

EJERCICIOS RESUELTOS DE LOGARITMOS

Aplicamos las propiedades de los logaritmos:

$$\log_a N + \log_a M = \log_a N \cdot M$$

$$\log_a N - \log_a M = \log_a N/M \quad \Rightarrow \quad \text{Y la relación } \boxed{\log A = \log B \Leftrightarrow A = B}$$

$$m \cdot \log_a N = \log_a N^m$$

1) Resolver:

a)

$$\log x + \log 20 = 3$$

El logaritmo de la suma se transforma en producto.

Hacemos SHIFT $\log 3 = 1000$. Relación y resolvemos.

$$\log x + \log 20 = 3 \Leftrightarrow \log 20 \cdot x = \log 1000$$

$$20x = 1000 \Rightarrow x = 50$$

Solución: $x = 50$

b)

$$\log x^3 = \log 6 + 2\log x$$

$$\log x^3 = \log 6 + \log x^2 \Leftrightarrow \log x^3 = \log 6x^2 \Leftrightarrow x^3 = 6x^2 \Rightarrow x^3 - 6x^2 = 0$$

$$x^2(x - 6) = 0 \Rightarrow \begin{cases} x_1 = 0 \text{ no es solución de la ecuación logarítmica. No existe } \log 0. \\ x_2 = 6 \text{ es solución.} \end{cases}$$

Solución: $x = 6$

c)

$$2\log x = \log(10 - 3x)$$

$$2\log x = \log(10 - 3x) \Leftrightarrow \log x^2 = \log(10 - 3x) \Rightarrow x^2 = 10 - 3x$$

$$x^2 + 3x - 10 = 0 \Rightarrow \begin{cases} x_1 = 2 \\ x_2 = -5 \end{cases}$$

Comprobamos si las soluciones tienen sentido, sustituyendo en la ecuación logarítmica.

$$x_1 = 2 \Rightarrow 2\log 2 = \log(10 - 3 \cdot 2) \Rightarrow 2\log 2 = \log 4 \Rightarrow 2\log 2 = 2\log 2 \Rightarrow x = 2 \text{ es solución}$$

$$x_2 = -5 \Rightarrow 2\log(-5) \text{ . El } \log(-5) \text{ no tiene sentido. } \Rightarrow x = -5 \text{ no es solución.}$$

Solución: $x = 2$

d)

$$\log 4 + 2\log(x - 3) = \log x$$

$$\log [4 \cdot (x - 3)^2] = \log x \Leftrightarrow 4 \cdot (x^2 - 6x + 9) = x$$

$$4x^2 - 25x + 36 = 0 \Rightarrow \begin{cases} x_1 = 4 \rightarrow \log 4 + 2\log 1 = \log 4 \Rightarrow x = 4 \text{ es solución.} \\ x_2 = \frac{9}{4} \rightarrow \log 4 + 2\log \left(\frac{9}{4} - 3 \right) = \log \frac{9}{4} \Rightarrow x = \frac{9}{4} \text{ no es solución} \\ \text{negativo} \end{cases}$$

Solución: $x = 4$

2) Resolver:

<p>a) Resolver la ecuación: $\log(2x - 7) + 2 \cdot \log 2 = 2$</p> <p>RESPUESTA: La solución es $x = 5$.</p>	<p>b) Resolver la ecuación $2 \log x - \log(22x - x^2) = 1$</p> <p>RESPUESTA: La solución es $x = 20$</p>
<p>c) Resolver la ecuación $\log(5x^2 + 2x - 15) - 2 \cdot \log(2x - 1) = 0$</p> <p>RESPUESTA: Las soluciones son $x = -8$ y $x = 2$</p>	<p>d) .- Resuelve la ecuación $(x^2 - 5x + 9) \log 2 + \log 125 = 3$</p> <p>RESPUESTA: Las soluciones son 2 y 3.</p>
<p>e)</p> $\log_{\frac{1}{2}} 0.25 = y$ $\left(\frac{1}{2}\right)^y = 0.25 \quad \left(\frac{1}{2}\right)^y = \left(\frac{1}{2}\right)^2 \quad y = 2$	<p>f)</p> $\log_{\sqrt{5}} 125 = y$ $\sqrt{5}^y = 125 \quad 5^{\frac{1}{2}y} = 5^3 \quad y = 6$
<p>g)</p> $\ln \frac{1}{e^5} = y$ $e^y = \frac{1}{e^5} \quad e^y = e^{-5} \quad y = -5$	<p>h)</p> $\log_{\sqrt{3}} \sqrt[5]{\frac{1}{81}} = y$ $\sqrt{3}^y = \sqrt[5]{\frac{1}{81}} \quad 3^{\frac{1}{2}y} = 3^{-\frac{4}{5}} \quad y = -\frac{8}{5}$
<p>i)</p> $\log_2 32 = x$ $2^x = 32 \quad 2^x = 2^5 \quad x = 5$	<p>j)</p> $\log_{\frac{1}{2}} 0.25 = x$ $\left(\frac{1}{2}\right)^x = \frac{25}{100} \quad \left(\frac{1}{2}\right)^x = \left(\frac{1}{4}\right)$ $\left(\frac{1}{2}\right)^x = \left(\frac{1}{2}\right)^2 \quad x = 2$
<p>k)</p> $\log_9 \sqrt[4]{3} = x$ $(9)^x = \sqrt[4]{3} \quad 3^{2x} = 3^{\frac{1}{4}} \quad x = \frac{1}{8}$	<p>l)</p> $\log_x 81 = -4$ $x^{-4} = 81 \quad x^4 = \frac{1}{81} \quad x = \frac{1}{3}$

3) Resolver:

<p>a)</p> $2 \log x = 3 + \log \frac{x}{10}$ $2 \log x = 3 + \log x - \log 10$ $\log x = 3 - 1 \quad \log x = 2 \quad \mathbf{x = 100}$	<p>b)</p> $\log x + \log(x + 3) = 2 \log(x + 1)$ $\log[x(x + 3)] = \log(x + 1)^2$ $x(x + 3) = (x + 1)^2$ $x^2 + 3x = x^2 + 2x + 1 \quad \mathbf{x = 1}$
<p>c)</p> $4 \log\left(\frac{x}{5}\right) + \log\left(\frac{625}{4}\right) = 2 \log x$ $\log\left(\frac{x}{5}\right)^4 + \log\left(\frac{625}{4}\right) = \log x^2$ $\log\left(\frac{x^4}{5^4}\right) + \log\left(\frac{625}{4}\right) = \log x^2$ $\log\left(\frac{x^4}{4}\right) = \log x^2 \quad \frac{x^4}{4} = x^2 \quad x^4 - 4x^2 = 0$ $x = 0 \quad x = -2 \quad \mathbf{x = 2}$	<p>d)</p> $2 \log x - 2 \log(x + 1) = 0$ $\log x^2 - \log(x + 1)^2 = \log 1$ $\log \frac{x^2}{(x + 1)^2} = \log 1 \quad \frac{x^2}{(x + 1)^2} = 1$ $2x + 1 = 0 \quad x = -\frac{1}{2} \quad \text{Sin solución}$
<p>e)</p> $\log x = \frac{2 - \log x}{\log x}$ $(\log x)^2 + \log x - 2 = 0 \quad \log x = t$ $t^2 + t - 2 = 0 \quad t = 1 \quad t = -2$ $\log x = 1 \quad \mathbf{x = 10}$ $\log x = -2 \quad \mathbf{x = 10^{-2} = \frac{1}{100}}$	<p>f)</p> $\log(25 - x^3) - 3 \log(4 - x) = 0$ $\log(25 - x^3) = \log(4 - x)^3 \quad (25 - x^3) = (4 - x)^3$ $25 - x^3 = 64 - 48x + 12x^2 - x^3$ $12x^2 - 48x + 39 = 0 \quad \mathbf{x = 2 \pm \frac{\sqrt{3}}{2}}$
<p>g)</p> $\frac{\log(16 - x^2)}{\log(3x - 4)} = 2$ $\log(16 - x^2) = 2 \log(3x - 4)$ $\log(16 - x^2) = \log(3x - 4)^2 \quad (16 - x^2) = (3x - 4)^2$ $10x^2 - 24x - 0 \quad x = 0 \quad \mathbf{x = \frac{24}{10} = \frac{12}{5}}$	<p>h)</p> $\log 2 + \log(11 - x^2) = 2 \log(5 - x)$ $\log[2(11 - x^2)] = \log(5 - x)^2$ $2(11 - x^2) = (5 - x)^2$ $3x^2 - 10x + 3 = 0$ $\mathbf{x = 3} \quad 11 - 3^2 > 0 \quad 5 - 3 > 0$ $\mathbf{x = \frac{1}{3}} \quad 11 - \left(\frac{1}{3}\right)^2 > 0 \quad 5 - \frac{1}{3} > 0$

4) Resolver:

$$(x^2 - 5x + 9) \lg 2 + \lg 125 = 3 \Rightarrow$$

$$\lg 2^{x^2 - 5x + 9} + \lg 125 = \lg 1000 \Rightarrow \lg(2^{x^2 - 5x + 9} \cdot 125) = \lg 1000 \Rightarrow 2^{x^2 - 5x + 9} \cdot 125 = 1000 \Rightarrow$$

$$2^{x^2 - 5x + 9} = 8 \Rightarrow 2^{x^2 - 5x + 9} = 2^3 \Rightarrow x^2 - 5x + 9 = 3 \Rightarrow x^2 - 5x + 6 = 0 \Rightarrow \mathbf{x_1 = 2, x_2 = 3}$$

5) Resolver:

$$2 \lg x = 3 + \lg(x/10) \Rightarrow$$

$$\lg x^2 = \lg 1000 + \lg(x/10) \Rightarrow \lg x^2 = \lg(1000x/10) \Rightarrow \lg x^2 = \lg 100x \Rightarrow x^2 = 100x, \quad x > 0 \Rightarrow \mathbf{x = 10}$$

6) Resolver:

<p>a)</p> $\begin{cases} \log x + \log y = 2 \\ x - y = 20 \end{cases}$ <p>$\log(xy) = \log 100$ $xy = 100$ $x = \frac{100}{y}$</p> $\frac{100}{y} - y = 20$ $y^2 + 20y - 100 = 0$ $y = \frac{-20 \pm \sqrt{400 + 400}}{2} = \frac{-20 \pm 20\sqrt{2}}{2} = -10 \pm 10\sqrt{2}$ <p>$y = 10(\sqrt{2} - 1)$ $x = 10(\sqrt{2} + 1)$</p>	<p>b)</p> $\begin{cases} \log x + \log y = \log 2 \\ x^2 + y^2 = 5 \end{cases}$ <p>$\log(xy) = \log 2$ $xy = 2$ $x = \frac{2}{y}$</p> $\left(\frac{2}{y}\right)^2 + y^2 = 5$ $y^4 - 5y^2 + 4 = 0$ $y^2 = \frac{5 \pm \sqrt{25 - 16}}{2} = \begin{cases} y^2 = 4 & \begin{cases} y = 2 \\ y = -2 \end{cases} \\ y^2 = 1 & \begin{cases} y = 1 \\ y = -1 \end{cases} \end{cases}$ <p>$y = 2$ $x = 1$</p> <p>$y = 1$ $x = 2$</p>
<p>c)</p> $\begin{cases} \log x + \log y = 3 \\ 2\log x - 2\log y = -1 \end{cases}$ $\begin{cases} 2\log x + 2\log y = 6 \\ 2\log x - 2\log y = -1 \end{cases}$ <p>$4\log x = 5$ $\log x = \frac{5}{4}$ $x = 10^{\frac{5}{4}} = 10\sqrt[4]{10}$</p> <p>$\frac{5}{4} + \log y = 3$ $\log y = \frac{7}{4}$ $y = 10^{\frac{7}{4}} = 10\sqrt[4]{1000}$</p>	<p>d)</p> $\begin{cases} x^2 - y^2 = 11 \\ \log x - \log y = 1 \end{cases}$ <p>$\log\left(\frac{x}{y}\right) = \log 10$</p> <p>$\frac{x}{y} = 10$ $x = 10y$</p> $100y^2 - y^2 = 11$ $y^2 = \frac{11}{99} = \frac{1}{9}$ $\begin{cases} y = \frac{1}{3} & x = \frac{10}{3} \\ y = -\frac{1}{3} & \end{cases}$
<p>e)</p> $\begin{cases} \log x + \log y = 3 \\ \log x - \log y = 1 \end{cases}$ $\begin{cases} \log x + \log y = 3 \\ \log x - \log y = 1 \end{cases}$ <p>$2\log x = 4$</p> <p>$\log x = 2$ $x = 10^2$ $x = 100$</p> <p>$2 + \log y = 3$</p> <p>$\log y = 1$ $y = 10^1$ $y = 10$</p>	<p>f)</p> $\begin{cases} \log_x (y - 18) = 2 \\ \log_y (x + 3) = \frac{1}{2} \end{cases}$ $\begin{cases} x^2 = y - 18 \\ y^{\frac{1}{2}} = x + 3 \end{cases}$ <p>$y = (x + 3)^2$ $x^2 = (x + 3)^2 - 18$</p> <p>$x = \frac{9}{2}$ $y = \frac{225}{4}$</p>