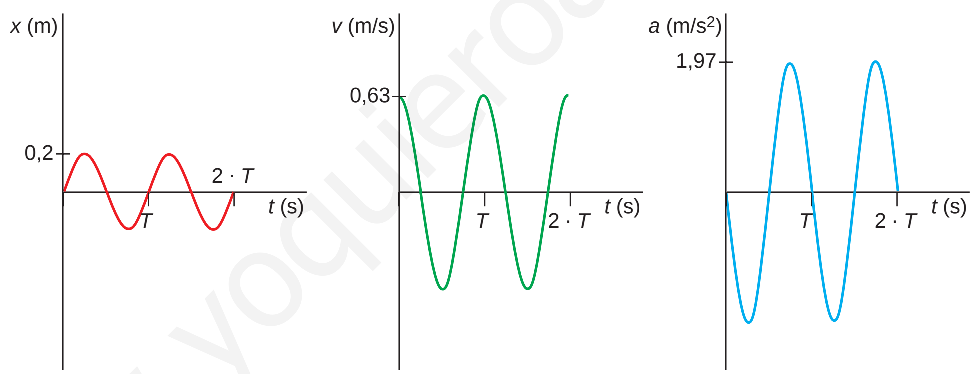
$$v = \frac{dx}{dt} = 0{,}2 \cdot \pi \cdot cos(\pi \cdot t)$$

$$a = \frac{dv}{dt} = -0{,}2 \cdot \pi^2 \cdot sen(\pi \cdot t)$$

c) La tabla que solicita el enunciado es la siguiente:

t	*x*	*v*	*a*
0	0	0,63	0
T/4	0,2	0	–1,97
T/2	0	–0,63	0
3 · *T*/4	–0,2	0	1,97
T	0	0,63	0
5 · *T*/4	0,2	0	–1,97
3 · *T*/2	0	–0,63	0
7 · *T*/4	–0,2	0	1,97
2 · *T*	0	0,63	0

d) La representación gráfica de los valores de la tabla anterior es:



PROBLEMAS

16. Una partícula oscila con movimiento armónico simple de amplitud 0,5 cm y 15 Hz de frecuencia. Calcula la velocidad y la elongación al cabo de un segundo de comenzar el movimiento.

Los datos que proporciona el enunciado del problema son:

$$A = 0{,}5 \text{ cm} = 5 \cdot 10^{-3} \text{ m}$$

$$f = 15 \text{ Hz}$$

A partir de la frecuencia, podemos calcular la frecuencia angular del movimiento armónico simple:

$$\omega = 2 \cdot \pi \cdot f = 2 \cdot \pi \cdot 15 = 30 \cdot \pi \cdot \text{rad} \cdot \text{s}^{-1}$$

La ecuación de la posición de una partícula que describe un m.a.s. es:

$$x = A \cdot sen\,(\omega \cdot t + \varphi_0)$$

Si consideramos la fase inicial nula, la ecuación que representa el movimiento de la partícula es:

$$x = 5 \cdot 10^{-3} \cdot sen\,(30 \cdot \pi \cdot t)$$

En ella, x se expresa en metros si t se expresa en segundos. Si derivamos la expresión anterior respecto al tiempo, obtenemos las expresiones que corresponden a la velocidad y a la aceleración de la partícula:

$$v = 30 \cdot \pi \cdot 5 \cdot 10^{-3} \cdot cos\,(30 \cdot \pi \cdot t)$$

$$a = -30^2 \cdot \pi^2 \cdot 5 \cdot 10^{-3} \cdot sen\,(30 \cdot \pi \cdot t)$$

Al cabo de un segundo de iniciarse el movimiento, los valores de la elongación, de la velocidad y de la aceleración son:

$$x\,(t = 1\text{ s}) = 5 \cdot 10^{-3} \cdot sen\,(30 \cdot \pi \cdot 1) = 0$$

$$v\,(t = 1\text{ s}) = 30 \cdot \pi \cdot 5 \cdot 10^{-3} \cdot cos\,(30 \cdot \pi \cdot 1) = 5 \cdot 10^{-3} \cdot 30 \cdot \pi = 0{,}47\text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$$

$$a\,(t = 1\text{ s}) = 30^2 \cdot \pi^2 \cdot 5 \cdot 10^{-3} \cdot sen\,(30 \cdot \pi \cdot 1) = 0$$

17. Calcula el valor máximo de la aceleración de un m.a.s. cuya amplitud es 8 mm y cuya frecuencia es 450 Hz.

Los datos de que disponemos son:

$$A = 8\text{ mm} = 8 \cdot 10^{-3}\text{ m}$$

$$f = 450\text{ Hz}$$

El período y la frecuencia angular del m.a.s. son:

$$T = \frac{1}{f} = \frac{1}{450} = 0{,}002\text{ s}$$

$$\omega = 2 \cdot \pi \cdot f = 2 \cdot \pi \cdot 450 = 900 \cdot \pi \cdot \text{rad} \cdot \text{s}^{-1}$$

La expresión que proporciona la posición en un m.a.s. es:

$$x = A \cdot sen\,(\omega \cdot t \cdot \theta_0)$$

Considerando nula la fase inicial, $\theta_0 = 0$, la ecuación de la posición es:

$$x = 8 \cdot 10^{-3} \cdot sen\,(900 \cdot \pi \cdot t)$$

En esta expresión, x se mide en metros si t se expresa en segundos. Al derivarla respecto al tiempo, obtenemos la ecuación de la velocidad:

$$v = 8 \cdot 10^{-3} \cdot 900 \cdot \pi \cdot cos\,(900 \cdot \pi \cdot t)$$

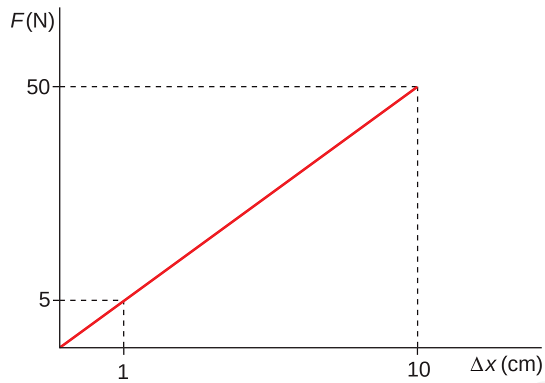
Al derivar esta última, de nuevo, respecto al tiempo, obtenemos la ecuación de la aceleración:

$$a = -8 \cdot 10^{-3} \cdot 900^2 \cdot \pi^2 \cdot sen\,(900 \cdot \pi \cdot t)$$

cuyo valor máximo se obtiene cuando $sen\,(900 \cdot \pi \cdot t) = -1$, siendo este:

$$a_{máx} = 8 \cdot 10^{-3} \cdot 900^2 \cdot \pi^2 = 63\,955{,}04\text{ m} \cdot \text{s}^{-2}$$

18. El comportamiento elástico de un muelle es el que se indica en la figura.



Del muelle cuelga una masa de 1,5 kg. En cierto instante, el muelle se separa 8 cm de la posición de equilibrio, comenzando a oscilar. Calcula:

a) La constante elástica del muelle.

b) La frecuencia angular.

c) El período de las oscilaciones que efectúa la masa.

a) La figura nos proporciona información suficiente para deducir la constante elástica del muelle, ya que:

$$F = k \cdot \Delta x \rightarrow k = \frac{\Delta F}{\Delta(\Delta x)} = \frac{50-5}{(10-1)\cdot 10^{-2}} = 500 \text{ N} \cdot \text{m}^{-1}$$

b) Conocida la constante elástica, la frecuencia angular del sistema se obtiene de forma inmediata:

$$\omega = \sqrt{\frac{k}{m}} = \sqrt{\frac{500}{1,5}} = 18,26 \text{ rad} \cdot \text{s}^{-1}$$

c) El período de las oscilaciones se calcula a partir de su relación con la frecuencia angular:

$$\omega = \frac{2\cdot\pi}{T} \rightarrow T = \frac{2\cdot\pi}{\omega} = \frac{2\cdot\pi}{18,25} = 0,344 \text{ s}$$

19. Al colocar un objeto de 250 g suspendido de un resorte se produce un alargamiento de 3,5 cm. Si a continuación se estira hasta 5 cm y se deja oscilar libremente el sistema, este describe un movimiento armónico simple:

a) Calcula la fuerza recuperadora que ejerce el resorte.

b) Escribe la ecuación del movimiento armónico simple que describe el objeto.

a) La constante elástica del resorte es la relación entre la fuerza aplicada (el peso del objeto) y el alargamiento producido. En efecto, a partir de la ley de Hooke::

$$F_e = -k \cdot x = -P \rightarrow k = \frac{P}{x} = \frac{m \cdot g}{x} = \frac{0,25 \cdot 9,8}{0,035} = 70 \text{ N} \cdot \text{m}^{-1}$$

Cuando el muelle se estira hasta 5 cm, la fuerza recuperadora que este ejerce es:

$$F_e = -k \cdot x = -70 \cdot 0{,}05 = -3{,}5 \text{ N}$$

El signo negativo indica que la fuerza recuperadora es de sentido contrario a la elongación.

b) La ecuación general de la elongación de una masa sujeta al extremo de un muelle puede escribirse en la forma:

$$x = A \cdot sen\left(\sqrt{\frac{k}{m}} \cdot t + \theta_0\right)$$

En el caso del movimiento que describe el enunciado, la amplitud es:

$$A = 5 \text{ cm} - 3{,}5 \text{ cm} = 1{,}5 \text{ cm} = 1{,}5 \cdot 10^{-2} \text{ m}$$

ya que la posición de equilibrio está situada a 3,5 cm de la longitud en reposo del muelle.

Si consideramos la fase inicial nula, $\theta_0 = 0$, la ecuación del movimiento, expresada en unidades del S.I., es:

$$x = 1{,}5 \cdot 10^{-2} \cdot sen\left(\sqrt{\frac{70}{0{,}25}} \cdot t\right)$$

20. Una partícula se mueve con movimiento armónico simple, según una línea recta. Del movimiento de la partícula se conoce su velocidad máxima, $v = 0{,}4$ m · s^{-1}, y su aceleración máxima, $a = 0{,}6$ m · s^{-2}. Teniendo en cuenta estos datos, determina el período y la frecuencia del movimiento.

Las expresiones que permiten calcular el valor absoluto de la velocidad máxima y de la aceleración máxima en un m.a.s. son:

$$v_{máx} = A \cdot \omega \quad ; \quad a_{máx} = A \cdot \omega^2$$

Dividiendo entre sí ambas expresiones:

$$\frac{a_{máx}}{v_{máx}} = \frac{A \cdot \omega^2}{A \cdot \omega} = \omega \rightarrow \omega = \frac{0{,}6}{0{,}4} = 1{,}5 \text{ rad} \cdot \text{s}^{-1}$$

Con el dato de la frecuencia angular obtenemos fácilmente el período y la frecuencia del movimiento:

$$\left.\begin{array}{l} \omega = 2 \cdot \pi \cdot f \\ f = 1/T \end{array}\right\} \rightarrow f = \frac{\omega}{2 \cdot \pi} = \frac{1{,}5}{2 \cdot \pi} = 0{,}239 \text{ Hz} \rightarrow T = 4{,}19 \text{ s}$$

NOTA: La resolución de este problema se ofrece también en el CD-ROM para el alumnado.

21. Un péndulo está formado por un hilo inextensible del que cuelga una masa de 100 g. Dicho péndulo se mueve con movimiento armónico simple. La ecuación del movimiento que le corresponde es:

$$y = cos\,(20 \cdot \pi \cdot t)$$

Determina la ecuación de la velocidad y de la aceleración en cualquier instante.

La ecuación de la velocidad y la de la aceleración las obtenemos derivando, respecto al tiempo, la ecuación de la posición proporcionada por el enunciado:

$$v = \frac{dy}{dt} = -20 \cdot \pi \cdot sen\,(20 \cdot \pi \cdot t)$$

$$a = \frac{dv}{dt} = -20^2 \cdot \pi^2 \cdot cos\,(20 \cdot \pi \cdot t)$$

22. Una partícula se mueve a lo largo de una recta con m.a.s. En el punto $x = 2$ cm lleva una velocidad de 8 cm · s^{-1} y en el punto $x = 6$ cm lleva una velocidad de 3 cm · s^{-1}. Calcula:

a) La frecuencia angular.

b) El período y la frecuencia del movimiento.

c) La amplitud de la vibración.

FE DE ERRATAS DEL LIBRO DEL ALUMNO: el segundo valor de la velocidad que aparece en el enunciado debe estar expresado en cm · s^{-1}, no en m · s^{-1}.

a) Las expresiones generales de la posición y de la velocidad de una partícula que efectúa un m.a.s. son:

$$x = A \cdot sen\,(\omega \cdot t + \theta_0) \quad ; \quad v = A \cdot \omega \cdot cos\,(\omega \cdot t + \theta_0)$$

Si consideramos la fase inicial nula, $\theta_0 = 0$, podemos escribir, para el primer instante de tiempo, t_1:

$$\left.\begin{array}{l} 2 = A \cdot sen\,(\omega \cdot t_1) \\ 8 = A \cdot \omega \cdot cos\,(\omega \cdot t_1) \end{array}\right\} \rightarrow \left\{\begin{array}{l} \dfrac{2}{A} = sen\,(\omega \cdot t_1) \\ \dfrac{8}{A \cdot \omega} = cos\,(\omega \cdot t_1) \end{array}\right.$$

Si elevamos las dos expresiones al cuadrado y las sumamos, el miembro de la derecha es igual a la unidad. Por tanto:

$$\frac{4}{A^2} + \frac{64}{A^2 \cdot \omega^2} = 1 \rightarrow \frac{4 \cdot \omega^2 + 64}{A^2 \cdot \omega^2} = 1 \rightarrow 4 \cdot \omega^2 - A^2 \cdot \omega^2 + 64 = 0 \qquad [1]$$

De manera similar, para el instante de tiempo t_2 podemos escribir lo siguiente:

$$\left.\begin{array}{l} 6 = A \cdot sen\,(\omega \cdot t_2) \\ 3 = A \cdot \omega \cdot cos\,(\omega \cdot t_2) \end{array}\right\} \rightarrow \left\{\begin{array}{l} \dfrac{6}{A} = sen\,(\omega \cdot t_2) \\ \dfrac{3}{A \cdot \omega} = cos\,(\omega \cdot t_2) \end{array}\right.$$

Elevando ambas expresiones al cuadrado y operando, se obtiene:

$$\frac{36}{A^2} + \frac{9}{A^2 \cdot \omega^2} = 1 \rightarrow \frac{36 \cdot \omega^2 + 9}{A^2 \cdot \omega^2} = 1 \rightarrow 36 \cdot \omega^2 - A^2 \cdot \omega^2 + 9 = 0 \qquad [2]$$

Si restamos la expresión [1] de la [2] y despejamos ω, obtenemos el valor de la frecuencia angular:

$$32 \cdot \omega^2 - 55 = 0 \rightarrow \omega = \sqrt{\frac{55}{32}} = 1{,}31 \text{ rad} \cdot \text{s}^{-1}$$

b) Teniendo en cuenta que:

$$\omega = 2 \cdot \pi \cdot f \rightarrow f = \frac{\omega}{2 \cdot \pi} = \frac{1{,}31}{2 \cdot \pi} = 0{,}21 \text{ Hz}$$

El período del movimiento será:

$$T = \frac{1}{f} = \frac{1}{0{,}21} = 4{,}79 \text{ s}$$

c) La amplitud de la vibración la podemos obtener directamente a partir de las expresiones [1] o [2]. Por ejemplo, si partimos de la ecuación [1], se obtiene:

$$4 \cdot \omega^2 - A^2 \cdot \omega^2 + 64 = 0 \rightarrow A^2 = \frac{4 \cdot \omega^2 + 64}{\omega^2}$$

$$A = \sqrt{\frac{4 \cdot \omega^2 + 64}{\omega^2}} = \sqrt{\frac{4 \cdot 1{,}31^2 + 64}{1{,}31^2}} = 6{,}42 \text{ m}$$

Por tanto, la ecuación general del m.a.s. que efectúa la partícula es:

$$x = 6{,}42 \cdot sen\ (1{,}31 \cdot t)$$

En ella, la posición se expresa en centímetros si el tiempo se expresa en segundos.

23 Una masa de 5 kg se coloca sobre un resorte situado en posición vertical y lo comprime 10 cm. La masa es impulsada hacia abajo, hasta que comprime el muelle 20 cm. Tras esto, el sistema queda en libertad. Calcula:

a) La constante elástica del muelle.

b) La amplitud y el período de las oscilaciones.

c) La posición y la velocidad de la partícula en cualquier instante.

a) La constante elástica del resorte es la relación entre fuerza aplicada y alargamiento:

$$F = k \cdot x \rightarrow k = \frac{F}{x} = \frac{m \cdot g}{x} = \frac{5 \cdot 9{,}8}{0{,}1} = 490 \text{ N} \cdot \text{m}^{-1}$$

b) El sistema está en equilibrio cuando, debido al peso del cuerpo, el muelle se ha contraído 10 cm respecto a su longitud natural. No obstante, el muelle se separa de dicha posición de equilibrio hasta que la elongación máxima respecto a su longitud natural es de 20 cm. Por tanto, la amplitud del movimiento será:

$$A = 20 - 10 = 10 \text{ cm}$$

Por otra parte, el período de las oscilaciones resulta:

$$T = 2 \cdot \pi \cdot \sqrt{\frac{m}{k}} = 2 \cdot \pi \cdot \sqrt{\frac{5}{490}} = 0{,}635 \text{ s}$$

c) En el instante en que se inicia el movimiento, la amplitud es máxima. Este dato permite calcular la fase inicial:

$$\left.\begin{array}{l} x = A \cdot sen\ (\omega \cdot t + \varphi) \\ x(0) = A \cdot sen\ (\omega \cdot 0 + \varphi) = A \end{array}\right\} \rightarrow sen\ \varphi = 1 \rightarrow \varphi = \frac{\pi}{2}$$

En cuanto a la frecuencia angular del movimiento, resulta:

$$\omega = \frac{2 \cdot \pi}{T} = \frac{2 \cdot \pi}{0,635} = 9,9 \text{ rad} \cdot \text{s}^{-1}$$

Conocidas la fase inicial y la frecuencia, estamos en condiciones de determinar las ecuaciones que proporcionan la posición y la velocidad en cada instante:

$$x = 0,1 \cdot sen\left(9,9 \cdot t + \frac{\pi}{2}\right)$$

$$v = 0,99 \cdot cos\left(9,9 \cdot t + \frac{\pi}{2}\right)$$

24. La ecuación del m.a.s. con que se mueve un objeto viene dada por:

$$\boldsymbol{y = sen\,(6 \cdot \pi \cdot t + \pi)}$$

Calcula:

a) La amplitud, la frecuencia y el período de las oscilaciones.

b) La energía potencial de la masa en cualquier instante.

c) La energía cinética de la masa en cualquier instante.

d) La energía total de la masa en cualquier instante.

a) La ecuación general de posición de un m.a.s. tiene por expresión:

$$x = A \cdot sen\ (\omega \cdot t + \varphi)$$

Identificando los parámetros de la ecuación general con la ecuación del problema, la amplitud resulta:

$$A = 1 \text{ m}$$

La frecuencia angular es, por comparación con la ecuación general:

$$\omega = 6 \cdot \pi \text{ rad} \cdot \text{s}^{-1}$$

Conocido este valor, es inmediato obtener el período y la frecuencia:

$$\left.\begin{array}{l} \omega = \dfrac{2 \cdot \pi}{T} \\ f = \dfrac{1}{T} \end{array}\right\} \rightarrow T = \frac{2 \cdot \pi}{\omega} = \frac{2 \cdot \pi}{6 \cdot \pi} = \frac{1}{3} = 0,33 \text{ s} ;\ f = \frac{1}{T} = 3 \text{ Hz}$$

b) La expresión que proporciona la energía potencial en un movimiento armónico simple es:

$$E_p = \frac{1}{2} \cdot m \cdot \omega^2 \cdot A^2 \cdot sen^2\ (\omega \cdot t + \varphi)$$

En nuestro caso, la energía potencial de la masa en función del tiempo es:

$$E_p = \frac{1}{2} \cdot m \cdot (6 \cdot \pi)^2 \cdot 1^2 \cdot sen^2\ (6 \cdot \pi \cdot t + \pi)$$

$$E_p = 18 \cdot \pi^2 \cdot m \cdot sen^2\ (6 \cdot \pi \cdot t + \pi) \text{ J}$$

c) Para la energía cinética obtenemos:

$$E_c = \frac{1}{2} \cdot m \cdot \omega^2 \cdot A^2 \cdot cos^2 (\omega \cdot t + \varphi)$$

$$E_c = \frac{1}{2} \cdot m \cdot (6 \cdot \pi)^2 \cdot 1^2 \cdot cos^2 (6 \cdot \pi \cdot t + \pi)$$

$$E_c = 18 \cdot \pi^2 \cdot m \cdot cos^2 (6 \cdot \pi \cdot t + \pi) \text{ J}$$

d) La energía total es la suma de la energía cinética más la energía potencial:

$$E = E_p + E_c$$

$$E = 18 \cdot \pi^2 \cdot m \cdot [sen^2 (6 \cdot \pi \cdot t + \pi) + cos^2 (6 \cdot \pi \cdot t + \pi)]$$

$$E = 18 \cdot \pi^2 \cdot m \text{ J}$$

NOTA: la resolución de este problema se ofrece también en el CD-ROM para el alumnado.

25. Una partícula de 6 g de masa se mueve a lo largo del eje *X*, atraída hacia el origen con una fuerza que, en newton, es diez veces su distancia, *x*, respecto al origen. Si la partícula parte del reposo en la posición *x* = 5 cm, calcula la amplitud, el período y la frecuencia del movimiento que describe.

Si existe una fuerza que atrae la partícula hacia el centro, esta debería mantenerse siempre en el origen. No obstante, como ha sido separada 5 cm, ha almacenado cierta energía y, fruto de ello, describe un m.a.s. sobre el eje *X* alrededor del origen. La amplitud de este movimiento armónico simple son los 5 cm de separación iniciales:

$$A = 5 \text{ cm}$$

La fuerza a la que está sometida la partícula es proporcional a la distancia y de sentido contrario (m.a.s.), a razón de 10 N · m^{-1}; es decir:

$$\left.\begin{cases} F = -k \cdot x \\ F = -10 \cdot x \end{cases}\right\} \rightarrow k = 10 \text{ N} \cdot \text{m}^{-1}$$

Para calcular el período del movimiento, sustituimos en la expresión que sigue, obteniendo el resultado que se indica:

$$T = 2 \cdot \pi \cdot \sqrt{\frac{m}{k}} = 2 \cdot \pi \cdot \sqrt{\frac{0,006}{10}} = 0,154 \text{ s}$$

La frecuencia es la inversa del período; por tanto:

$$f = \frac{1}{T} = \frac{1}{0,154} = 6,5 \text{ Hz}$$

26 Un muelle de constante elástica 3,5 · 10^5 N · m^{-1} está comprimido 6 cm. Al soltarlo y llegar a su posición de equilibrio, actúa sobre un cuerpo cuya masa es de 250 g. Calcula la velocidad que le comunica.

La energía potencial que almacena el muelle cuando está comprimido una distancia *x* es:

$$E_p = \frac{1}{2} \cdot k \cdot x^2$$

Por tanto:

$$E_p = \frac{1}{2} \cdot 3{,}5 \cdot 10^5 \cdot (6 \cdot 10^{-2})^2 = 630 \text{ J}$$

Si consideramos el sistema libre de rozamientos, esa energía potencial le será comunicada a la masa, que se encuentra en la posición de equilibrio, en forma de energía cinética. Por tanto, la velocidad que alcanzará la masa será:

$$E_c = \frac{1}{2} \cdot m \cdot v^2 \rightarrow v = \sqrt{\frac{2 \cdot E_c}{m}} = \sqrt{\frac{2 \cdot 630}{0{,}250}} = 71 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$$

27. Calcula la energía potencial elástica acumulada en un muelle de constante elástica 3 500 N · m^{-1} en el instante en que está comprimido y mide 5 cm. Sabemos que su longitud natural es 8 cm.

Si la longitud natural del muelle es 8 cm y cuando está comprimido mide 5 cm, la contracción que experimenta es de 3 cm. Por tanto, la energía potencial que acumula en esta situación es:

$$E_p = \frac{1}{2} \cdot k \cdot x^2 = \frac{1}{2} \cdot 3\,500 \cdot (3 \cdot 10^{-2})^2 = 1{,}575 \text{ J}$$

28. Un muelle, situado en un plano horizontal, lleva unido un objeto de 175 g y está comprimido 7 cm respecto a su longitud natural. Su constante elástica es 2 500 N · m^{-1}.

Calcula la velocidad que llevará el objeto cuando pase por el punto de equilibrio:

a) En ausencia de rozamientos.

b) Cuando actúa una fuerza de rozamiento constante de 56 N.

a) En ausencia de rozamientos, la energía potencial elástica del muelle en el estado de máxima elongación se transforma en energía cinética cuando pasa por el punto de equilibrio:

$$E_{p_{máx}} = E_{c_{máx}}$$

Por tanto:

$$\frac{1}{2} \cdot k \cdot x^2 = \frac{1}{2} \cdot m \cdot v^2$$

Despejando:

$$v^2 = \frac{k \cdot x^2}{m} \rightarrow v = x \cdot \sqrt{\frac{k}{m}}$$

$$v = 0{,}07 \cdot \sqrt{\frac{2\,500}{0{,}175}} = 8{,}37 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$$

b) Cuando actúa una fuerza de rozamiento, una parte de la energía potencial elástica inicial debe emplearse en vencer esta fuerza de rozamiento:

$$E_{p_{máx}} + W_{roz} = E_c$$

Por tanto:

$$\frac{1}{2} \cdot k \cdot x^2 - F_{roz} \cdot x = \frac{1}{2} \cdot m \cdot v^2$$

Despejando y sustituyendo valores, la velocidad del objeto resulta:

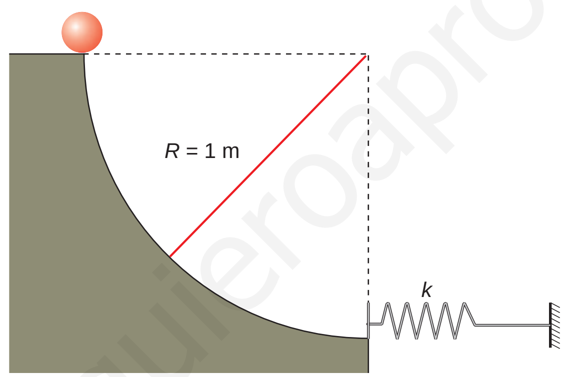
$$v^2 = \frac{k}{m} \cdot x^2 - \frac{2 \cdot F_{roz}}{m} \cdot x \rightarrow v = \sqrt{\frac{k}{m} \cdot x^2 - \frac{2 \cdot F_{roz}}{m} \cdot x}$$

$$v = \sqrt{\frac{2500}{0,175} \cdot 0,07^2 - \frac{2 \cdot 56}{0,175} \cdot 0,07} = 5,02 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$$

Como vemos, la fuerza de rozamiento que se opone al movimiento hace disminuir la velocidad del objeto.

NOTA: la resolución de este problema se ofrece también en el CD-ROM para el alumnado.

29 Una masa de 5 kg comienza a caer, sin rozamiento, por el plano de la figura.



Cuando llega al final, golpea el resorte, llegando a comprimirlo 5 cm. Calcula:

a) La constante elástica del resorte.

b) El período de las oscilaciones que describe el muelle al ser golpeado.

a) Cuando la bola, que está en lo alto del plano, llega hasta el muelle, transmite toda la energía potencial que tenía arriba en forma de energía potencial gravitatoria. El balance energético podemos expresarlo como:

$$\Delta E_{pot.\ gravitatoria} = \Delta E_{pot.\ elástica} \rightarrow m \cdot g \cdot R = \frac{1}{2} \cdot k \cdot x^2$$

Si despejamos la constante elástica del resorte, resulta:

$$k = \frac{2 \cdot m \cdot g \cdot R}{x^2} = \frac{2 \cdot 5 \cdot 9,8 \cdot 1}{0,05^2} = 39\,200 \text{ N} \cdot \text{m}^{-1}$$

b) Suponiendo que la masa del muelle es despreciable frente a la de 5 kg, y que esta queda “pegada” al resorte, que no se dobla, el período de las oscilaciones se calcula directamente a partir de la expresión:

$$T = 2 \cdot \pi \cdot \sqrt{\frac{m}{k}} = 2 \cdot \pi \cdot \sqrt{\frac{5}{39\,200}} = 7,1 \cdot 10^{-2} \text{ s}$$

30. **Una partícula se mueve con movimiento armónico simple. En el instante inicial se encuentra a 10 cm de su posición de equilibrio, que es la que ocupa cuando se encuentra en reposo. Si su frecuencia de vibración es 40 Hz, calcula la ecuación de la posición, la ecuación de la velocidad y la ecuación de la aceleración del movimiento.**

La ecuación de la posición de un m.a.s. es:

$$x = A \cdot sen\ (\omega \cdot t + \varphi)$$

Los 10 cm de separación, respecto al reposo, son la amplitud del movimiento. Por tanto, si en $t = 0$ se encuentra en su máxima elongación:

$$x(0) = A \cdot sen\ (\omega \cdot 0 + \varphi) = A \rightarrow sen\ \varphi = 1 \rightarrow \varphi = \frac{\pi}{2}$$

Por otra parte, recuerda que:

$$\omega = 2 \cdot \pi \cdot f = 2 \cdot \pi \cdot 40 = 80 \cdot \pi \text{ rad} \cdot \text{s}^{-1}$$

Por tanto:

$$x = 0{,}1 \cdot sen\left(80 \cdot \pi \cdot t + \frac{\pi}{2}\right)$$

Si derivamos la ecuación de la posición respecto al tiempo, obtenemos la de la velocidad:

$$v = \frac{dx}{dt} = 8 \cdot \pi \cdot cos\left(80 \cdot \pi \cdot t + \frac{\pi}{2}\right)$$

Derivando la expresión anterior, obtenemos:

$$a = \frac{dv}{dt} = -640 \cdot \pi^2 \cdot sen\left(80 \cdot \pi \cdot t + \frac{\pi}{2}\right)$$

31. **Un cuerpo de 300 g se mueve con movimiento armónico simple, siendo su frecuencia angular 15 rad/s. Si la amplitud con que se mueve vale 6 cm, calcula:**

a) La constante elástica.

b) La energía potencial que almacena.

c) La velocidad máxima.

a) La constante elástica se puede determinar a partir de la masa y de la frecuencia angular del sistema:

$$\omega = \sqrt{\frac{k}{m}} \rightarrow k = \omega^2 \cdot m = 15^2 \cdot 0{,}3 = 67{,}5 \text{ N} \cdot \text{m}^{-1}$$

b) En un m.a.s., la energía mecánica viene dada por:

$$E = E_c + E_p = \frac{1}{2} \cdot m \cdot A^2 \cdot \omega^2 \rightarrow E = \frac{1}{2} \cdot 0{,}3 \cdot 0{,}06^2 \cdot 15^2 = 0{,}12 \text{ J}$$

Este valor coincide con la energía potencial máxima de un m.a.s., que se alcanza en los puntos en los que la elongación es máxima y la energía cinética es nula.

c) La ecuación de la velocidad en un m.a.s. es:

$$v = A \cdot \omega \cdot cos\ (\omega \cdot t + \varphi)$$

Cuando la velocidad sea máxima, el coseno valdrá 1. Por tanto:

$$v_{máx} = A \cdot \omega$$

$$v_{máx} = 0{,}06 \cdot 15 = 0{,}9 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$$

NOTA: la resolución de este problema se ofrece también en el CD-ROM para el alumnado.

32. Una persona carga el maletero de un coche con 50 kg de paquetes. Ello hace que descienda el centro de gravedad del vehículo 0,4 cm. Calcula:

a) La constante elástica de los muelles amortiguadores del coche.

b) El período de vibración si se retiran los paquetes del automóvil.

c) El período de vibración cuando los paquetes están dentro del coche.

d) La frecuencia angular del movimiento armónico en ambos casos.

a) La constante elástica de los muelles se obtiene sustituyendo en la expresión de la ley de Hooke el valor de la fuerza que comprime los amortiguadores, que es el peso de los paquetes:

$$F = -k \cdot x = -P \rightarrow k = \frac{P}{x} = \frac{m \cdot g}{x} = \frac{50 \cdot 9{,}8}{0{,}004} = 122\,500 \text{ N} \cdot \text{m}^{-1}$$

b) Al quitar las maletas, la masa que permanece vibrando es solo la del automóvil. Como no nos dan la masa del coche, supondremos que se trata de un utilitario pequeño, de, aproximadamente, 700 kg de masa. Por tanto:

$$T = 2 \cdot \pi \cdot \sqrt{\frac{m_{coche}}{k}}$$

$$T = 2 \cdot \pi \cdot \sqrt{\frac{700}{122\,500}} = 0{,}475 \text{ s}$$

c) En el caso contrario, al añadir las maletas, la masa que vibra es mayor. En ese caso, el período resulta:

$$T' = 2 \cdot \pi \cdot \sqrt{\frac{m_{coche} + m_{maleta}}{k}}$$

$$T' = 2 \cdot \pi \cdot \sqrt{\frac{700 + 50}{122\,500}} = 0{,}492 \text{ s}$$

d) De la relación entre el período y la frecuencia angular deducimos el valor de esta última para cada uno de los casos analizados en el problema:

$$\omega = \frac{2 \cdot \pi}{T} = \frac{2 \cdot \pi}{0{,}475} = 13{,}23 \text{ rad} \cdot \text{s}^{-1}$$

$$\omega' = \frac{2 \cdot \pi}{T'} = \frac{2 \cdot \pi}{0{,}492} = 12{,}78 \text{ rad} \cdot \text{s}^{-1}$$

33. **La expresión que permite calcular el período del péndulo simple es:**

$$\boldsymbol{T = 2 \cdot \pi \cdot \sqrt{\frac{l}{g}}}$$

En dicha expresión, *l* es su longitud. Calcula la expresión que proporciona la velocidad del m.a.s. correspondiente, sabiendo que su amplitud es 5 cm, y la longitud del péndulo, 0,98 m.

Teniendo en cuenta la longitud del péndulo, podemos calcular el período y, en consecuencia, la frecuencia angular del movimiento:

$$T = 2 \cdot \pi \cdot \sqrt{\frac{l}{g}} = 2 \cdot \pi \cdot \sqrt{\frac{0,98}{9,8}} = 1,987 \text{ s}$$

$$\omega = \frac{2 \cdot \pi}{T} = \frac{2 \cdot \pi}{1,987} = 3,16 \text{ rad} \cdot \text{s}^{-1}$$

Sabemos que la ecuación general de la velocidad de un m.a.s. es:

$$v = A \cdot \omega \cdot cos\ (\omega \cdot t + \varphi)$$

Luego, suponiendo la fase inicial nula (no se indica nada al respecto) e identificando componentes:

$$v = 0,05 \cdot 3,16 \cdot cos\ (3,16 \cdot t + 0) = 0,158 \cdot cos\ (3,16 \cdot t) \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$$

NOTA: la resolución de este problema se ofrece también en el CD-ROM para el alumnado.

34. **Una partícula se mueve con un m.a.s. de 0,1 m de amplitud y 40 Hz de frecuencia. Calcula la velocidad de dicha partícula cuando pasa por la posición *x* = 0,05 m, medida desde su posición de equilibrio.**

Para determinar la posición, necesitamos conocer la frecuencia angular, que se obtiene a partir de la frecuencia:

$$\omega = 2 \cdot \pi \cdot f = 2 \cdot \pi \cdot 40 = 80 \cdot \pi \text{ rad} \cdot \text{s}^{-1}$$

La fase inicial la supondremos nula, pues no se indica nada al respecto. De este modo, resulta:

$$x = A \cdot sen\ (\omega \cdot t) = 0,1 \cdot sen\ (80 \cdot \pi \cdot t)$$

Para calcular la velocidad de la partícula, hemos de saber, en primer lugar, el intante en que ocupa la posición x = 0,005 m. Si despejamos de la ecuación de la elongación, resulta:

$$x(t) = 0,1 \cdot sen\ (80 \cdot \pi \cdot t) = 0,05 \rightarrow sen\ (80 \cdot \pi \cdot t) = \frac{0,05}{0,1} = 0,5 \rightarrow$$

$$\rightarrow 80 \cdot \pi \cdot t = \frac{\pi}{6} \rightarrow t = \frac{1}{6 \cdot 80} \text{ s}$$

Si derivamos la ecuación de la posición y sustituimos, obtenemos la velocidad de la partícula en función del tiempo:

$$v(t) = A \cdot \omega \cdot cos\ (\omega \cdot t) \rightarrow v(t) = 8 \cdot \pi \cdot cos\ (80 \cdot \pi \cdot t)$$

En el instante en que la partícula se encuentra en x = 0,05 m, su velocidad es:

$$v\left(t=\frac{1}{6\cdot 80}\right)=8\cdot\pi\cdot cos\left(80\cdot\pi\cdot\frac{1}{6\cdot 80}\right)=$$
$$=8\cdot\pi\cdot cos\left(\frac{\pi}{6}\right)=4\cdot\pi\cdot\sqrt{3}=21,77\ \text{m}\cdot\text{s}^{-1}$$

35 **Sobre una partícula, de 200 g de masa, actúa una fuerza elástica $F = -20 \cdot x$, siendo x la distancia desde la posición de equilibrio. Desplazamos la partícula 10 cm de dicha posición de equilibrio y la dejamos en libertad. Calcula:**

a) La frecuencia angular, el período y la frecuencia del m.a.s. que describe la partícula.

b) La energía que posee la partícula.

a) La expresión de la ley de Hooke proporciona la constante elástica, de la que deducimos las magnitudes que nos piden:

$$F=-k\cdot x\rightarrow k=\frac{|F|}{|x|}=20\ \text{N}\cdot\text{m}^{-1}$$

$$\omega=\sqrt{\frac{k}{m}}\rightarrow\omega=\sqrt{\frac{20}{0,2}}=10\ \text{rad}\cdot\text{s}^{-1}$$
$$T=2\cdot\pi\cdot\sqrt{\frac{m}{k}}=2\cdot\pi\cdot\sqrt{\frac{0,2}{20}}=0,2\cdot\pi=0,628\ \text{s}$$
$$f=\frac{1}{T}=\frac{1}{0,628}=1,592\ \text{Hz}$$

b) La energía mecánica de la partícula es:

$$E=E_c+E_p=\frac{1}{2}\cdot m\cdot A^2\cdot\omega^2=\frac{1}{2}\cdot 0,2\cdot 0,1^2\cdot 10^2=0,1\ \text{J}$$

36. Si colgamos una masa, *m*, de un muelle de constante elástica *k* y hacemos oscilar verticalmente el sistema que se forma, el movimiento que describe la masa es armónico simple.

Para comprobarlo, hemos colgado de un muelle de constante *k*, desconocida, un masa variable. Haciendo oscilar el conjunto, los períodos obtenidos han sido los reflejados en la tabla de la derecha.

Con los datos anteriores, confecciona un gráfica que muestre cómo varía el período, en función de la masa suspendida del muelle. ¿Qué forma tiene la curva? ¿Podemos obtener alguna conclusión?

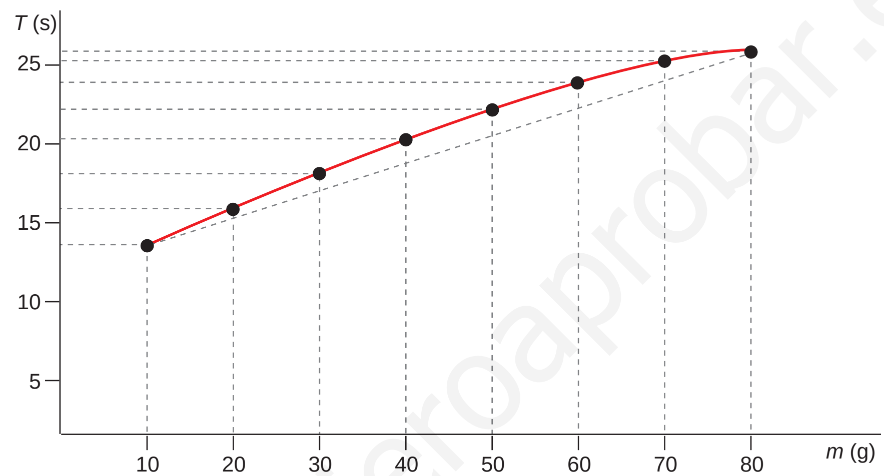
Masa (g)	Período (s)
10,00 ± 0,01	14,03 ± 0,03
20,00 ± 0,01	16,34 ± 0,03
30,00 ± 0,01	18,57 ± 0,03
40,00 ± 0,01	20,68 ± 0,05
50,00 ± 0,01	22,38 ± 0,01
60,00 ± 0,01	24,01 ± 0,04
70,00 ± 0,01	25,45 ± 0,03
80,00 ± 0,01	26,81 ± 0,07

Confecciona otra gráfica que muestre la relación que existe entre la masa y el cuadrado del período. ¿Encuentras ahora alguna relación?

Calcula, con los datos anteriores, el valor que corresponde a la constante elástica del muelle y el error con que viene afectado dicho valor. Justifica el proceso analítico que sigues.

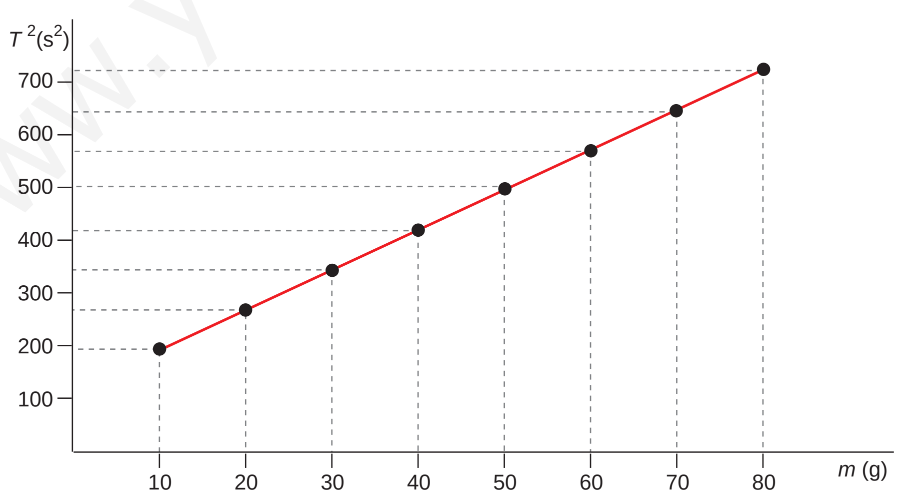
NOTA: Consulta, si lo necesitas, el apéndice sobre cálculo de errores que se incluye en el CD.

Al representar en una gráfica los resultados que se muestran en la tabla, obtenemos:



En la gráfica se puede observar que cuanto mayor es la masa que cuelga, mayor es el período de las oscilaciones. Sin embargo, la relación entre ambas magnitudes no es lineal; la pendiente de la curva no es constante.

La gráfica que muestra la relación entre la masa y el cuadrado del período es la siguiente:



En ella vemos que la relación entre ambas magnitudes es lineal. La masa es, por tanto, directamente proporcional al cuadrado del período.

En un m.a.s., el período y la masa están relacionados por medio de la expresión:

$$T = 2 \cdot \pi \cdot \sqrt{\frac{m}{k}}$$

Si en esta expresión despejamos el cuadrado del período, obtenemos:

$$T^2 = \frac{4 \cdot \pi^2}{k} \cdot m = \text{cte} \cdot m$$

La constante que aparece en la expresión anterior es la pendiente de la gráfica T^2-m:

$$\text{cte} = \frac{T_2^2 - T_1^2}{m_1 - m_2} = \frac{500,9 - 196,8}{(50 - 10) \cdot 10^{-3}} = 7\,602,5$$

Teniendo en cuenta este resultado, podemos calcular la constante elástica del muelle:

$$\text{cte} = \frac{4 \cdot \pi^2}{k} \rightarrow k = \frac{4 \cdot \pi^2}{\text{cte}} = \frac{4 \cdot \pi^2}{7\,602,5} = 5,19 \cdot 10^{-3} \text{ N} \cdot \text{m}^{-1}$$

NOTA: Dependiendo del par de puntos que hayamos tomado para calcular la pendiente, su valor puede variar ligeramente, haciéndolo también el valor que asignamos a la constante elástica del muelle. La realización del cálculo de errores correspondiente se puede hacer si el profesor o profesora lo estima procedente.