ACTIVIDADES FINALES

EJERCICIOS Y PROBLEMAS

1. Calcula los siguientes logartimos:

a) $\log_5 5$
b) $\log_5 25$
c) $\log_{25} 5$
d) $\log_4 64$
e) $\log_{1/4} 64$
f) $\log_{1/2} \sqrt[3]{4}$

2. Utilizando la definición de logaritmo, calcula x en cada uno de los apartados:

a) $\log_x 1\,000 = 3$
b) $\log_3 27 = x$
c) $\log_2 x = 3$
d) $\log_2 \frac{1}{16} = x$
e) $\log_x 32 = -5$
f) $\log x = 2$

3. Halla, con ayuda de la calculadora, los siguientes logaritmos:

a) $\log 7$
b) $\log \frac{1}{2}$
c) $\log 12$
d) $\ln 5$
e) $\ln \frac{1}{4}$
f) $\ln \sqrt{5}$
g) $\log (1{,}5 \cdot 10^8)$
h) $\ln (2{,}3 \cdot 10^7)$
i) $\ln (7 \cdot 10^{-5})$

4. Calcula el valor de las siguientes expresiones, sin hacer uso de la calculadora:

a) $\log_2 24 - \log_2 3$
b) $\log_6 3 + \log_6 4 + \log_6 18$
c) $\log_3 45 - \log_3 3 + \log_3 81 - \log_3 15$
d) $2 \log_5 10 - \log_5 4$
e) $\frac{1}{2} \log_2 36 + \log_3 \frac{1}{2}$
f) $\frac{3 \log_2 48 - \log_2 27}{2}$

5. Expresa como un solo logaritmo cada una de las siguientes expresiones:

a) $2 \log_2 M - 3 \log_2 N$
b) $\ln M + 2 \ln N - \ln P$
c) $\frac{3}{4} \log M - \frac{2}{5} \log N$
d) $\frac{2}{3} \ln M - \ln N - \frac{3}{2} \ln P$

6. Halla el valor de x en cada caso, aplicando las propiedades de los logaritmos:

a) $\log x = \log 75 - \log 3$
b) $\log x = 4 \log 3 + 3 \log 4$
c) $\ln x = \ln 3 - \frac{1}{2} \ln 9$
d) $\ln x = \frac{1}{2} \ln 36 + 3 \ln 2 - \ln 9$

7. Expresa los siguientes logaritmos como cocientes de logaritmos decimales y halla sus valores con la calculadora:

a) $\log_2 5$
b) $\log_5 2$
c) $\log_{0,3} 0{,}6$
d) $\log_3 (6)^2$
e) $\log_{0,25} \frac{2}{5}$
f) $\log_{2/3} \frac{4}{5}$

8. Sabiendo que $\log 2 = 0{,}3010$ y $\log 3 = 0{,}4771$, calcula:

a) $\log 6$
b) $\log 5$
c) $\log 12$
d) $\log 18$
e) $\log 300$
f) $\log 0{,}5$
g) $\log_3 2$
h) $\log_2 27$
i) $\log_5 9$
j) $\log 0{,}03$
k) $\log 1\,200$
l) $\log 0{,}45$

SOLUCIONES

1. Las soluciones quedan:

a) 1 b) 2 c) $\frac{1}{2}$ d) 3 e) -3 f) $-\frac{2}{3}$

2. En cada caso queda:

a) $x=10$ b) $x=3$ c) $x=8$ d) $x=-4$ e) $x=\frac{1}{2}$ f) $x=100$

3. En cada caso queda:

a) $0,85$ b) $-0,3010$ c) $1,08$ d) $1,609$ e) $-1,39$
f) $0,805$ g) $8,18$ h) $16,95$ i) $-9,57$

4. En cada caso queda:

a) 3 b) 3 c) 4 d) 2 e) $1,95$ f) 6

5. En cada caso queda:

a) $\log_2\left(\frac{M^2}{N^3}\right)$ b) $\ln\left(\frac{M\cdot N^2}{P}\right)$ c) $\log\left(\frac{M^{3/4}}{N^{2/5}}\right)$ d) $\ln\left(\frac{M^{2/3}}{N\cdot P^{3/2}}\right)$

6. En cada caso queda:

a) $x=25$ b) $x=5184$ c) $x=1$ d) $x=\frac{48}{9}$

7. En cada caso queda:

a) $\frac{\log 5}{\log 2}=2,32$ b) $\frac{\log 2}{\log 5}=0,43$ c) $\frac{\log 0,6}{\log 0,3}=0,42$

d) $\frac{2\cdot\log 6}{\log 3}=0,85$ e) $\frac{\log 2-\log 5}{-\log 4}=0,66$ f) $\frac{\log\left(4/5\right)}{\log\left(2/3\right)}=0,55$

8. Las soluciones son:

a) $\log 6 = \log 2 + \log 3 = 0,78$

b) $\log 5 = \log 10 - \log 2 = 0,70$

c) $\log 12 = 2 \cdot \log 2 + \log 3 = 1,08$

d) $\log 18 = \log 2 + 2 \cdot \log 3 = 1,26$

e) $\log 300 = \log 3 + \log 100 = 2,48$

f) $\log 0,5 = \log 1 - \log 2 = -0,30$

g) $\log_3 2 = \dfrac{\log 2}{\log 3} = 0,63$

h) $\log_2 27 = \dfrac{3 \cdot \log 3}{\log 2} = 4,75$

i) $\log_5 9 = \dfrac{2 \cdot \log 3}{\log 5} = 1,36$

j) $\log 0,03 = \log 3 - \log 100 = -1,52$

k) $\log 1200 = \log 12 + \log 100 = 3,08$

l) $\log 0,45 = 2 \cdot \log 3 - \log 2 - \log 10 = -0,35$

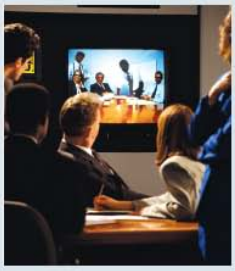
PÁGINA 113

9. Un empresario incrementa el precio de sus productos en un 5% anual. Actualmente, uno de sus productos vale 1,8 euros. Contesta a las siguientes cuestiones:

   a) ¿Cuánto costará el producto dentro de 4 años?

   b) ¿Cuánto costaba hace 4 años?

   c) ¿Cuántos años han de pasar para que el precio actual del producto se duplique?



10. El servicio de control de calidad de una gran empresa que fabrica cierta marca de televisores ha comprobado que el porcentaje de televisores que sigue funcionando al cabo de t años viene dado por la función $f(t) = \left(\frac{8}{9}\right)^t$:

    a) ¿Qué proporción de televisores siguen funcionando después de 5 años? ¿Y después de 15 años? ¿Y al cabo de 20 años?

    b) ¿Cuánto tiempo deberá transcurrir para que funcionen el 40% de los televisores fabricados?

11. Resuelve las siguientes ecuaciones exponenciales:

    a) $128^{x+1} = 2^{x^2-x-2}$

    b) $3^x \cdot 9^x = 9^3$

    c) $2^{-x} = 8^{3-x}$

    d) $2^x + 2^{x+1} + 2^{x+2} = 7$

    e) $6^{1-x} + 6^x = 7$

    f) $4^{x+1} + 2^{x+3} - 320 = 0$

    g) $2^x + 2^{x-1} + 2^{x-2} = 1$

    h) $9^x - 2 \cdot 3^{x+2} + 81 = 0$

    i) $5^{x+1} = 10 + 3 \cdot 5^{2-x}$

    j) $2^{x^2-5x} = 64^{-1}$

12. Resuelve los siguientes sistemas:

    a) $\begin{cases} 2^x + 2^y = 6 \\ 2^x - 2^y = 2 \end{cases}$

    b) $\begin{cases} 3^x + 3^y = 36 \\ 3^{x+y} = 243 \end{cases}$

    c) $\begin{cases} 2^x + 5^y = 9 \\ 2^{x+2} - 5^{y+1} = -9 \end{cases}$

    d) $\begin{cases} 3^x = 3^y \\ 4^x \cdot 4^y = 256 \end{cases}$

13. Resuelve las siguientes ecuaciones logarítmicas:

    a) $2 \log_2 x - \log_2 (x - 16) = \log_2 4$

    b) $\log x = 1 + \log (22 - x)$

    c) $2 \log (5x + 4) - \log 4 = \log (x + 4)$

    d) $(x^2 - 5x + 9) \log 2 + \log 125 = 3$

    e) $\ln (2x - 3) + \ln (5 - x) = \ln 5$

    f) $\ln x = \ln 2 + 2 \ln (x - 3)$

14. Resuelve los siguientes sistemas:

    a) $\begin{cases} \log_3 x + \log_3 y = 0 \\ x + y = 3 \end{cases}$

    b) $\begin{cases} x^2 - y^2 = 11 \\ \log x - \log y = 1 \end{cases}$

    c) $\begin{cases} \log \left(\frac{x}{y}\right) = 1 \\ \log x + \log y = 3 \end{cases}$

    d) $\begin{cases} \log x - \log y = 3 \log 5 \\ \log x + \log y = \log 5 \end{cases}$

9. En cada apartado queda:

a) El producto dentro de 4 años costará: $1,8 \cdot 1,05^4 = 2,19$ euros.

b) Hace 4 años costaba: $1,8 \cdot 1,05^{-4} = 1,48$ euros.

c) Llamando *t* al número de años que han de pasar obtenemos:

$$3,6 = 1,8 \cdot 1,05^t \Rightarrow 2 = 1,05^t \Rightarrow \text{Tomando logaritmos: } t = \frac{\log 2}{\log 1,05} = 14,21 \text{ años.}$$

Por tanto, han de pasar casi 15 años.

10. En cada apartado queda:

a) Al cabo de 5 años funcionan $\left(\frac{8}{9}\right)^5 = 0,55$, el 55% de los televisores.

Después de 15 años: $\left(\frac{8}{9}\right)^{15} = 0,17$, es decir, el 17% de los televisores.

Al cabo de 20 años: $\left(\frac{8}{9}\right)^{20} = 0,09$, es decir, el 9% de los televisores.

b) Deberían pasar *t* años y se debe cumplir:

$$\left(\frac{8}{9}\right)^t = 0,4 \Rightarrow t = \frac{\log 0,4}{\log\left(\frac{8}{9}\right)} = 7,8 \Rightarrow \text{Deberán pasar casi 8 años.}$$

11. La solución de cada ecuación es:

a) $128^{x+1} = 2^{x^2-x-2} \Rightarrow x_1 = 9$ y $x_2 = -1$

b) $3^x \cdot 9^x = 9^3 \Rightarrow 3^{3x} = 3^6 \Rightarrow x = 2$

c) $2^{-x} = 8^{3-x} \Rightarrow 2^{-x} = 2^{9-3x} \Rightarrow x = \frac{9}{2}$

d) $2^x + 2^{x+1} + 2^{x+2} = 7 \Rightarrow 2^x + 2 \cdot 2^x + 4 \cdot 2^x = 7 \Rightarrow 2^x = 1 \Rightarrow x = 0$

e) $6^{1-x} + 6^x = 7 \Rightarrow \frac{6}{6^x} + 6^x = 7 \Rightarrow x_1 = 0$ y $x_2 = 1$

f) $4^{x+1} + 2^{x+3} - 320 = 0 \Rightarrow 4 \cdot 2^{2x} + 8 \cdot 2^x - 320 = 0 \Rightarrow 2^{2x} + 2 \cdot 2^x - 80 = 0 \Rightarrow x = 3$

g) $2^x + 2^{x-1} + 2^{x-2} = 1 \Rightarrow 2^x + \frac{2^x}{2} + \frac{2^x}{4} = 1 \Rightarrow 2^x = \frac{4}{7} \Rightarrow x = \frac{\log\left(4/7\right)}{\log 2} = -0,81$

h) $9^x - 2 \cdot 3^{x+2} + 81 = 0 \Rightarrow 3^{2x} - 18 \cdot 3^x + 81 = 0 \Rightarrow x = 2$

i) $5^{x+1}=10+3\cdot5^{2-x} \quad\Rightarrow\quad 5\cdot5^{x}=10+\dfrac{75}{5^{x}} \quad\Rightarrow\quad x=1$

j) $2^{x^2-5x}=64^{-1} \quad\Rightarrow\quad 2^{x^2-5x}=2^{-6} \quad\Rightarrow\quad x_1=2 \quad \text{y} \quad x_2=3$

12. Los sistemas quedan:

a) $\left.\begin{array}{r}2^{x}+2^{y}=6\\ 2^{x}-2^{y}=2\end{array}\right\} \Rightarrow \begin{array}{l}2^{x}=4\\ 2^{y}=2\end{array} \Rightarrow \begin{array}{l}x=2\\ y=1\end{array}$

b) $\left.\begin{array}{r}3^{x}+3^{y}=36\\ 3^{x+y}=243\end{array}\right\} \Rightarrow$ Haciendo $\begin{array}{l}3^{x}=a\\ 3^{y}=b\end{array}$ obtenemos $\left.\begin{array}{r}a+b=36\\ a\cdot b=243\end{array}\right\} \Rightarrow \begin{array}{l}a=27 \;\text{ y }\; b=9 \Rightarrow x=3;\, y=2\\ a=9 \;\text{ y }\; b=27 \Rightarrow x=2;\, y=3\end{array}$

c) $\left.\begin{array}{r}2^{x}+5^{y}=9\\ 2^{x+2}-5^{y+1}=-9\end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{r}2^{x}+5^{y}=9\\ 4\cdot2^{x}-5\cdot5^{y}=-9\end{array}\right\} \Rightarrow \begin{array}{l}2^{x}=4\\ 5^{y}=5\end{array} \Rightarrow \begin{array}{l}x=2\\ y=1\end{array}$

d) $\left.\begin{array}{r}3^{x}=3^{y}\\ 4^{x}\cdot4^{y}=256\end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{r}x=y\\ x+y=4\end{array}\right\} \Rightarrow \begin{array}{l}x=2\\ y=2\end{array}$

13. Las soluciones quedan:

a) $\log_2\left[\dfrac{x^2}{x-16}\right]=\log_2 4 \quad\Rightarrow\quad \dfrac{x^2}{x-16}=4 \quad\Rightarrow\quad$ No tiene soluciones reales

b) $\log x=\log\left[10\cdot(22-x)\right] \quad\Rightarrow\quad x=10(22-x) \quad\Rightarrow\quad x=20$

c) $\log\left[\dfrac{(5x+4)^2}{4}\right]=\log\,(x+4) \quad\Rightarrow\quad \dfrac{(5x+4)^2}{4}=x+4 \quad\Rightarrow\quad x_1=0\;;\;x_2=-\dfrac{36}{25}$

d) $\log\left[2^{x^2-5x+9}\cdot125\right]=\log1000 \quad\Rightarrow\quad 2^{x^2-5x+9}=8 \quad\Rightarrow\quad x_1=2\;;\;x_2=3$

e) $\ln\left[(2x-3)\cdot(5-x)\right]=\ln5 \quad\Rightarrow\quad (2x-3)(5-x)=5 \quad\Rightarrow\quad x_1=4\;;\;x_2=\dfrac{9}{4}$

f) $\ln x=\ln\left[2\cdot(x-3)^2\right] \quad\Rightarrow\quad x=2\cdot(x-3)^2 \quad\Rightarrow\quad x_1=\dfrac{9}{2}\;;\;x_2=2$

14. Los siguientes sistemas quedan:

a) $\left.\begin{array}{r}\log_3 x+\log_3 y=0\\ x+y=3\end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{r}x\cdot y=1\\ x+y=3\end{array}\right\} \Rightarrow \begin{array}{l}x=2{,}62\ ;\ \ y=0{,}38\\ x=0{,}38\ ;\ \ y=2{,}62\end{array}$

b) $\left.\begin{array}{r}x^2-y^2=11\\ \log x-\log\ y=1\end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{r}x^2-y^2=11\\ \dfrac{x}{y}=10\end{array}\right\} \Rightarrow \begin{array}{l}x=\dfrac{10}{3}\\ y=\dfrac{1}{3}\end{array}$

c) $\left.\begin{array}{r}\log\left(\dfrac{x}{y}\right)=1\\ \log x+\log y=3\end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{r}\log x-\log y=1\\ \log x+\log y=3\end{array}\right\} \Rightarrow \begin{array}{l}\log x=2\ ;\quad x=100\\ \log\ y=1\ ;\quad y=10\end{array}$

d) $\left.\begin{array}{r}\log x+\log y=3\log 5\\ \log x-\log y=\log 5\end{array}\right\} \Rightarrow \begin{array}{l}\log x=2\log 5\ ;\quad x=25\\ \log y=\log 5\ ;\quad y=5\end{array}$

PÁGINA 114

ACTIVIDADES FINALES

■ 15. Responde a las siguientes cuestiones relacionadas con el interés simple:

a) Un capital de 1 000 euros colocado al 12% de interés simple durante tres años, ¿en qué capital se transforma?

b) ¿Cuánto tiempo hay que tener 3 000 euros al 10% de interés simple para que se conviertan en 3 900 euros?

c) Calcula los intereses que generan 12 000 euros colocados al 7% de interés simple durante 4 años, si los intereses se devengan:

c1) Anualmente c2) Mensualmente

■ 16. Calcula el tiempo que debe estar colocado un capital de 4 000 euros en una cuenta corriente al 5,5% de interés compuesto anual para que el capital se duplique.

■ 17. ¿A qué tanto por ciento anual debe prestarse un capital puesto a interés compuesto para que en 20 años se duplique? ¿Y para que se duplique en 10 años?

■ 18. ¿Qué capital será preciso que coloque un padre, al nacer su hijo, en el banco, si desea que cuando cumpla siete años pueda tener un capital de 2 100 euros? La imposición la hace al 8% de interés compuesto anual.

■ 19. Una persona entrega al principio de cada mes y durante 4 años una cantidad fija de 60 euros. La capitalización es mensual al 5% anual. ¿Qué capital tendrá al final de los 4 años?

■ 20. ¿Qué anualidad habrá de colocarse al 13% de interés compuesto para reunir en 5 años doce mil euros?

■ 21. Al comienzo de cada uno de 4 años consecutivos depositamos en una libreta de ahorro 1 500 euros. Al comenzar el quinto año, sacamos 5 000 euros de la libreta. ¿Qué cantidad de dinero queda en la libreta si sabemos que los intereses son compuestos al 4,5% anual?

■ 22. Se paga una deuda al 9% en 6 años mediante una anualidad de amortización de 1 350 euros. ¿A cuánto ascendía la deuda?

■ 23. ¿Cuál es la cuota mensual de amortización de un préstamo hipotecario de 50 000 euros a 15 años al 11% anual? ¿Qué cantidad de dinero pagamos durante los 15 años?

■ 24. Para amortizar una deuda de 29 500 euros, hemos abonado varias anualidades de 4 200 euros cada una al 7% anual. ¿Durante cuántos años?

■ 55. Una empresa maderera compra un camión, el cual se compromete a pagar en 13 anualidades al 6%. Cada anualidad de amortización asciende a 21 000 euros. ¿Cuánto costó el camión?

■ 26. Tu hermana se ha comprado una moto cuyo valor es de 10 000 euros. Ha de pagarla mediante cuotas trimestrales de 528,7 euros al 8% anual. ¿Cuántos años tardará en pagar la moto?

15. En cada caso queda:

a) $i=\dfrac{1000\cdot 12\cdot 3}{100}=360$ euros $\Rightarrow$ Se transforma en 1300 euros

b) $900=\dfrac{3\,000\cdot 10\cdot t}{100} \Rightarrow t=3$ años

c) $$\left.\begin{array}{l} i=\dfrac{12\,000\cdot 7\cdot 4}{100} \Rightarrow i=3\,360 \text{ euros} \\ i=\dfrac{12\,000\cdot 7\cdot 48}{1200} \Rightarrow i=3\,360 \text{ euros}\end{array}\right\} \Rightarrow$$ En ambos casos generan unos intereses de 3 360 euros.

16. Aplicando la fórmula: $M=C(1+r)^t$ obtenemos:

$$8\,000=4\,000\cdot(1+0,055)^t \Rightarrow 2=(1+0,055)^t \Rightarrow t=\frac{\log 2}{\log 1,055}=12,9 \text{ años}$$

17. En cada caso queda:

- $2C=C\,(1+r)^{20} \Rightarrow 2=(1+r)^{20}$

Tomando logaritmos obtenemos: $\log(1+r)=\dfrac{\log 2}{20} \Rightarrow 1+r=1,035 \Rightarrow r=0,035$

Para que el capital se duplique al cabo de 20 años el rédito debe ser de un 3,5%.

- $2C=C\,(1+r)^{10} \Rightarrow \log(1+r)=\dfrac{\log 2}{10} \Rightarrow r=0,072$

Para se duplique en 10 años se debe colocar a un rédito del 7,2%.

18. La solución queda:

$$2100=C\,(1+0,08)^7 \Rightarrow C=1225,33 \text{ euros.}$$

19. Queda:

$$C=\frac{60\left(1+\dfrac{0,05}{12}\right)\cdot\left[\left(1+\dfrac{0,05}{12}\right)^{48}-1\right]}{\dfrac{0,05}{12}}=3194,1468 \text{ euros}$$

Al cabo de 4 años tendrá 3 194,1468 euros.

20. Aplicando la fórmula:

$$C=\frac{a\cdot(1+r)\cdot\left[(1+r)^{t}-1\right]}{r}\quad\Rightarrow\quad 12\,000=\frac{a\cdot(1+0{,}13)\cdot\left[(1+0{,}13)^{5}-1\right]}{0{,}13}\quad\Rightarrow\quad a=1638{,}7385\text{ euros}$$

21. Aplicando la misma fórmula que en el problema anterior:

$$C=\frac{1500\cdot(1+0{,}045)\left[(1+0{,}045)^{4}-1\right]}{0{,}045}=6\,706{,}06\text{ euros}$$

En la libreta después de sacar 5 000 euros quedan 1 706,06 euros.

22. Aplicando la fórmula: $a=\frac{D\cdot r\cdot(1+r)^{t}}{(1+r)^{t}-1}$ obtenemos:

$$1350=\frac{D\cdot 0{,}09\cdot(1+0{,}09)^{6}}{(1+0{,}09)^{6}-1}\quad\Rightarrow\quad D=6\,055{,}99\quad\Rightarrow\quad \text{La deuda asciende a } 6\,055{,}99\text{ euros.}$$

23. Aplicando la misma fórmula del problema anterior:

$$a=\frac{50\,000\cdot\left(1+\frac{0{,}11}{12}\right)^{180}\cdot\frac{0{,}11}{12}}{\left(1+\frac{0{,}11}{12}\right)^{180}-1}\quad\Rightarrow\quad a=568{,}298\text{ euros}$$

La cuota mensual de amortización es 568,298 euros.

En total hemos pagado:

$$C=\frac{568{,}298\cdot\left(1+\frac{0{,}11}{12}\right)^{180}\left[\left(1+\frac{0{,}11}{12}\right)^{180}-1\right]}{\frac{0{,}11}{12}}=260\,767{,}83\text{ euros.}$$

24. Aplicando la fórmula: $A=\dfrac{D\cdot r\cdot(1+r)^t}{(1+r)^t-1}$ obtenemos:

$$4\,200=\frac{29\,500\cdot 0,07\cdot 1,07^t}{1,07^t-1}\quad\Rightarrow\quad 1,07^t=1,9672\quad\Rightarrow\quad t=10 \text{ años.}$$

25. Aplicando la fórmula anterior obtenemos.

$$21000=\frac{D\cdot 0,06\cdot(1+0,06)^{13}}{(1+0,06)^{13}-1}\quad\Rightarrow\quad D=185\,906,34 \text{ euros costó el camión.}$$

26. Aplicando la fórmula anterior obtenemos:

$$528,7=\frac{10\,000\cdot\frac{0,08}{4}\cdot\left(1+\frac{0,08}{4}\right)^t}{\left(1+\frac{0,08}{4}\right)^t-1}\quad\Rightarrow\quad 528,7\cdot\left(1,02^t-1\right)=200\cdot 1,02^t$$

$$\Rightarrow\quad 1,02^t=1,60845\quad\Rightarrow\quad t=24 \text{ períodos}\quad\Rightarrow\quad \text{Es decir, pagará la moto en 6 años.}$$