EXPERIMENTOS ALEATORIOS

En general existen dos tipos de fenómenos o experimentos.

Experimentos deterministas: Son aquellos cuyos resultados pueden conocerse de antemano, como son la caída libre de un cuerpo , el aumento de la presión de un gas al disminuir su volumen a temperatura constante, abrir las compuertas de un estanque lleno de agua, seguro que se vaciara. Todos ellos se rigen por unas leyes preestablecidas, en donde conociendo las condiciones iniciales análogas, dan siempre lugar a resultados concretos y conocidos antes del experimento.

Experimentos aleatorios: Son aquellos fenómenos cuyos resultados jamás se pueden predecir de antemano, aun cuando la prueba se repita bajo condiciones iguales, como son el lanzar una moneda al aire y observar su resultado, el estudiar el sexo en la descendencia, el sacar una carta de una baraja, el hacer girar la ruleta, el abrir una hoja de un libro y saber de antemano el nº de la pagina de la derecha, etc. En todos estos ejemplos, aun después de haberse repetido el experimento varias veces, jamás podremos prever el resultado de la siguiente experiencia.

DEFINICIONES

Prueba: Es el proceso por el cual se obtiene un resultado.

Espacio muestral: Es el conjunto de todos los resultados posibles dentro de un experimento aleatorio. Se le llama también Espacio Universal y se le designa por E.

- **El espacio muestral asociado al experimento de lanzar una moneda al aire y anotar el resultado es E = {c, x}.**
- **Sea el experimento consistente en lanzar dos dados de distinto color con las numeraciones del 1 al 6. El espacio muestral será: E = { (1,1), (1,2), (1,3), (1,4), (1,5), (1,6), (2,1), (2,2), (2,3), (2,4), (2,5), (2,6), (3,1), (3,2), (3,3), (3,4), (3,5), (3,6), (4,1), (4,2), (4,3), (4,4), (4,5), (4,6), (5,1), (5,2), (5,3), (5,4), (5,5), (5,6), (6,1), (6,2), (6,3), (6,4), (6,5), (6,6) }.**
- **El espacio muestral asociado al experimento de lanzar 3 monedas al aire es: E = { ccc, ccx, cxc, xcc, cxx,xcx, xxc, xxx}.**

Suceso elemental: Es cada uno de los elementos del Espacio muestral.

Suceso aleatorio asociado a un experimento: Es cada uno de los posibles subconjuntos que se puedan formar con los elementos del Espacio muestral.

- **En el experimento de lanzar un dado cuyo E = {1, 2, 3, 4, 5, 6 }, serán sucesos aleatorios, el salir par: A = {2, 4, 6 }; el salir impar: B = {1, 3, 5 }; el salir múltiplo de 3: C = {3, 6 }; el salir nº primo: D = {1, 2, 3, 5 } ; el salir múltiplo de 5: F = { 5 }. Y asi hasta 2^6 sucesos.**

Si los subconjuntos están formados por un solo elemento se les llama *sucesos elementales* y a todos los demás subconjuntos se les llama *sucesos compuestos*.

Espacio de sucesos: Es el conjunto formado por todos los sucesos asociados a un experimento aleatorio, tanto elementales como compuestos. Se representa por S y en el se incluye el llamado suceso imposible.

- **Sea el experimento de lanzar un dado de quinielas y anota el símbolo que queda arriba. Hallar el espacio muestral y el espacio de sucesos.**

E = {1, x, 2} ; S = {ϕ, 1, x, 2, $(1,x)$, $(1,2)$, $(x,2)$, $(1,x,2)$}

Suceso imposible: Es aquel que nunca se puede dar y le corresponde al conjunto vacio ϕ.

Suceso seguro: Es el que siempre se verifica y corresponde al espacio muestral E.

- **Sea el experimento consistente en lanzar dos dados y anotar la suma de los nº que aparezcan en la cara superior.**
  El espacio muestral será: E = { 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12 }
  Sucesos elementales serán: {2}, {3}, {4}, {5}, {6}, {7}, {8}, {9}, {10}, {11}, {12}
  Algunos sucesos compuestos: A = { sumar múltiplo de 2 } = {2, 4, 6, 8, 10, 12}
  B = {sumar nº primo} = {2, 3, 5, 7, 11}

Implicación de sucesos: Un suceso A implica otro B, cuando siempre que se verifique el suceso A, también se verifica el suceso B. Se escribe A $\subset$ B. Para que esto se verifique, el subconjunto que representa el suceso B deberá estar en todos sus elementos incluido en el subconjunto de elementos que representen al suceso A.

Verificación de un suceso: Un suceso A se verifica, se realiza o se presenta, si al efectuar una prueba, se obtiene como resultado uno de los sucesos elementales que constituyen el A.

- **En el experimento de extraer una carta de una baraje española, consideremos el suceso A = {salir una figura}. Sabremos que se ha verificado el suceso, cuando al extraer la carta, obtengamos cualquiera de las 4 sotas, o de los 4 caballos o de los 4 reyes.**

OPERACIONES CON SUCESOS

Sucesos iguales: Dos sucesos son iguales cuando siempre que se realice el suceso A, se realice el B y viceversa.
Es lo mismo que decir que A $\subset$ B y B $\subset$ A .

Unión de sucesos: Dados dos sucesos A y B, de un mismo experimento, llamamos suceso unión a otro suceso C, en el cual se verifica al menos uno de los dos sucesos, es decir, cuando se verifica el suceso A, o el B, o ambos a la vez. Se representa por A $\cup$ B.

Intersección de sucesos : Dados dos sucesos A y B, de un mismo experimento aleatorio, llamamos intersección a otro suceso D, en el que se verifican a la vez el A y el B, es decir, el suceso formado por los elementos comunes que aparezcan en A y en B. Se representa por $A \cap B$.

Suceso contrario o complementario de A : Dado un suceso A, llamaremos suceso contrario del A a otro suceso representado por A^C, tal que A^C se realiza, si y solo si no se realiza el suceso A. Serán todos los elementos del espacio muestral que no sean de A.

- Sea el experimento de lanzar un dado cuyo E = {1, 2, 3, 4, 5, 6 }. Sean los sucesos A = {1, 2, 5}, B = {1, 3}, C = {1, 2, 3, 4, 5} y D = {3, 6}. Calcular $A \cup B,\ A \cup D,\ B \cup C,\ C \cup D,\ A \cap C,\ B \cap D,\ C \cap A,\ \bar{A},\ \bar{B},\ \bar{C},\ \bar{D}$

$A \cup B$ = {1, 2, 3, 5} ; $A \cup D$ = {1, 2, 3, 5, 6} ; $B \cup C$ = {1, 2, 3, 4, 5} ; $C \cup D$ = E

$A \cap C$ = {1, 2, 5} ; $B \cap D$ = {3} ; $C \cap B$ = {1, 3} ; $\bar{A}$ = {3, 4, 6} ; $\bar{B}$ = {2, 4, 5, 6}

$\bar{C}$ = {6} ; $\bar{D}$ = {1, 2, 4, 5}

Sucesos incompatibles: Dos sucesos A y B son incompatibles cuando al verificarse el suceso A, nunca se podrá verificar el B, (no tengan elementos comunes) o lo que es lo mismo, cuando $A \cap B = \phi$.

Sucesos compatibles: Dos sucesos A y B son compatibles cuando en los subconjuntos A y B tengan siempre por lo menos un elemento igual, o lo que es lo mismo, cuando $A \cap B \neq \phi$.

Se observa que un suceso y su contrario son incompatibles pero que dos sucesos incompatibles no tienen por qué ser contrarios.

Diferencia de sucesos: Es el suceso formado por todos los elementos de A que no lo son de B, es decir se verifica A y no se verifica B.

$$A - B = A \cap B^C$$

Diferencia simétrica de sucesos: Es aquel suceso que se realiza solo si se verifica solamente A o solamente B.

$$A \,\Delta\, B = (A - B) \cup (B - A) = (A \cap B^C) \cup (B \cap A^C)$$

ÁLGEBRA DE BOOLE de SUCESOS

Sea un experimento aleatorio y sean E su espacio muestral y S su espacio de sucesos.

Álgebra de Boole: Es el conjunto de los sucesos pertenecientes al Espacio de sucesos, en el que se han definido las operaciones unión, intersección y suceso contrario y que verifican todas y cada una de las propiedades siguientes.

Propiedades:

a) Conmutativa: $A \cup B = B \cup A$ $\qquad$ $A \cap B = B \cap A$

b) Asociativa: $(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C)$ $\qquad$ $(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C)$

c) Distributiva: $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$

$A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$

d) Idempotente: $A \cup A = A$ $\qquad$ $A \cap A = A$

e) Simplificación: $A \cup (A \cap B) = A$ $\qquad$ $A \cap (A \cup B) = A$

f) Elemento neutro: $A \cup \phi = A$ $\qquad$ $A \cap E = A$

g) Absorción: $A \cup E = E$ $\qquad$ $A \cap \phi = \phi$

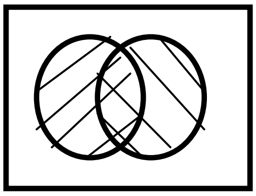
h) Suceso contrario: $A \cup A^C = E$ $\qquad$ $A \cap A^C = \phi$

i) Complementación: $E^C = \phi$ $\qquad$ $\phi^C = E$

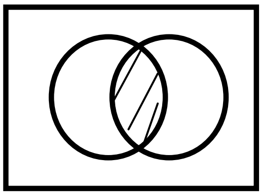
j) Involución: $(A^C)^C = A$

k) Leyes de Morgan: $(A \cup B)^C = A^C \cap B^C$ $\qquad$ $(A \cap B)^C = A^C \cup B^C$

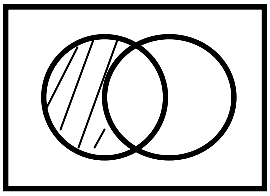
Diagramas de Venn: Son unas representaciones gráficas que nos ayudan a demostrar la equivalencia entre conjuntos.



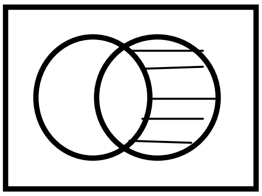
$A \cup B$



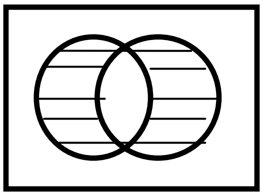
$A \cap B$



$A - B = A \cap B^C$

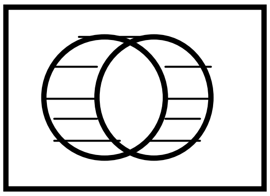


$B - A = B \cap A^C$

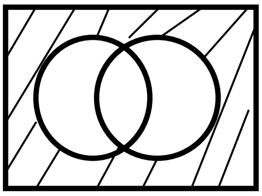


$A \Delta B = (A \cap B^C) \cup (B \cap A^C)$

=

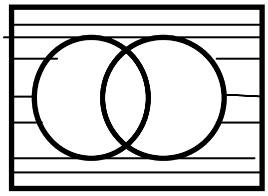


$B \Delta A = (B \cap A^C) \cup (A \cap B^C)$



$(A \cup B)^C$

=



$A^C \cap B^C$

Ejemplo: **Sea el experimento consistente en lanzar un dado al aire.**

El *espacio muestral* será E = { 1, 2, 3, 4, 5, 6 }
***Sucesos elementales* serán : {1}, {2}, {3} {4}, {5}, {6}, {ϕ}**
***Sucesos compuestos* serán : {1, 2}, {1,3}, {1,4}, {1,5}, {1,6}.......{5,6}, {1,2,3}, {1,2,4}, {1,2,5}, {1.2.6}, {2,3,4}, ...{3,5,6}, {4,5,6}, {1,2,3,4}, {1,2,3,5}, {1,2,3,6}, {1,2,4,5}, {1,2,4,6}, {1,2,5,6}...... {2,3,4,5}, {2,3,4,6}, {2,3,5,6}, {3,4,5,6}, {1,2,3,4,5}, {1,2,3,4,6}{2,3,4,5,6}, E.**
***Espacio de sucesos*: S son todos los elementales y los compuestos.**
Si A = {obtener múltiplo de 3) = {3,6} y B = {obtener un nº $\geq$ 3} = {3,4,5,6} diremos que A $\subset$ B , ya que si salen el 3 o el 6 que son de A, implica que seguro sale el B.
El contrario no es cierto B $\not\subset$ A, ya que si sale el 4 que es de B, no es cierto que el 4 sea múltiplo de 3.
***Unión* de sucesos A $\cup$ B = {3,4,5,6}**
***Intersección* de sucesos: A $\cap$ B = {3,6}**
***Contrarios o complementarios*: A^C = {1,2,4,5} . B^C = {1,2}**
Los sucesos A y B son compatibles porque su intersección no es el ϕ.
***Diferencia de sucesos*: A - B = A $\cap$ B^C = {3,6} $\cap$ {1,2} = ϕ.**
B - A = B $\cap$ A^C = {3,4,5,6} $\cap$ {1,2,4,5} = {4,5}
***Diferencia simétrica* de sucesos: A Δ B = (A $\cap$ B^C) $\cup$ (B $\cap$ A^C) = [{3,6}$\cap${1,2}] $\cup$ [{3,4,5,6}$\cap$ {1,2,4,5}] = ϕ $\cup$ {4,5} = {4,5}**

- **En el mismo experimento de lanzar un dado, sean A = {2,4,6}, B = {1,3,5}, C = {3,6}. Calcular A$\cup$C , A$\cup$B , B$\cup$C , A$\cap$B , A$\cap$C , B$\cap$C , A^C , B^C , C^C , A - B , A - C , B - C , AΔB, AΔC, BΔC. Demostrar la propiedad distributiva con A, B y C y las propiedades de simplificación y de Morgan con los sucesos A y B.**

SISTEMA COMPLETO DE SUCESOS.

Dado un experimento aleatorio, diremos que los sucesos $A_1, A_2, \ldots\ldots A_n$ constituyen un sistema completo de sucesos si se verifica que

a) $A_1 \cup A_2 \cup \ldots \ldots \cup A_n = E$
b) $A_1, A_2, \ldots\ldots A_n$ **son incompatibles dos a dos, es decir** $A_i \cap A_j = \phi$

- **En el experimento de tirar el dado, un sistema completo de sucesos puede ser A = {1, 2, 6} ; B = {3, 4} y C = {5}**

EXPERIMENTOS COMPUESTOS. ESPACIOS COMPUESTOS.

Experimento compuesto es el formado por varios experimentos simples.
Espacio compuesto o espacio producto es el formado por los pares de elementos, cada uno de ellos pertenecientes a cada experimento simple.

- **Sea el experimento compuesto consistente en lanzar un dado y una moneda, el espacio muestral compuesto será: E = {(1,c), (2,c), (3,c), (4,c), (5,c), (6,c), (1,x), (2,x), (3,x), (4,x), (5,x), (6,x) }**

Concepto de Probabilidad.

Cuando en un experimento aleatorio, se realiza la prueba un numero infinito de veces, sea comprobado experimentalmente que las frecuencias relativas de un suceso tienden a aproximarse a un numero fijo, al aumentar el numero de veces que sea realizado el experimento.

Defino probabilidad de un suceso al límite de la frecuencia relativa cuando el número de pruebas realizadas tiende a infinito.

$$P(A) = \lim_{n\to\infty} f_r(A) = \lim_{n\to\infty} \frac{n_A}{n}$$

Esta definición presenta grandes dificultades matemáticas pues seria necesario hacer un gran número de pruebas y seria casi imposible calcular la probabilidad.

Existe otra definición de probabilidad, llamada a priori, útil para el calculo de probabilidades de sucesos simples y enunciada por Laplace

$$P(A) = \frac{n^{\underline{o}}\ de\ casos\ favorables\ al\ A}{n^{\underline{o}}\ de\ casos\ posibles}$$

Esta segunda definición, tampoco nos permite la construcción y desarrollo de una teoría matemática de la probabilidad., ya que no nos cuantifica el grado de posibilidad, ni el grado de incertidumbre, ni el grado de información sobre la realización o no de cualquier suceso.
Además, para que esta definición sea factible, hay que suponer que los sucesos elementales sean equiprobables (igualmente probables)

- **Se realiza el experimento que consiste en lanzar 2 monedas. Hallar la probabilidad de a) Obtener dos caras, b) obtener una cara y una cruz, c) obtener al menos una cruz.**

Como el E = { (c,c), (c,x), (x,c), (x,x)} tiene 4 casos posibles
Como el A = {obtener dos caras} = {(c,c)} es 1 solo caso P(A) = $\frac{1}{4}$
Como el B = {obtener 1 cara y 1 cruz} = {(c,x), (x,c)} P(B) = $\frac{2}{4} = \frac{1}{2}$
Como el C = {obtener al menos una cruz} = {(c,x), (x,c), (x,x)} P(C) = $\frac{3}{4}$

- **Consideremos el experimento que consiste en lanzar dos dados y anotar los puntos de las caras superiores. Hallar la probabilidad de a) obtener una suma de puntos igual a 11. b) Obtener una suma menor o igual que 4.**

Como el E estará formado por 6x6 = 36 casos posibles.

A = {suma igual a 11} = {(5,6), (6,5)} 2 casos favorable; P(A) = $\frac{2}{36} = \frac{1}{18}$

B = {suma $\leq$ **4} = {(1,1), (1,2), (1,3), (2,1), (2,2), (3,1)} 6 casos favorables**
P(B) = $\frac{6}{36} = \frac{1}{6}$

Definición axiomática de Probabilidad.

Sea E el espacio muestral y sea $\wp$(E) el Algebra de Boole de todos los sucesos aleatorios asociados al E.

Defino probabilidad a la aplicación o ley que asocia a cada suceso A $\in$ $\wp$(E) un número real comprendido entre 0 y 1 y al que se le llama Probabilidad del suceso A

La Probabilidad verifica los siguientes axiomas:

1º) $\forall$ A $\in \wp$(E) ==> P(A) $\geq$ 0 y 0 $\leq$ P(A) $\leq$ 1

2º) Si A_1, A_2, A_3.... A_n son n sucesos pertenecientes al espacio de sucesos, incompatibles dos a dos, es decir, $A_i \cap A_j = \phi$, ===> $P(\cup A_i) = \sum P(A_i)$

En particular:
$\forall$A,B $\in$ $\wp$(E) y tal que $A \cap B = \phi$ ===> $P(A \cup B) = P(A) + P(B)$

3º) P(E) = 1

A la terna (E, $\wp$(E) , P) se le llama espacio probabilístico y a partir de el se construye la teoría matemática de la probabilidad.

Consecuencias de la definición:

1ª) $P(A^C) = 1 - P(A)$

2ª) $P(\phi) = 0$

3ª) Si $A \subseteq B$ ===> $P(A) \leq P(B)$

4ª) $\forall$ A $\in$ $\wp$(E) ===> P(A) $\leq$ 1

5ª) Si A y B son dos sucesos compatibles ===> $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$

Si A, B y C son 3 sucesos compatibles dos a dos ===> $P(A \cup B \cup C) = P(A) + P(B) + P(C) - P(A \cap B) - P(A \cap C) - P(B \cap C) + P(A \cap B \cap C)$

6ª) Regla de Laplace: Sea E el espacio muestral formado por n sucesos elementales y todos ellos equiprobables y sea A un suceso formado por k de esos sucesos elementales, diremos que

$$P(A) = \frac{k \ (casos\ favorables)}{n \ (casos\ posibles)}$$

- **Se realiza un experimento que consiste en la extracción de una carta de una baraja española de 40 cartas. Sea A = {obtener un oro}; B = {obtener un rey} y C = {obtener el as de espadas}. Hallar la probabilidad de a)** $A \cup B, b)\ A \cup C,\ c)\ B \cup C$

A = { 1o, 2o, 3o, 4o, 5o, 6o, 7o, So, Co, Ro }
B = {Ro, Rc, Re, Rb}
C = {1e}

a) $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) = \frac{10}{40} + \frac{4}{40} - \frac{1}{40} = \frac{13}{40}$ **por ser sucesos compatibles** ($A \cap B \neq \phi$)

b) $P(A \cup C) = P(A) + P(B) = \frac{10}{40} + \frac{1}{40} = \frac{11}{40}$ $\textit{por ser sucesos incompa-tibles}$ $(A \cap B = \phi)$

c) $P(B \cup C) = P(B) + P(C) = \frac{4}{40} + \frac{1}{40} = \frac{5}{40} = \frac{1}{8}$ $\textit{por ser sucesos incom-patibles}$ $(B \cap C = \phi)$

- **Sea el E = {a,b,c,d} y tal que P{a} = 0,5 , P{b} = 0,2 , P{c} = 0,1.**

Si A = {a,b,c} y B = {a,b,d} calcular P(A), P(B), $P(A \cap B)^C$, $P(A^C \cap B^C)$ **y** $P(A^C \cup B^C)$**.**

$P(A) = P(a \cup b \cup c) = P(a) + P(b) + P(c) = 0,5 + 0,2 + 0,1 = 0,8$
$P(B) = P(a \cup b \cup d) = P(a) + P(b) + P(d) = 0,5 + 0,2 + 0,2 = 0,9$
$P(\overline{A \cap B}) = = 1 - P(A \cap B) = 1 - P(a,b) = 1 - \left(P(a \cup b)\right) =$
$= 1 - P(A) - P(B) = 1 - 0,5 - 0,2 = 0,3$
$P(\bar{A} \cap \bar{B}) = P(\overline{A \cup B}) = 1 - P(A \cup B) = 1 - P(a,b,c,d) = 1 - P(E) = 0$
$P(\bar{A} \cup \bar{B}) = P(\overline{A \cap B}) = 0,3$

- **Se extrae una bola de una urna que contiene 4 bolas rojas, 5 blancas y 6 negras. ¿ Cual es la probabilidad de que la bola extraída sea roja o blanca ?. ¿ Cual es la probabilidad de que no sea blanca ?.**

$P(R \cup B) = P(R) + P(B) = \frac{4}{15} + \frac{5}{15} = \frac{9}{15}$ $\textit{por ser incompatibles que salga a la vez la bola roja y blanca.}$

$P(\bar{B}) = 1 - P(B) = 1 - \frac{5}{15} = \frac{10}{15} = \frac{2}{3}$

Probabilidad Condicionada. Teorema de la probabilidad compuesta.

Sean A y B dos sucesos de un experimento aleatorio, cuyas probabilidades son P(A) y P(B).

Si el que se verifique un segundo suceso B, viene condicionado a que antes se haya verificado un primer suceso A, dentro del mismo experimento, y siendo P(A) > 0, llamaremos probabilidad condicionada del suceso B respecto del A y se escribirá P(B/A), a la probabilidad del suceso, que habiéndose primero verificado A, se verifica también el B, y su valor será:

$$P(B/A) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)}$$

De esta definición sacamos el teorema de la probabilidad compuesta o del producto para sucesos dependientes $P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B/A)$

En el caso de que existan 3 o mas sucesos condicionados, el teorema dice que:

$P(A \cap B \cap C) = P(A).\ P(B/A).\ P(C/A \cap B)$, **siendo** $P(A \cap B) \neq 0$

Sucesos dependientes e independientes.

Dados dos sucesos A y B diremos que:
B depende del A si $P(A) \neq P(B/A)$.
B es independiente del A si $P(A) = P(B/A)$.

Teorema 1: Si B depende de A ===> A depende también de B
Si B es independiente de A ===> A es también independiente de B

Teorema 2: La condición necesaria y suficiente para que dos sucesos A y B sean independientes es que $P(A \cap B) = P(A).P(B)$.

Teorema 3: Si los sucesos A y B son independientes, también lo serán los sucesos A y B^C, A^C **y B ,** A^C **y** B^C.

Teorema 4: Tres sucesos A, B y C son independientes si se verifica que:
$P(A \cap B \cap C) = P(A).\ P(B).\ P(C)$ **y además que sean independientes dos a dos.**

- **Una urna contiene 4 bolas rojas, 5 negras y 6 blancas. Se sacan dos bolas con reemplazamiento. Se pide la probabilidad de que las dos bolas extraídas sean blancas. ¿ y si las dos bolas se extraen sin reemplazar ?.**

Con reemplazamiento => Sucesos independientes $P(B \cap B) = P(B) \cdot P(B) =$
$= \frac{6}{15} \cdot \frac{6}{15} = \frac{36}{225} = \frac{4}{25}$

Sin reemplazamiento => Sucesos dependientes $P(B \cap B) = P(B) \cdot P(B/B) =$
$= \frac{6}{15} \cdot \frac{5}{14} = \frac{30}{210} = \frac{1}{7}$

- **Los resultados de una encuesta realizada sobre 334 universitarios de ambos sexos y de actitudes progresistas y conservadora es la siguiente: 145 varones progresistas, 42 mujeres progresistas, 51 varones conservadores y 96 mujeres conservadores. a) Calcular la probabilidad de que la actitud sea progresista dentro de los varones. b) ¿Cuál será la probabilidad de que la actitud sea conservadora dentro de las mujeres?.**

Si llamamos A: varones. $\overline{A}$ **: mujeres. B: progresista.** $\overline{B}$**: conservador**

a) $P\left({}^{B}/_{A}\right) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)} = \frac{\frac{145}{334}}{\frac{196}{334}} = \frac{145}{196}$ **b)** $P\left({}^{\overline{B}}/_{\overline{A}}\right) = \frac{P(\overline{A} \cap \overline{B})}{P(\overline{A})} = \frac{\frac{96}{334}}{\frac{138}{334}} = \frac{96}{138} = \frac{48}{69}$

- **De una urna que contiene 9 bolas rojas y 5 negras, se extraen sucesivamente 2 bolas sin devolución. Hallar la probabilidad de que a) las dos bolas sean negras, b) que la 1ª sea roja y la 2ª sea negra, c) que una sea roja y otra negra.**

a) $P(N_1 \cap N_2) = P(N_1) \cdot P\left({}^{N_2}/_{N_1}\right) = \frac{5}{14} \cdot \frac{4}{13} = \frac{20}{182} = \frac{10}{91}$

b) $P(R_1 \cap N_2) = P(R_1) \cdot P\left({}^{N_2}/_{R_1}\right) = \frac{9}{14} \cdot \frac{5}{13} = \frac{45}{182}$

c) P(una roja y otra negra) = $P[(R_1 \cap N_2) \cup (N_1 \cap R_2)] = P((R_1 \cap N_2) +$

$(N_1 \cap R_2) = P(R_1) \cdot P\left({}^{N_2}/_{R_1}\right) + P(N_1) \cdot P\left({}^{R_2}/_{N_1}\right) =$

$\frac{9}{14} \cdot \frac{5}{13} + \frac{5}{14} \cdot \frac{9}{13} = \frac{45}{182} + \frac{45}{182} = \frac{90}{182} = \frac{45}{91}$

Experimentos compuestos.

Sean dos espacios probabilísticos $(E_1, \wp(E_1), P_1)$ y $(E_2, \wp(E_2), P_2)$ formados cada uno de ellos por A_i y B_j sucesos elementales.
Llamaremos espacio producto o experimento compuesto al formado por los sucesos elementales (A_i, B_j) y en ese espacio definiremos una nueva probabilidad.

Diremos que los dos experimentos son independientes si se verifica que:
$P(A_i, B_j) = P_1(A_i).\ P_2(B_j)$
El caso mas común es repetir un mismo experimento un numero n de veces, en las mismas condiciones.

Diremos que dos experimentos son dependientes si $P(A_i, B_j) = P_1(A_i).P(B_j/A_i)$

Ejemplo: **Sea un experimento consistente en sacar una bola de una urna que contiene 1 bola roja, otra negra y una tercera verde y un segundo experimento que consiste en lanzar una moneda al aire.¿ Cual es la probabilidad de que salga bola roja y cruz?. ¿ y de que salga bola verde con cara ?.**

Ejemplo: **Sea un primer experimento consistente en lanzar una moneda al aire y un segundo experimento que consiste en sacar una bola de una urna que contiene 2 bolas blancas y una bola negra. Si en el primer experimento salió cara se saca una bola de la urna anterior y si salió cruz se saca una bola de otro urna que contiene 1 bola verde y 2 rojas. ¿Cuales son las probabilidades de que salgan a) Cara y bola blanca. b) cara y bola negra. c) cruz y bola roja. d) cruz y bola verde. ?.**

Teorema de la probabilidad total.

Diremos que $A_1, A_2,... A_n$ forman un sistema completo cuando:
a) $A_1, A_2,... A_n$ sean incompatibles dos a dos.
b) $A_1 \cup A_2 \cup ... \cup A_n = E$

Si tenemos un sistema completo de sucesos y tal que la $P(A_i) \neq 0$ y si B es un suceso cualquiera perteneciente al espacio muestral E y de forma que conozcamos las $P(B/A_i)$, el teorema de la probabilidad total dice que: $P(B) = \sum P(A_i).\ P(B/A_i)$

Ejemplo: **Una urna contiene 4 bolas rojas y 6 bolas blancas. Una segunda urna contiene 6 bolas rojas y 4 blancas. Se traslada una bola de la 1ª urna a la 2ª y a continuación se extrae una bola de la 2ª urna. Se pide la probabilidad de que la 2ª bola extraída sea blanca.**

A_1 = { pasar bola R de la 1ª a la 2ª urna } A_2 = { pasar bola B de la 1ª a la 2ª urna }
B = { extraer bola blanca de la 2ª urna }

Se ve que A_1 y A_2 forman un sistema completo porque de la 1ª urna son las dos únicas posibilidades de sacar bola distinta.

$$4R\ y\ 6B\ \rightarrow \begin{cases} A_1 \ \rightarrow \ 6R\ y\ 4B \ => \ 7R\ y\ 4B \\ A_2 \ \rightarrow \ 6R\ y\ 4B \ => 6R\ y\ 5B \end{cases}$$

$$P(B) = P(A_1) \cdot P\left({}^{B}/_{A_1}\right) + P(A_2) \cdot \ P\left({}^{B}/_{A_2}\right) = \frac{4}{10} \cdot \frac{4}{11} + \frac{6}{10} \cdot \frac{5}{11} = \frac{46}{110}$$

Teorema de Bayes.

Si A_1, A_2,... A_n forman un sistema completo de sucesos y si B es un suceso cualquiera, tal que conozcamos todas las $P(B/A_i)$, Bayes nos permite calcular las $P(A_i/B)$, siempre que conozcamos la probabilidad total P(B)

$$P(A_i/B) = \frac{P(A_i) \cdot P(B/A_i)}{P(B)}$$

En particular $P(A_1/B) = \frac{P(A_1) \cdot P(B/A_1)}{P(A_1) \cdot P(B/A_1) + P(A_2) \cdot P(B/A_2)}$

$$P(A_2/B) = \frac{P(A_2) \cdot P(B/A_2)}{P(A_1) \cdot P(B/A_1) + P(A_2) \cdot P(B/A_2)}$$

ESTADISTICA.-

VARIABLE ALEATORIA DISCRETA.

Es aquella variable X que va asociada a un experimento aleatorio y a cada uno de los x_i que forman el espacio muestral.

Llamamos esperanza matemática al sumatorio de cada x_i por su función de probabilidad o distribución de probabilidad. E[x] = $\sum p_i \cdot x_i$
Llamamos varianza V[x] = $\sum p_i \cdot {x_i}^2 - E[x]^2$.

Función de probabilidad (p_i) son el conjunto de probabilidades de cada uno de los x_i pertenecientes al espacio muestral del experimento aleatorio.

Función de distribución
$F(x_i)$ *es la que determina la probabilidad de que la variable X* **tome un valor menor o igual a x_i.**

$$F(x_i) = P(X \leq x_i) \;\; \Rightarrow \;\; \begin{cases} P(X \leq 2) = F(2) \\ P(X \leq 2) = P(X = 0) + P(X = 1) + P(x = 2) \end{cases}$$

VARIABLE ALEATORIA CONTINUA.

Es aquella variable X que es continua y que toma diferentes valores en el [a,b].

Esperanza matemática E[x] = $\int_a^b f(x)dx$ **donde f(x) es la función de densidad**
Varianza V[x]= $\int_a^b x^2 \cdot f(x)dx - (E[x])^2$

Función de densidad es el valor que toma la f(x) para cada valor de $x_i \in [a, b]$
Si los limites de integración son el $\pm\infty$ y siempre que f(x) ≥ 0 podemos decir que : $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = 1$

Función de distribución: F(x_i) = $\int_{-\infty}^{x_i} f(x)dx$

P(X$\leq a) = F(a) = \int_{-\infty}^{a} f(x)dx$

P(a$\leq X \leq b) = F(b) - F(a) = \int_a^b f(x)dx$

DISTRIBUCION BINOMIAL.-

Es aquella en el que el experimento se repite n veces con resultados independientes unos de otros.
Los resutados de cada experimento son además, siempre contrarios uno del otro. (Éxito – Fracaso) , (Verdadero – Falso) , (Si – No)

$$\begin{cases} \text{Llamamos p } = \text{ probabilidad de A (éxito)} \\ \text{Llamamos q } = \text{ probabilidad de } \overline{A} \text{ (fracaso)} \end{cases}$$ **donde p + q = 1**

Además p y q es siempre la misma en cada una de las n pruebas realizadas.

$P(X=r) = \binom{n}{r} p^r \cdot q^{n-r}$. $\binom{n}{r}$ **son nº combinatorios de valores**

$\binom{n}{0} = 1$; $\binom{n}{1} = \frac{n}{1} = n$; $\binom{n}{2} = \frac{n\cdot(n-1)}{2\cdot1}$; $\binom{n}{3} = \frac{n\cdot(n-1)\cdot(n-2)}{3\cdot2\cdot1}$;

$\binom{n}{4} = \frac{n\cdot(n-1)\cdot(n-2)\cdot(n-3)}{4\cdot3\cdot2\cdot1}$ ……… ……… $\binom{n}{n} = 1$

- **Para n = 4 ,** $P(X \leq 3) = P(X=0) + P(X=1) + P(X=2) +$

$P(X=3) = \binom{4}{0}p^0 \cdot q^4 + \binom{4}{1}p^1 \cdot q^3 + \binom{4}{2}p^2 \cdot q^2 + \binom{4}{3}p^3 \cdot q^1 + \binom{4}{4}p^4 \cdot q^0 =$

$q^4 + 4 \cdot p \cdot q^3 + \frac{4\cdot3}{2\cdot1} \cdot p^2 \cdot q^2 + \frac{4\cdot3\cdot2}{3\cdot2\cdot1} \cdot p^3 \cdot q^1 + p^4$

Esperanza matemática E[X] = n · p

Varianza V[X] = n · p · q **Desviación típica** σ**[X] =** $\sqrt{n \cdot p \cdot q}$.

- **La probabilidad de que cierto jugador de baloncesto enceste una canasta de tres puntos es de 0,3. ¿Cuál es la probabilidad de que enceste dos canastas de 5 lanzamientos?.**

Es una distribución binomial B(5, 0,3) donde n = 5 y p = 0,3 de acertar con lo que q = 0,7 de no acertar.

P(X=2) = $\binom{5}{2} \cdot (0,3)^2 \cdot (0,7)^2 = \frac{5\cdot4}{2\cdot1}\ 0,09 \cdot 0,49 = 0,3087$

- **En una urna de 30 bolas, hay 10 rojas y el resto blancas. Se elige una bola al azar y se anota si es roja. El proceso se repite 10 veces devolviendo siempre la bola. Calcular la media(esperanza matemática) y la desviación típica.**

n = 10, p = $\frac{10}{30} = \frac{1}{3}$ $y\ q = \frac{2}{3}$ => $B(10, \frac{1}{3})$

E[X]= n · p = 10 · $\frac{1}{3} = \frac{10}{3}$; $\sigma = \sqrt{n \cdot p \cdot q} = \sqrt{10 \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{2}{3}} = \frac{\sqrt{20}}{3}$

DISTRIBUCION NORMAL.-

Son aquellas en las que todas las distribuciones existentes poseen forma de campana , en la que la distribución va disminuyendo a ambos lados de un valor medio (μ), con igual frecuencia y debido a que el ambiente social, natural y cultural tienden a eliminar por igual a los que se desvían de forma análoga de la media.

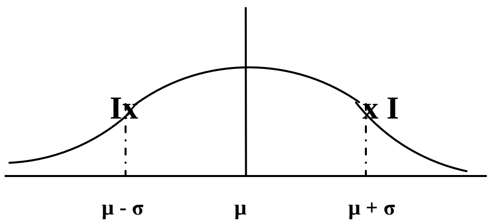
Llamamos **variable aleatoria de una distribución normal**, a toda variable X que siendo continua, sigue una distribución Normal, de media μ y desviación típica σ.

Se designa por N(μ, σ) y cumple dos condiciones.

a) La variable aleatoria va a recorrer toda la recta real desde $-\infty$ a $+\infty$.
b) La función de densidad es de la forma

$$f(x) = \frac{1}{\sigma \cdot \sqrt{\pi}} \cdot e^{-\frac{1}{2} \cdot \left(x - \frac{\mu}{\sigma}\right)^2}$$

Esta expresión es sumamente complicada para utilizarla analíticamente, pero si la podremos utilizar gráficamente.



a) La curva tiene forma de campana y y es simétrica respecto a la recta vertical x = μ.
b) La máxima altura se obtiene para el valor x = μ.

c) El área del recinto encerrado bajo la curva y el eje OX vale siempre 1 por tratarse de la función de densidad.

d) El eje de simetría divide dicha área en 2 iguales de valor 0,5 cada una.
e) A ambos lados de x = μ, las alturas de la curva van disminuyendo hasta tender a cero, sin alejarse mucho de la posición central.
f) Los puntos I son los puntos de inflexión de la curva y corresponden a las abscisas x = μ - σ y x = μ + σ

Queda claro que para cada **función de densidad N(μ,σ)** tendremos una curva en forma de campana, y todas ellas representan una familia de curvas.

Llamaremos **distribución normal estándar** N(0,1) a la función de densidad

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot e^{-\frac{x^2}{2}}$$

Llamaremos **función de distribución F(x)** al área representada por debajo de la curva hasta que tome en cada caso la variable x y que será siempre ≤ 1 por tratarse de una probabilidad.

La función de distribución N(0,1) se encuentra tabulada en una tabla , pero el problema es que la variable X sigue siempre distribuciones N(μ,σ), por lo que

tendremos que transformar la variable X en otra variable Z que siga la distribución estándar.

Tipificar la variable aleatoria consiste en encontrar la nueva variable Z en función de la X.

Para transformar la variable X en otra variable Z que siga la distribución N(0,1) tendremos que:

a) **Centrar, es decir trasladar la μ al origen de coordenadas => $\mu = 0$.**
b) **Reducir la σ a 1 => $\sigma = 1$. $(dilatar\ o\ contraer\ la\ grafica\ f(x))$.**

$$Z = \frac{X - \mu}{\sigma}$$

y una vez conseguida la nueva variable usaremos las tablas.
La tabla solo da valores de p (Z ≤ a)

Si quiero $p(Z \le -a) = 1 - p(Z \le a)$
$p(Z > a) = 1 - p(Z \le a)$
$p(-a \le Z \le a) = 2 \cdot p(Z \le a) - 1$
$p(a \le Z \le b) = p(Z \le b) - p(Z \le a)$
$p(-a \le Z \le b) = p(Z \le b) - p(Z \le a) - 1$
$p(-a \le Z \le -b) = p(Z \le a) - p(Z \le b)$

a) $p(Z \le 1{,}45) = 0{,}9265$ **. Se busca en la tabla 1,4 en la columna y 0,05 en la fila.**

El 92,65 % de las observaciones estan entre ∞ y 1,45.

b) $p(Z \le -1{,}45) = 1 - p(Z \le 1{,}45) = 1 - 0{,}9265 = 0{,}0735$ **. La tabla solo vale**

para valores de Z > 0, pero el area total vale 1 y existe simetría puedo hallar el contrario.

El 7,35 % de las observaciones estan entre - ∞ y – 1,45.

c) $p(1{,}25 \le Z \le 2{,}57) = p(Z \le 2{,}57) - p(Z \le 1{,}25)$ **Aquí restamos al área mayor hasta 2,57, el área menor hasta 1,25.**

Se busca 2,5 en columna y 0,07 en fila y se busca 1,2 en columna y 0,05 en fila y se obtiene:

$p(1{,}25 \le Z \le 2{,}57) = 0{,}9949 - 0{,}8944 = 0{,}1005$. **Solo el 10,05 % están en el intervalo pedido.**

d) $p(-0{,}53 \le Z \le 2{,}46)$ **. Primero restamos áreas y luego a la negativa le buscamos su simétrica y su contraria.**

p (- 0,53 ≤ Z ≤ 2,46) = p (Z ≤ 2,46) – p (Z ≤ - 0,53) = p (Z ≤ 2,46) –
- p (Z > 0,53) = p (Z ≤ 2,46) – [1 – p (Z ≤ 0,53)] = 0,9931 – [1 – 0,7019] = 0,695 lo que nos dice que el 69,5 % de las observaciones están entre – 0,53 y 2,46.

e) **p (Z = 1,5) Como no existe área entre 1,5 y 1,5 , es necesario buscar un área reducida alrededor de 1,5.**

P (Z = 1,5) = p (1,45 ≤ Z ≤ 1,55) = P (Z ≤ 1,55) – p (Z ≤ 1,45) = 0,9394 – 0,9265 = 0,0129. Nos indica que solo el 1,29% de las observaciones esta en 1,5.

APROXIMACION DE UNA BINOMIAL MEDIANTE UNA NORMAL.

Cuando el producto $n \cdot p \geq 5$ y $n \cdot q \geq 5,$ $la\ B(n,p) se\ aproxima\ a\ la$ $N(\mu,\sigma)\ donde\ \ \mu = n \cdot p \quad y \quad \sigma = \sqrt{n \cdot p \cdot q}$

$P(X = r)\ \ Binomial\ \ => \ \ P(r - 05 \leq X' \leq r + 0,5)\ Normal$

$P(X \geq r)\ \ Binomial\ \ => \ \ P(X' \geq r + 0,5)\ Normal$

$P(X \leq r)\ \ Binomial\ \ => \ \ P(X' \leq r - 0,5)\ Normal$

$P(X > r)\ \ Binomial\ \ => \ \ P(X' > r + 0,5)\ Normal$

$P(X < r)\ \ Binomial\ \ => \ \ P(X' < r - 0,5)\ Normal$

- **En cierto hospital, los niños varones nacidos representan el 54% de los nacimientos. Halla la probabilidad de que el número de niños varones nacidos de 2500 nacimientos, este entre 1200 y 1400.**

$\begin{cases} A\text{: niñas} \quad q = P(\overline{A}) = 0'46 \\ B\text{: niños} \quad p = P(A) = 0'54 \end{cases} \qquad n = 2500. \ \ B(2500\ ,0'54)$

Como $n \cdot p = 2500 \cdot 0'54 \geq 5\ \ hay\ que\ aproximar\ a\ una\ \ N(\mu,\sigma)$ **donde** $\mu = n \cdot p = 1350\ \ y\ \ \sigma = \sqrt{n \cdot p \cdot q} = 24'9 => \ \ N(1350, 24'9)$

$P(1200 \leq X \leq 1400) = P(1199'5 \leq X \leq 1400'5) = P(-6'04 \leq Z \leq 2'03) =$

$= P(Z \leq 2'03) - P(Z \leq -6'04) = \ P(Z \leq 2'03) - \ \big(1 - P(z \leq 6'04)\big) =$

$= 0'9788 - 1 + 1 = 0'9788$

CASO PARTICULAR DE AREAS BAJO LA CURVA

Cuando deseamos saber la proporción de individuos que se distribuyen en los intervalos $((\mu - k\sigma, \mu + k\sigma)$ *siendo* $k = 1,2,3, \ldots$

Si tipificamos la variable X por Z sale ya preparado que:

En el intervalo $(\mu - \sigma, \mu + \sigma)$
P
$(\mu - \sigma \leq X \leq \mu + \sigma) = 0'6826 =>$
$68{,}26\ \%$ *de las observaciones estan en mi intervalo.*

En el intervalo $(\mu - 2\sigma, \mu + 2\sigma)$
P
$(\mu - 2\sigma \leq X \leq \mu + 2\sigma) = 0'9549 =>$
$95'40\ \%$ ***de las observaciones estan en mi intervalo.***

En el intervalo $(\mu - 3\sigma, \mu + 3\sigma)$ ***se calcula que el*** $99'7\ \%$ ***estan dentro de dicho intervalo***

- **Los pesos de los individuos de una población se distribuyen normalmente con media 70 Kg y desviación típica 6 Kg. De una población de 2000 personas. Calcular cuantas tendrán un peso entre 64 y 76 Kg.**

Es una distribución normal N(70, 6). Como $\mu - \sigma = 70 - 6 = 64$ **y** $\mu + \sigma = 70 + 6 = 76$ **, estaremos en el intervalo** $(\mu - \sigma, \mu + \sigma)$ **con lo que habrá un 68'2 % de las observaciones entre 64 y 76 Kg.**

Entre 2000 personas habrá $\frac{68/2}{100} \cdot 2000 = 1364$ **personas de pesos comprendidos entre 64 y 76 Kg.**

Estadística inferencial o inductiva.

Población: **Conjunto de todos los elementos a los que va dirigida la investigación estadística.**

Muestra: **Es una parte de la población, debidamente elegida, que nos sirve para representarla y cuyos resultados van a ser validos para ella y para toda la población.**

El muestreo puede ser simple y sistemático pero siempre aleatorio. Aquí solo vamos a estudiar el muestreo aleatorio simple.

El muestreo aleatorio simple consiste en seleccionar n elementos diferentes de entre los N que componen la población y de forma que los n elementos elegidos, posean la misma probabilidad de ser elegidos.

Si la población posee una media aritmética μ y una desviación típica σ, podemos observar que la *variable aleatoria X, sigue una distribución normal N(μ, σ).*
Si elegimos una muestra de n elementos, esta poseerá una media muestral χ y una desviación típica muestral $\sigma' = \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$.
Esto nos indica que la *variable aleatoria media muestral sigue también una distribución normal* $N(\chi, \sigma/\sqrt{n})$.

Intervalo de confianza de una muestra.

Si tomamos n datos en una muestra de media χ, siendo la distribución de la población N (μ , σ), sin conocer μ de la población, podemos hallar un intervalo, dentro del cual podemos asegurar que se encuentra la media poblacional, siempre con un llamado nivel de confianza

Llamamos error cometido al tomar los n datos de la muestra a la diferencia entre χ y μ, es decir $\varepsilon = \chi - \mu$, donde dicho error viene siempre dado por el llamado nivel de confianza 1 – α expresado en % , de que μ si este en lo que definiremos como intervalo de confianza y donde α es el nivel de significación de que μ no este dentro de dicho intervalo de confianza.

Para poder calcular el intervalo de confianza, será necesario utilizar la media muestral χ y su tipificación como distribución normal, la cual ya depende de N(0, 1)

$$Z = \frac{\chi - \mu}{\sigma/\sqrt{n}}$$

Definimos intervalo de confianza $\left(\chi - Z_{\alpha/2} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \,,\ \chi + Z_{\alpha/2} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right)$,

donde para calcular la $Z_{\alpha/2}$ es necesario partir del calculo de

$$p\,(Z < Z_{\alpha/2}) = \frac{[(1-\alpha)\ +1]}{2} = 0{,}pqrt$$

A continuación se busca en el interior de la tabla tabulada el valor mas aproximado por defecto o por exceso y de este se busca el valor de $Z_{\alpha/2}$ correspondiente.

Veamos dos ejemplos del calculo de $Z_{\alpha/2}$.

Si el nivel de significación $\alpha = 0{,}05$ ➔ nivel de confianza en % es del 1- 0,05 = 0,95 ➔ 95 %.

$$p\left(Z < Z_{\alpha/2}\right) = \frac{\frac{95}{100}+1}{2} = \frac{0{,}95+1}{2} = 0{,}9570$$

Al buscar el 0,9750 lo encontramos y corresponde a $Z_{\alpha/2} = 1{,}96$.

Si el nivel de significación $\alpha = 0{,}02$ ➔ nivel de confianza en % es del 1- 0,05 = = 0,98 ➔ 98 %.

$$p\left(Z < Z_{\alpha/2}\right) = \frac{\frac{98}{100}+1}{2} = \frac{0{,}98+1}{2} = 0{,}9900 \Rightarrow \begin{cases} 0{,}9898 \rightarrow Z_{\alpha/2} = 2{,}32 \\ 0{,}9901 \rightarrow Z_{\alpha/2} = 2{,}33 \end{cases}$$

➔ $Z_{\alpha/2} = 2{,}325$.

El intervalo de confianza buscado $\left(\chi - Z_{\alpha/2}\cdot\frac{\sigma}{\sqrt{n}}\ ,\ \chi + Z_{\alpha/2}\cdot\cdot\frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right)$, nos debe indicar que la media de la población μ debera estar dentro del intervalo dado, siempre para el nivel de confianza $1-\alpha$ establecido.

Si en un problema si me dan la media de la población puede que: μ pertenezca al intervalo o que no pertenezca.

Si en un problema me piden el numero n de datos de la muestra a partir de conocer el error cometido entre la media poblacional y la media muestral,

Como $\varepsilon < Z_{\alpha/2}\cdot\sigma/\sqrt{n}$ ➔ $\varepsilon^2 < (Z_{\alpha/2}\cdot\sigma)^2/(\sqrt{n})^2$ ➔ $n > (Z_{\alpha/2}\cdot\sigma)^2/\varepsilon^2$

Contraste de hipótesis para la media.

El problema consiste en que deseamos contrastar la media poblacional μ con los n datos de una muestra de media χ.

Para ello, establecemos una hipótesis, inicialmente verdadera, llamada hipótesis nula (H_o), en la que $\mu = \mu_o$, en la que se considera que la diferencia entre la media poblacional verdadera y su valor hipotetico es nula.
Por el contrario si $\mu \neq \mu_o$ se establecera la hipótesis complementaria llamada hipótesis alternativa (H_1), en la que se considera que la diferencia entre la media poblacional verdadera y su valor hipotetico no es nula.

Si en un ejercicio practico, conocemos tanto la media poblacional μ , como la media muestral χ, .

Calculamos el intervalo de confianza para una distribución $N(\mu, \sigma / \sqrt{n})$ es decir : $(\mu - Z_{\alpha/2} \cdot \sigma / \sqrt{n} , \ \mu + Z_{\alpha/2} \cdot \sigma / \sqrt{n})$ y realizaremos un contraste bilateral o de dos colas.

Si χ pertenece a $(\mu - Z_{\alpha/2} \cdot \sigma / \sqrt{n} , \ \mu + Z_{\alpha/2} \cdot \sigma / \sqrt{n})$, aceptaremos la hipótesis nula de que $\mu_o = \mu$, es decir que la media de la población ha sido aceptada.

Si χ no pertenece a $(\mu - Z_{\alpha/2} \cdot \sigma / \sqrt{n} , \ \mu + Z_{\alpha/2} \cdot \sigma / \sqrt{n})$, no podremos aceptar la hipótesis nula y aceptaremos la hipótesis alternativa de que $\mu_o \neq \mu$, es decir que la media de la población no ha sido aceptada, por diferir de forma significativa con el verdadero valor. En este caso se dice que se rechaza la hipótesis nula y dicha zona de rechazo se denomina region critica.

Cuando la region critica se situa en una de las dos colas, al contraste se le denomina unilateral o de una cola.

Contraste unilateral derecho.

Aquí, el intervalo de confianza es $(\mu + Z_\alpha \cdot \sigma / \sqrt{n} , \ \infty)$, donde $Z\alpha$ se calcula a partir de $p(Z < Z\alpha)$ = nivel de confianza.

0,9495 ➔ $Z\alpha = 1{,}64$

Si el nivel de confianza es del 95% ➔ $p(Z < Z\alpha) = 0{,}9500$

0,9505 ➔ $Z\alpha = 1{,}65$

Nos quedamos con $Z\alpha = 1{,}65$ que es donde se comete menos error.

Si χ pertenece a $(\mu + Z_\alpha \cdot \sigma / \sqrt{n} , \ \infty)$ se acepta la hipótesis nula H_o ➔ $\mu \leq \mu_o$

Si χ no pertenece a ($\mu + Z_\alpha \cdot \sigma / \sqrt{n}$, ∞) se acepta la hipótesis alternativa H_1 ➔ $\mu > \mu_o$

Contraste unilateral izquierdo.

Aquí, el intervalo de confianza es ($-\infty$, $\mu - Z_\alpha \cdot \sigma / \sqrt{n}$) , donde $Z\alpha$ se calcula a partir de $p (Z < Z\alpha)$ = nivel de confianza.

Si χ pertenece a ($-\infty$, $\mu + Z_\alpha \cdot \sigma / \sqrt{n}$) se acepta la hipótesis nula H_o ➔ $\mu \geq \mu_o$

Si χ no pertenece a ($-\infty$, $\mu + Z_\alpha \cdot \sigma / \sqrt{n}$) se acepta la hipótesis alternativa H_1 ➔ $\mu < \mu_o$

Ante un examen, un alumno ha estudiado 15 de los 25 temas correspon-dientes a la materia. El examen se realiza extrayendo al azar 2 temas y dejando que el alumno escoja 1 de los 2. Hallar la probabilidad de que el alumno pueda elegir en el examen uno de los temas estudiados.

$$\text{25 temas}\begin{cases}\text{15 estudiados} \quad & A = \text{tema estudiado} \rightarrow \quad P(A) = \frac{15}{25} \\ \text{10 no estudiados} \quad & B = \text{tema no estudiado} \rightarrow P(B) = \frac{10}{25}\end{cases}$$

1º tema **2º tema**

$$x\begin{cases}\frac{15}{25} \rightarrow\rightarrow \quad A\begin{cases}\frac{14}{24} \rightarrow\rightarrow \quad A \Rightarrow \; P(A)\cdot P\left(A/_A\right) = \frac{15}{25}\cdot\frac{14}{24} = 0{,}35 \\ \frac{10}{24} \rightarrow\rightarrow \quad B \Rightarrow \; P(A)\cdot P\left(B/_A\right) = \frac{15}{25}\cdot\frac{10}{24} = 0{,}25\end{cases} \\ \frac{10}{25} \rightarrow\rightarrow \quad B\begin{cases}\frac{15}{24} \rightarrow\rightarrow \quad A \Rightarrow \; P(B)\cdot P\left(A/_B\right) = \frac{10}{25}\cdot\frac{15}{24} = 0{,}25 \\ \frac{9}{24} \rightarrow\rightarrow \quad B \Rightarrow \; P(B)\cdot P\left(B/_B\right) = \frac{10}{25}\cdot\frac{9}{24} = 0{,}15\end{cases}\end{cases}$$

Probabilidad de saberse los 2 temas: A y A Son sucesos dependientes

$$P(A \cap A) = P(A)\cdot P\left(A/_A\right) = \frac{15}{25}\cdot\frac{14}{24} = 0{,}35$$

Probabilidad de saberse el 1º tema pero no el 2º: A y B Son sucesos dependientes.

$$P(A \cap B) = P(A)\cdot P\left(A/_B\right) = \frac{15}{25}\cdot\frac{15}{24} = 0{,}25$$

Probabilidad de no saberse el 1º tema pero si el 2º: B y A son sucesos dependientes.

$$P(B \cap A) = P(B)\cdot P\left(A/_B\right) = \frac{10}{25}\cdot\frac{15}{24} = 0{,}25$$

La probabilidad total de que el alumno pueda elegir en el examen uno de los temas estudiados es: $P(A \cap A) + P(A \cap B) + P(B \cap A) = 0'35 + 0'25 + 0'25 = 0'85$

¿ Cuál es la probabilidad de obtener 4 reyes al extraer cinco cartas de una baraja de cuarenta cartas ?

El experimento no cambia si en lugar de coger las cartas de una vez, se extrajesen de una en una , sin reemplazamiento. Si se extraen las cartas de una en una, después de cada extracción podemos considerar que empezamos otro experimento distinto, aunque siga consistiendo en extraer una carta.

Pero cada vez habrá una carta menos. Y si en la primera hemos sacado un rey en la segunda hay una carta menos y un rey menos. Esto da pie a tratar el problema de la probabilidad condicionada

La probabilidad de que salga Rey en la primera es : $P(R_1) = 4 / 40$

La probabilidad de que salga Rey en la primera y en la segunda extracciones es :
$P(R_1 \cap R_2) = P(R_1) \cdot P(R_2 / R_1)$

Esta probabilidad $P(R_2 / R_1)$ es la probabilidad de que , habiendo aparecido Rey en la primera extracción aparezca también en la segunda : probabilidad de R_2 condicionada a R_1 que podemos aprovechar para expresarla :

$$P\left({}^{R_2}/_{R_1}\right) = \frac{P(R_1 \cap R_2)}{P(R_1)}$$

Y así hasta la cuarta extracción. La probabilidad de tener 4 Reyes en cuatro extracciones es :

$$P(R_1 \cap R_2 \cap R_3 \cap R_4) = \frac{4}{40} \cdot \frac{3}{39} \cdot \frac{2}{38} \cdot \frac{1}{37} = \frac{1}{91390}$$

Ahora habrá que tener en cuenta que cualquier péntupla RRCRR cumple el problema

¿Cuántas hay ? Tantas como número de cuaternas RRRR multiplicado por 5 que es el número de posiciones que puede ocupar la carta 5ª ,no rey.

$$P(\text{ extraer 5 cartas y sacar a reyes}) = 5 \cdot \frac{1}{91390} = \frac{1}{18278} = 0{,}000547$$

Dos expertos, E1 y E2, realizan peritaciones para una cierta compañía de seguros. La probabilidad de que una peritación haya sido realizada por E1 es 0.55 y por E2 es 0.45. Si una peritación ha sido realizada por E1, la probabilidad de que dé lugar al pago de una indemnización es de 0.98 y si ha sido realizada por E2, la probabilidad de que de lugar al pago de una indemnización es de 0.90. Un siniestro ha supuesto a la compañía el pago de una indemnización. Hallar la probabilidad de que la peritación haya sido realizada por E2.

Se tienen las siguientes probabilidades: P (E1) = 0,55 , P (E2) = 0,45.

P (indemnización si la inspección la hace E1) = P (Ind/E1) = 0,98
P (indemnización si la inspección la hace E2) = P (Ind/E2) = 0,90

Podemos confeccionar el diagrama de árbol:

$$x \begin{cases} 0{,}55 \\ \to\to \quad E1 \begin{cases} 0{,}98 \\ \to\to \quad Ind => \; P(E1)\cdot P\left({}^{Ind}/_{E1}\right) = 0{,}55\cdot 0{,}98 \\ 0{,}02 \\ \to\to \quad \overline{Ind} => \; P(E1)\cdot P\left({}^{\overline{Ind}}/_{E1}\right) = 0{,}55\cdot 0{,}02 \end{cases} \\ 0{,}45 \\ \to\to \quad E2 \begin{cases} 0{,}90 \\ \to\to \quad Ind => \; P(E2)\cdot P\left({}^{Ind}/_{E2}\right) = 0{,}45\cdot 0{,}90 \\ 0{,}10 \\ \to\to \quad \overline{Ind} => \; P(E2)\cdot P\left({}^{\overline{Ind}}/_{E2}\right) = 0{,}45\cdot 0{,}10 \end{cases} \end{cases}$$

Por la probabilidad total,

P (Ind)= P (E1) · P (Ind/E1) + P (E2) · P (Ind/E2) = 0,55· 0,98 + 0,45 · 0,90 = 0,944

Por Bayes: $P\left({}^{E2}/_{Ind}\right) = \frac{P\,(E2)\cdot P\left({}^{Ind}/_{E2}\right)}{P\,(Ind)} = \frac{0{,}45\cdot 0{,}90}{0{,}944} = \frac{0{,}405}{0{,}944} = 0{,}429$

El caballero De Meré planteó a Pascal, entre otros, el siguiente problema : al jugar a la suma de puntos de dos dados observó que apostando a suma 6 solía perder y jugando a sumar 7 puntos solía ganar. Todo ello para un número grande de partidas. Y no se lo explicaba porque el numero 6 admite las sumas : 5+1 , 4+2 y 3+3 que son tres casos, y el número 7 admite también tres posibles sumas : 6+1 , 5+2 y 4+3 . Terminaba su consulta mostrando su extrañeza al ser 3 los casos favorables en ambas apuestas. Se pide: 1º) Hallar la probabilidad de sumar 6 puntos y la de sumar 7 al lanzar dos dados correctos. 2º) Evaluar en términos de diferencia la "finura" del caballero De Merè al apreciar el distinto valor de esas dos probabilidades

Espacio muestral *E*1 x *E*2 producto cartesiano de *E*1 y *E*2 (de los pares de números obtenidos al lanzar dos dados)

[1, 1] [1, 2] [1, 3] [1, 4] [1, 5] [1, 6]
[2, 1] [2, 2] [2, 3] [2, 4] [2, 5] [2, 6]
[3, 1] [3, 2] [3, 3] [3, 4] [3, 5] [3, 6]
[4, 1] [4, 2] [4, 3] [4, 4] [4, 5] [4, 6]
[5, 1] [5, 2] [5, 3] [5, 4] [5, 5] [5, 6]
[6, 1] [6, 2] [6, 3] [6, 4] [6, 5] [6, 6]

El espacio muestral final es { 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12 } que se obtiene sumando las puntuaciones de los dos dados.

2	3	4	5	6	7
3	4	5	6	7	8
4	5	6	7	8	9
5	6	7	8	9	10
6	7	8	9	10	11
7	8	9	10	11	12

Los sucesos elementales "suma de puntos " no tienen la misma probabilidad

$p(\Sigma = 6) = \frac{5}{36}$, pues hay 5 pares favorables que suman 6 dentro de los 36 casos posibles
$p(\Sigma = 7) = \frac{6}{36} = \frac{1}{6}$ para sumar 7 hay 6 favorables dentro de los 36 casos posibles

"Finura" del jugador caballero De Meré : en el fragor del juego fue suficientemente frío y analítico como para ir tomando nota mental de los resultados y apreciar la exigua dferencia :

$$\frac{1}{6} - \frac{5}{36} = \frac{1}{36} = 0{,}02778 \quad ¡Menos\ de\ un\ 3\%\ ¡$$

En cierta ciudad el 40% de la población tiene cabellos castaños, el 25% tiene los ojos castaños y el 15% tiene cabellos y ojos castaños. Se

escoge una persona al azar. Calcular: a) Si tiene cabellos castaños, ¿Cuál es la probabilidad de que también tenga ojos castaños? . b) Si tiene los ojos castaños, ¿Cuál es la probabilidad de que no tenga cabellos castaños?. c) ¿Cuál es la probabilidad de que no tenga cabellos ni ojos castaños?

$P(C) = 0'4 \qquad P(O) = 0'25 \qquad P(C \cap O) = 0'15$

a) $$P(O/C) = \frac{P(C \cap O)}{P(C)} = \frac{0'15}{0'4} = 0'375$$

b) $$P(C^C/O) = \frac{P(C^C \cap O)}{P(O)} = \frac{P(O) - P(O \cap C)}{P(O)} = \frac{0'25 - 0'15}{0'25} = 0'4$$

c) $P(O^C \cap C^C) = P(O \cup C)^C = 1 - P(O \cup C) = 1 - [P(O) + P(C) - P(O \cap C)]$

$= 1 - (0'25 + 0'4 - 0'15) = 0'5$

En el departamento de lácteos de un supermercado se encuentran mezclados y a la venta 100 yogures de la marca A, 60 de la marca B y

40 de la marca C. La probabilidad de que un yogur este caducado es 0,01 para la marca A; 0,02 para la marca B y 0,05 para la marca C. Un comprobador elige un yogur al azar.
a) Calcular la probabilidad de que un yogur este caducado.
b) Sabiendo que el yogur esta caducado, ¿Cuál es la probabilidad de que sea de la marca B?. (PAU Septiembre 2007)

a) P(A) = 0,5; P(B) = 0,3; P(C) = 0,2; P(Cad/A) = 0,01; P(Cad/B) = 0,02 y P(Cad/C) = 0,03

Construimos un diagrama de árbol:

$$\begin{cases} 0{,}5 \\ \to A \begin{cases} 0{,}01 \\ \to \quad Cad \\ 0{,}99 \\ \to \quad \overline{Cad} \end{cases} \\ 0{,}3 \\ \to B \begin{cases} 0{,}02 \\ \to \quad Cad \\ 0{,}98 \\ \to \quad \overline{Cad} \end{cases} \\ 0{,}2 \\ \to C \begin{cases} 0{,}03 \\ \to \quad Cad \\ 0{,}97 \\ \to \quad \overline{Cad} \end{cases} \end{cases}$$

Por el teorema de la probabilidad total:

P(Cad) = P(A) · P(Cad/A) + P(B) · P(Cad/B) + P(C) · P(Cad/C) = 0,5 · 0,01 + 0,3 · 0,02 +

0,2 · 0,03 = 0,017

b) Por el teorema de Bayes:

$$P(B/Cad) = \frac{P(Cad/B).P(B)}{P(Cad)} = \frac{0{,}02.0{,}03}{0{,}017} = 0{,}352$$

En una carrera ciclista participan cuatro corredores españoles y tres franceses. Hallar la probabilidad de que : 1º) Los cuatro primeros

sean españoles; 2º) Los dos primeros sean españoles y el tercero francés

Por la probabilidad compuesta y la probabilidad condicionada

Aplicamos la fórmula que nos da la probabilidad de que se den los sucesos A_1 y A_2 mediante el producto de la probabilidad de p(A_1) y la probabilidad de A_2 condicionada a que antes se haya dado A_1 . La fórmula es $P(A_1 \cap A_2) = P(A_1) \cdot P(A_2 / A_1)$

Representaremos por *Ei* el suceso de que un corredor español llega en el puesto *i* -ésimo

Si pasamos a tres y luego a cuatro sucesos

$$a)\ P(E_1 \cap E_2 \cap E_3 \cap E_4) =$$
$$P(E_1) \cdot P\left({}^{E_2}/_{E_1}\right) \cdot P\left({}^{E_3}/_{E_1 \cap E_2}\right) \cdot P\left({}^{E_4}/_{E_1 \cap E_2 \cap E_3}\right)$$

$P(E_1) = 4/7$, $P(E_2/E_1) = 3/6$, $P(E_3/E_1 \cap E_2) = 2/5$, $P(E_4/E_1 \cap E_2 \cap E_3) = 1/4$

Con lo que $P(E_1 \cap E_2 \cap E_3 \cap E_4) = 4/7 \cdot 3/6 \cdot 2/5 \cdot 1/4 = 1/35$

Análogamente, si F_3 significa que el tercer corredor es francés , tendremos que

$P(E_1 \cap E_2 \cap F_3) = P(E_1 \cap E_2) \cdot P(F_3 / (E_1 \cap E_2)) = 4/7 \cdot 3/6 \cdot 3/5 = 6/35$

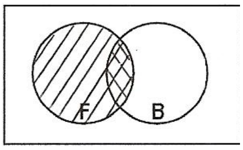
En una clase en la que todos practican algún deporte, el 60% de los alumnos juega al fútbol o al baloncesto y el 10% practica ambos deportes. Si además hay un 60% que no juega al fútbol .¿Cuál es la pro-

babilidad de que, escogido al azar un alumno de la clase : a) juegue solo al fútbol. b) juegue solo al baloncesto. c) practique uno solo de los deportes. d) no juegue ni al fútbol no al baloncesto.

P (F∪B) = 0’6   P (F∩B) = 0’1   P ($\bar{F}$) = 0’6

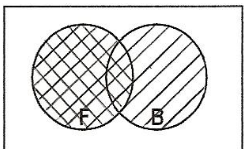
a) P (solo F) = P($F \cap \bar{B}$) = P (F) – P (F∩B) = [1 – P ($\bar{F}$)] – P (F∩B) = (1– 0’6) – 0’1 =

0’4 – 0’1 = 0’3

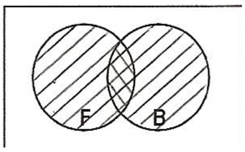


b) P (solo B) = P($B \cap \bar{F}$) = P (B) – P (F∩B) = P(B) – [- P (F∪B) + P(B) + P (F)] =

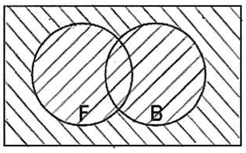
P (F∪B) - P (F) = 0’6 – 0’4 = 0’2



c) P (solo F o solo B) = P (F∪B) – P (F∩B) = 0’6 – 0’1 = 0’5



d) P (ni F ni B) = P($\bar{F} \cap \bar{B}$) = 1 – P (F∪B) = 1 – 0’6 = 0’4



En una ciudad, la probabilidad de que uno de sus habitantes censados vote al partido A es 0´4; la probabilidad de que vote al partido B es 0´35 y la probabilidad de que vote al partido C es 0´25. Por otro lado, las probabilidades de que un votante de cada partido lea diaria-

mente algún periódico son, respectivamente, 0´4; 0´4; y 0´6. Se elige una persona de la ciudad al azar: a) Calcúlese la probabilidad de que lea algún periódico.
b) Si la persona elegida lee algún periódico, ¿Cuál es la probabilidad de que sea votante del partido B?

$$\begin{cases} A & \rightarrow \begin{cases} L \\ \bar{L} \end{cases} \quad P(A) = 0{,}4 \quad \rightarrow P(L/A) = 0{,}4 \\ B & \rightarrow \begin{cases} L \\ \bar{L} \end{cases} \quad P(B) = 0´35 \quad \rightarrow P(L/B) = 0´4 \\ C & \rightarrow \begin{cases} L \\ \bar{L} \end{cases} \quad P(C) = 0´25 \quad \rightarrow P(L/C) = 0´6 \end{cases}$$

(a) $P(L) = P(A) \cdot P(L/A) + P(B) \cdot P(L/B) + P(C) \cdot P(L/C)$

$P(L) = 0´4.\ 0´4 + 0´35\ .\ 0´4 + 0´25 + 0.6 = 0´16 + 0´14 + 0´15 = 0´45$

(b) Aplicando Bayes $P(B/L) = \frac{P(B).\ P(L/B)}{P(L)} = \frac{0´35\ .0´4}{0´45} = \frac{0´14}{0´45} = 0´31$

En una estantería hay 60 novelas y 20 libros de poesía. Una persona A elige un libro al azar de la estantería y se lo lleva. A continuación otra persona B elige otro libro al azar.

a) ¿Cuál es la probabilidad de que el libro seleccionado por B sea una novela?

b) Si se sabe que B eligió una novela, ¿Cuál es la probabilidad de que el libro elegido por A sea de poesía?

$$\begin{cases} A_N \rightarrow \begin{cases} B_N \\ B_p \end{cases} P(A_N) = \frac{60}{80} \rightarrow P\left(B_N/A_N\right) = \frac{59}{79} \ ; \ P\left(B_p/A_N\right) = \frac{20}{79} \\ A_p \rightarrow \begin{cases} B_N \\ B_p \end{cases} P(A_p) = \frac{20}{80} \rightarrow P\left(B_N/A_p\right) = \frac{60}{79} \ ; \ P\left(B_p/A_p\right) = \frac{19}{79} \end{cases}$$

$P(A_N \cap B_N) = \frac{60}{80} \cdot \frac{59}{79} = \frac{177}{316}$ $\qquad$ $P(A_P \cap B_N) = \frac{20}{80} \cdot \frac{60}{79} = \frac{60}{316}$

$P(B \text{ novela}) = p(A_N \cap B_N) + P(A_P \cap B_N) = \frac{177}{316} + \frac{60}{316} = \frac{237}{316}$

Hay que calcular P(A poesía / B novela)

Busquemos los casos favorables de que A elija poesía sabiendo que B elige novela

$P(A_P \cap B_N) = \frac{20}{80} \cdot \frac{60}{79} = \frac{60}{316}$

Busquemos los casos posibles que serán todos los que B haya elegido novela es decir

$P(N) = P(A_N \cap B_N) + P(A_P \cap B_N) = \frac{177}{316} + \frac{60}{316} = \frac{237}{316}$

$P(A_P / B_N) = \frac{P(P \cap N)}{P(N)}$ $\qquad$ $P(A \text{ poesía} / B \text{ novela}) = \frac{60}{237}$

En una urna hay 20 bolas , de las que 6 son blancas. Se extraen tres bolas al azar. Se pide calcular la probabilidad de que " al menos" una sea blanca.

Por la probabilidad compuesta y condicionada

Al ver la expresión "al menos" hemos de pensar que conviene considerar el suceso contra-rio. Si S es el suceso extraer "al menos" una blanca de entre las tres , entonces S^C sera no extraer ninguna bola blanca en las 3 extracciones

Si llamamos NB al suceso "no blanca", su probabilidad es: 14 / 20 = 7 / 10

Por tanto la fórmula de la probabilidad compuesta nos dice , si las sacamos una a una, que

$p(NB_1, NB_2, NB_3) = (14/20) \cdot (13/19) \cdot (12/18) = (7/10) \cdot (13/19) \cdot (2/3) =$

$= 91 / 285$

$p(NB_3) = 91/285 \rightarrow P(S^C) = 91/285$

$p(S) = 1 - p(S^C) \rightarrow p(S) = 194/285$

En una urna hay 9 bolas numeradas del 1 al 9. Hallar la probabilidad de que al extraer das bolas, resulten de la misma paridad.

Al pedir que se extraigan dos bolas, poderíos considerar como si el experimento consis-tiera en sacar dos extracciones sucesivas sin remplazamiento.
Esto nos indica que los dos sucesos son dependientes, pues la extracción de la segunda bola dependerá de lo que haya salido la primera.

Dibujemos el diagrama en árbol correspondiente $\begin{cases} P & \rightarrow \begin{cases} PP \\ PI \end{cases} \\ I & \rightarrow \begin{cases} IP \\ II \end{cases} \end{cases}$

P(ambas sean de la misma paridad) = P{ (P ∩ P) U (I ∩ I) } = P(P ∩ P) + P(I ∩ I) =

$$= \frac{4}{9} \cdot \frac{3}{8} + \frac{5}{9} \cdot \frac{4}{8} = \frac{1}{6} + \frac{5}{18} = \frac{3+5}{8} = \frac{8}{18} = \frac{4}{9}$$

La baraja española consta de diez cartas de oros, diez copas, diez de espadas y diez de bastos. Se extraen dos cartas. Calcule razonadamente la probabilidad de que al menos, una de las dos cartas sea de espadas en los siguientes supuestos:
a) Si se extraen las cartas con reemplazamiento.
b) Si se extraen las cartas sin reemplazamiento. (PAU JUNIO 2007)

a) $P(\text{ninguna espada}) = P(\overline{E}) \cdot P(E) = \frac{30}{40} \cdot \frac{30}{40} = \frac{9}{16}$

$P(\text{al menos una espada}) = 1 - P(\text{ninguna espada}) = 1 - \left(\frac{9}{16}\right) = \frac{7}{16}$

b) $P(\text{ninguna espada}) = P(\overline{E}) \cdot P(\overline{E}/\overline{E}) = \frac{30}{40} \cdot \frac{29}{39} = \frac{29}{52}$

$P(\text{al menos una espada}) = 1 - P(\text{ninguna espada}) = 1 - \frac{29}{52} = \frac{23}{52}$

La cuarta parte de una población ha sido vacunada contra una enfermedad. Se comprueba, sin embargo, que de diez enfermos dos están vacunados. Se sabe, además, que de cada doce vacunados uno cae enfermo.
1. ¿ Qué probabilidad tiene un individuo de contraer la enfermedad ?
2. ¿ Qué probabilidad tiene un individuo no vacunado de contraer la enfermedad ?

Diagrama en árbol Si Llamamos : V : vacunados NV : no vacunados

E : Enfermo NE : no enfermo

$$\begin{cases} V & \rightarrow \begin{cases} E \\ NE \end{cases} \quad P(V) = \frac{1}{4} \quad \rightarrow P(E/V) = \frac{1}{12} \;;\; P(NE/V) = \frac{11}{12} \\ NV & \rightarrow \begin{cases} E \\ NE \end{cases} \quad P(NV) = \frac{3}{4} \quad \rightarrow P(E/NV) = p_1 \;;\; P(NE/NV) = p_2 \end{cases}$$

$P(V \cap E) = P(V) \cdot P(E/V) = \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{12} = \frac{1}{48}$ y como $p(V/E) = \frac{2}{10}$

Si aplicamos la definición de probabilidad condicionada a $P(V/E) = \frac{P(V \cap E)}{P(E)}$

$$\frac{2}{10} = \frac{1/48}{P(E)} \Rightarrow P(E) = \frac{10}{\frac{2}{48}} = \frac{5}{48}$$

Para calcular la probabilidad $p(E/NV)$ partimos de la fórmula de la probabalidad Total que nos dice :

$$p(E) = p(V) \cdot p(E/V) + p(NV) \cdot p(E/NV)$$

Sustituímos las probabilidades dadas o calculadas antes, despejando previamente :

$$P(E/NV) = \frac{P(E) - P(V) \cdot P(E/V)}{P(NV)} = \frac{\frac{5}{48} - \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{12}}{\frac{3}{4}} = \frac{1}{9}$$

La probabilidad de que un alumno de Medicina apruebe Fisiología es 0´6 ; la de que apruebe Bioquímica es 0´5 y la de que apruebe ambas es 0´2 . Se pide :
1º) Probabilidad de que apruebe "al menos" una de las dos
2º) Probabilidad de que no apruebe ninguna de las dos
3º) Probabilidad de que apruebe Fisiología pero no Bioquímica

1º) $P(F \cup B) = P(F) + P(B) - P(F \cap B)$ Sustituyendo los datos

$p(F \cup B) = 0'6 + 0'5 - 0'2 = 0'9$ Tiene un 90% de probabilidad de aprobar al menos una de las dos

2º) No aprobar ninguna de las dos es el suceso $(F)^c \cap (B)^c = (F \cup B)^c$, contrario del anterior

Por tanto, $P((F \cup B)^c) = 1 - P(F \cup B) = 1 - 0{'}9 = 0{'}1$

La probabilidad de no aprobar ninguna es el 10% , porcentaje complementario del anterior 90%

3º) El suceso aprobar F y no aprobar B es el suceso : $F \cap (B)^c$ que también se expresa como $F - B$

Pero, $[F - B] \cup [F \cap B] = F$ Podemos hacer un diagrama de Venn para ayudarnos a "verlo"

Entonces , $p(F \cap (B)^c) = p(B) - p(F \cap B)$ Sustituyendo :

$P(F \cap B^c) = 0{,}6 - 0{,}2 = 0{,}4 = 40\%$

Los tigres de cierto país proceden de tres reservas: el 30% de la primera, el 25% de la segunda y el 45% de la tercera. La proporción de tigres albinos de la primera reserva es de 0.2%, mientras que dicha proporción es 0.5% en al segunda, y 0.1% en la tercera. ¿Cuál es la probabilidad de que un tigre de ese país sea albino?

$$\begin{cases} \boldsymbol{A} \rightarrow \begin{cases} \boldsymbol{Alb} \\ \boldsymbol{Alb} \end{cases} & P(A) = \frac{30}{100} = \frac{3}{10} \quad \rightarrow P(Alb/A) = \frac{0{,}2}{100} = \frac{2}{1000} \\ \boldsymbol{B} \rightarrow \begin{cases} \boldsymbol{Alb} \\ \boldsymbol{Alb} \end{cases} & P(B) = \frac{25}{100} = \frac{1}{4} \quad \rightarrow P(Alb/B) = \frac{0{,}5}{100} = \frac{5}{1000} \\ \boldsymbol{C} \rightarrow \begin{cases} \boldsymbol{Alb} \\ \boldsymbol{Alb} \end{cases} & P(C) = \frac{45}{100} = \frac{9}{20} \quad \rightarrow P(Alb/C) = \frac{0{,}1}{100} = \frac{1}{1000} \end{cases}$$

P (tigre sea albino) = P (A) · P (Alb/A) + P (B) · P (Alb/b) + P (C) · P (Alb/C) =

$$\frac{3}{10}\cdot\frac{2}{1000}+\frac{1}{4}\cdot\frac{5}{1000}+\frac{9}{20}\cdot\frac{1}{1000}=\frac{6}{10000}+\frac{5}{4000}+\frac{9}{20000}=\frac{12+25+9}{20000}$$

$$\text{P (tigre sea albino)}=\frac{46}{20000}=0'0023$$

Los pianistas de Isla Sordina se forman en tres conservatorios, C1, C2 y C3, que forman al 40%, 35% y 25% de los pianistas, respectivamente. Los porcentajes de pianistas virtuosos que producen estos conservatorios son del 5%, 3% y 4%, respectivamente. Se selecciona un pianista al azar.
(a) Calcular la probabilidad de que sea virtuoso.
(b) El pianista resulta ser virtuoso. Calcular la probabilidad de que se haya formado en el primer conservatorio (C1). (PAU JUNIO 2007)

$$a)\ P(V)=P(C_1)\cdot P(V/C_1)+P(C_2)\cdot P(V/C_2)+P(C_3)\cdot P(V/C_3)=$$

= 0´4 · 0´05 + 0´35 · 0´03 + 0´25 · 0´04 = 0´02 + 0´0105 +0´0100 = 0´0405

$$\boldsymbol{b)\ P(C_1/V)=\frac{P(C_1)\cdot P(V/C_1)}{P(V)}=\frac{0{,}4\ \cdot\ 0{,}05}{0{,}0405}=\frac{0{,}02}{0{,}0405}=\frac{2}{4{,}05}=0{,}49}$$

Once bolas que llevan grabados los números del 1 al 11, estan repartidas en tres urnas. Una de estas urnas contiene las bolas con los números 1,2,3,4 y 5, otra las que corresponden a los números 6,7,8,y 9 y la tercera a las dos bolas restantes. Elegida una urna al azar se sacan dos bolas. ¿Cual es la probabilidad de que la suma de los números sea par?

Para que la suma de los números sea par es necesaria que las dos bolas extraídas sean pares o las dos impares.

$\boldsymbol{De\ A:}$ $\quad P(P\ \cap\ P)=\ P(P)\cdot\ P(P/P)=\frac{2}{5}\cdot\frac{1}{4}=\frac{1}{10}$

$\quad P(I\ \cap\ I)=\ P(I).P(I/I)=\frac{3}{5}\cdot\frac{2}{4}=\frac{3}{10}$

$\boldsymbol{De\ B:}$ $\quad P(P \cap P) = P(P) \cdot P(P/P) = \frac{2}{4} \cdot \frac{1}{3} = \frac{1}{6}$

$P(I \cap I) = P(I).P(I/I) = \frac{2}{4} \cdot \frac{1}{3} = \frac{1}{6}$

$\boldsymbol{De\ C:}$ $\quad P(P \cap P) = P(P) \cdot P(P/P) = \frac{1}{2} \cdot \frac{0}{1} = 0$

$P(I \cap I) = P(I).P(I/I) = \frac{1}{2} \cdot \frac{0}{1} = 0$

$$P(pares) = \frac{1}{3} \cdot \left(\frac{1}{10} + \frac{3}{10} + \frac{1}{6} + \frac{1}{6}\right) = \frac{1}{3} \cdot \frac{3+9+5+5}{30} = \frac{22}{90} = \frac{11}{45}$$

Sea E un espacio muestral, A y B sucesos de E y *p* una medida de probabilidad en E. Sabiendo que p(*A*) = 3/5, p(*B*) = 2/5 y p(*A U B*) - p(*A* Λ *B*) = 3/10, se pide hallar: 1º) p(*A U B*) 2º) p(*A* Λ *B*)

Transformamos la fórmula teórica p(*AUB*) = p(*A*) + p(*B*) – p(*A* Λ *B*) en :
p(*A U B*) + p(*A* Λ *B*) = p(*A*) + p(*B*)

y si sustituimos los datos p(*A*) + p(*B*) = 3/5 + 2/5 tenemos : p(*A U B*) + p(*A* Λ *B*) = 1

De los datos obtenemos : p(*A U B*) – p(*A* Λ *B*) = 3 / 10

Podemos considerar que tenemos un sistema de ecuaciones en el que conoce-mos la unión y la intersección de las probabilidades que nos piden. Las soluciones son:

Sumando: $2\,p(A \cup B) = 1 + 3/10 = 13/10 \Rightarrow p(A \cup B) = 13/20 = 0{,}65$

Restando: $2\,p(A \wedge B) = 1 - 3/10 = 7/10 \Rightarrow p(A \wedge B) = 7/20 = 0{,}35$

$p(A \cup B) = 65/100$, $p(A \wedge B) = 35/100$

Sean A, B y C tres sucesos incompatibles, tales que p(*A*) = 1/2 , p(*B*) = 1/4 y p(*C*) = 4/25, se pide calcular la probabilidad de los sucesos siguientes :
1º) el suceso consistente en que no se dé el suceso A y no se dé el suceso B. 2º) el suceso consistente en que no se dé el suceso A y no se dé el suceso B y sí tenga lugar C

Llamamos $S = \{(A)^c \wedge (B)^c\}$ y $T = \{(A)^c \wedge (B)^c \wedge C\}$

Por Morgan $S = \{(A \cup B)^c\} \Rightarrow p(S) = p(A \cup B)^c = 1 - p(A \cup B)$

Como A y B incompatibles por enunciado $\Rightarrow p(A \cup B) = p(A) + p(B) \Rightarrow$

$p(S) = 1 - \{p(A) + p(B)\} = 1 - \{1/2 + 1/4\} = 1/4$

Por otro lado $T = \{(A \cup B)^c \wedge C\}$ o bien $T = \{(A)^c \wedge (B)^c \wedge C\}$

Pero $(B)^c \wedge C = C$ (Basta hacer un diagrama de Venn-Euler)

Por lo mismo, $T = \{(A)^c \wedge C\} \Rightarrow T = \{C\}$; $p(T) = p(C) = 4/25$

Sean A y B dos sucesos arbitrarios independientes cuyas probabilidades respectivas son P(A) y P(B). Se pide expresar en función de p(A) y de P(B), la probabilidad del suceso $(A^C \cap B^C) \cup (A^C \cap B^C)$

Como se puede ver, los dos sucesos que se tienen que unir son el mismo, luego la unión será el suceso $A^C \cap B^C$

$$P(A^C \cap B^C) \overset{(1)}{=\!=\!=} P[(A \cup B)^C] \overset{(2)}{=\!=\!=} 1 - P(A \cup B) \overset{(3)}{=\!=\!=}$$

$$1 - \{P(A) + P(B) - P(A \cap B)\} \overset{(4)}{=\!=\!=} 1 - \{P(A) + P(B) - P(A) \cdot P(B)\}$$

$$P(A^C \cap B^C) = 1 - P(A) - P(B) + P(A) \cdot P(B)$$

(1) Por una de las dos leyes de Morgan.
(2) Por la probabilidad de sucesos contrarios.

(3) Por la probabilidad de dos sucesos compatibles en los que existe intersección.
(4) Por ser A y B sucesos independientes.

Sean A y B dos sucesos con $P(A) = 0'3$, $P(B) = 0'7$ y $P(A \cap B) = O'1$. Se pide calcular las siguientes probabilidades: $P(A^C)$; $P(A^C \cap B^C)$ $P(A \cap B^C)$ y $P(A^C \cup B^C)$

a) $P(A^C) = 1 - P(A) = 1 - 0'3 = 0'7$

b) $P(A^C \cap B^C)$ = Leyes de Morgan = $P\{(A \cup B)^C\} = 1 – P(A \cup B)$

Para calcular $P(A \cup B)$ = por ser compatibles = $P(A) + P(B) - P(A \cap B) =$
$= 0'3 + 0'7 – 0'1 = 0'9$.

Con lo que $P(A^C \cap B^C) = 1 - O'9 = O'1$

c) $P(A \cap B^C) = P(A) - P(A \cap B) = 0'3 - O'1 = 0'2$

d) $P(A^C \cup B^C)$ = Leyes de Morgan = $P\{(A \cap B)^C\} = 1 - P(A \cap B) = 1 - 0,1 = 0'9$

Sean los sucesos A y B, donde conocemos las probabilidades $P(A)= \frac{2}{5}$, $P(B) = \frac{2}{5}$, $P(A \cup B) = \frac{3}{4}$. Determinar si son compatibles o incompatibles, dependientes e independientes.

Si la $P(A \cap B)=0$, los sucesos serán incompatibles como $P(A \cup B) = P(A)+ P(B)- P(A \cap B)$

$\rightarrow \frac{3}{4} = \frac{2}{5} + \frac{2}{5} – P(A \cap B) \quad \rightarrow \quad P(A \cap B) = \frac{4}{5} – \frac{3}{4} = \frac{1}{20} \neq 0$

Los sucesos serán por tanto compatibles.

Si $P(A \cup B) = P(A). P(B)$ los sucesos A y B serán independientes.

Como $P(A). P(B) = \frac{2}{5} . \frac{2}{5} = \frac{4}{25}$ y $P(A \cap B) = \frac{1}{20}$

Los sucesos serán por tanto dependientes.

Se considera el experimento de lanzar una moneda tres veces. Se pide: a) Construir el espacio muestral. b) Suponiendo que la moneda está cargada y que la probabilidad de que salga cara es de O'6, ¿cuáles son las probabilidades de los sucesos elementa-es?. c) ¿Cual es la probabilidad de que se obtenga al menos una cara?.

Al tirar la misma moneda tres veces consecutivas, la segunda tirada no dependerá de la primera, ni la tercera tirada dependerá de las dos primeras, luego los sucesos serán independientes.

E = { ccc, ccx, cxc, cxx, xcc, xcx, xxc, xxx }

P(c∩c∩c) = P(c).P(c).P(c) = 0´6 · 0´6 · 0´6 = 0'216

P(c∩c∩x) = P(x∩c∩c) = P(c∩x∩c) = 0'6 · 0'6 · 0'4 = 0'144

P(c∩x∩x) = P(x∩c∩x) = P(x∩x∩c) = O'6 · 0'4 · 0'4 = 0´096

P(x∩x∩x) = 0´4 · 0´4 · 0´4 = 0'064

c) P(al menos 1 cara) = 1 - P(ninguna cara) = 1 - P(x∩x∩x) = 0'936

Se considera el experimento consistente en lanzar una moneda equilibrada y un dado equilibrado. Se pide:

a) Describir el espacio muestral de este experimento.

b)* Determinar la probabilidad del suceso*: Obtener una cara en la moneda y un número par en el dado

1 moneda{C, X}
1 dado {1, 2, 3, 4, 5, 6}

a) E{ (C, 1) (C, 2) (C, 3) (C, 4) (C, 5) (C, 6) (X, 1) (X, 2) (X, 3) (X, 4) (X, 5) (X, 6) }

b) P(obtener una cara y un número par) = P(C ∩ par)

Por ser sucesos independientes P(C ∩ par) = P(C) · P(par) = ½ · 3/6 = ¼

Se extrae una carta al azar de una baraja de 40 cartas. Sea A el suceso de que la carta seleccionada sea as. Sea B el suceso de que la

carta seleccionada sea de oros. Calcular P(A), P(B), P(A ∩ B) ¿A y B son sucesos independientes?

A= (as) $P(A) = \dfrac{\text{Casos favorables}}{\text{Casos posibles}} = \dfrac{4}{40} = \dfrac{1}{10}$

B = (oros) $P(B) = \dfrac{\text{Casos favorables}}{\text{Casos posibles}} = \dfrac{10}{40} = \dfrac{1}{4}$

Al ser los sucesos A y B independientes por ser una sola extracción.

$P(A \cap B)= P(A) \cdot P(B)= \dfrac{1}{10} \cdot \dfrac{1}{4} = \dfrac{1}{40}$

Para comprobar la independencia, pesemos que el suceso as de oros es único, por lo que

$P(A \cap B) = \dfrac{\text{Casos favorables}}{\text{Casos posibles}} = \dfrac{1}{40}$

Se lanzan dos monedas al aire. Se pide:
1º) Espacio muestral
2º) Probabilidad de obtener dos caras, dos cruces o una cara y una cruz

El espacio muestral E = { (c,c) , (c,x) , (x,c) , (x,x) }

P(dos caras) = p (c,c) = 1 / 4 aplicando Laplace (casos favorables entre casos posibles)

P(dos cruces) = p (x,x) = 1 / 4

P(una cara y una cruz) = p(c,x) + p(x,c) = 1 / 4 + 1 / 4 = 1 / 2

Se lanzan dos dados. Calcúlese la probabilidad de cada uno de los siguientes sucesos: a) A = Se obtiene cinco en alguno de los dados. b)

B = Se obtiene un doble (los dados presentan la misma puntuación). c) A $\cap$ B

2 dados A = { 5 en algún de los dados}
B = {un doble }
C = { A $\cap$ B }

P (A) = casos favorables / casos posibles = 11/36 Hay 11 casos en que aparece el 5

P (B) = 6/36 = 1/6 Hay 6 dobles

P (C) = P (A $\cap$ B) = 1/36 Hay solo un doble (el 55) que contiene algún 5

Se lanzan tres monedas al aire. Se consideran los siguientes sucesos : *S*1 : obtener "al menos" una cara. *S*2 : obtener "exactamente" dos cruces. *S*3 : obtener dos o tres caras. *S*4 : obtener " a lo sumo " dos cruces. *S*5 : obtener tres cruces.
Se pide : 1º) Espacio muestral. 2º) Probabilidad de los cinco sucesos anteriores

1º) Espacio muestral

Conviene considerar el experimento como si lanzásemos las monedas de una en una, o bien una misma moneda que se lanza, se anota el resultado (C , cara o T, cruz) y se vueleve a tirar, etc.
Hacerlo así evita un error habitual : pensar que los sucesos posibles que son CCC, TTT, CCT y TTC, son equiprobables y no es así

Si hallamos el espacio muestral del experimento formulado como lanzamientos de una en una, podemos computar más fácilmente los diferentes sucesos porque los obtenemos de forma ordenada, aunque luego no nos importe el orden ya que en el experimento inicial se lanzan las tres monedas de forma simultánea

Una estrategia muy interesante es hacer un diagrama en árbol

$$\begin{cases} C \begin{cases} C \begin{cases} C & => \quad CCC \\ T & => \quad CCT \end{cases} \\ T \begin{cases} C & => \quad CTC \\ T & => \quad CTT \end{cases} \end{cases} \\ T \begin{cases} C \begin{cases} C & => \quad TCC \\ T & => \quad TCT \end{cases} \\ T \begin{cases} C & => \quad TTC \\ T & => \quad TTT \end{cases} \end{cases} \end{cases}$$

Aquí observamos que si influyese el orden y los lanzamientos fuesen de una en una, entonces cada una de esas ternas serían los sucesos del espacio muestral y serían los sucesos elementales del experimento, y serían "equiprobables" :

Por ejemplo, obtener CCC tiene una probabilidad de 1 / 8 , la misma que tiene CTT o TTC o TTT

Pero si volvemos al experimento del enunciado, el espacio muestral es :

E = {*CCC*, *CCT*, *CTT*, *TTT*} sin importar el orden: CTT = TCT = TTC : 1 cara y 2 cruces Es decir, el suceso " 1 cara y 2 cruces " podría parecer en 3 formas diferentes al hacer el lanzamiento una a una. Ello nos indica que este suceso es triplemente probable que el CCC que sólo parece una vez

Por tanto , p(*CCC*) = 1 / 8 , p(*CCT*) = 3 / 8 , p(*CTT*) = 3 / 8 , p(*TTT*) = 1 / 8

Se lanzan 2 dados equilibrados de seis caras tres veces consecutivas:
a) Calcular la probabilidad de que en los tres lanzamientos salga el seis doble.
b) Calcular la probabilidad de que en los 3 lanzamientos salga un doble distinto del seis doble.

Notamos por *A* el suceso “sacar el 6 doble” y por *B* “sacar un doble distinto del 6 doble”.

Si hacemos un cuadro de doble entrada que presente el espacio muestral del experimento “lanzar dos dados”:

[1,1] [1,2] [1,3] [1,4] [1,5] [1,6]
[2,1] [2,2] [2,3] [2,4] [2,5] [2,6]
[3,1] [3,2] [3,3] [3,4] [3,5] [3,6]
[4,1] [4,2] [4,3] [4,4] [4,5] [4,6]
[5,1] [5,2] [5,3] [5,4] [5,5] [5,6]
[6,1] [6,2] [6,3] [6,4] [6,5] [6,6]

$$p(A) = \frac{1}{36'}, \quad p(B) = \frac{5}{36}$$

$$p(A, A, A) = p(A^3) = p(A) \cdot p(A) \cdot p(A) = \left(\frac{1}{36}\right)^3$$

$$p(A^3) = \frac{1}{46656}, \qquad p(A^3) = 0{,}0000214$$

$$p(B, B, B) = p(B^3) = p(B) \cdot p(B) \cdot p(B) = \left(\frac{5}{36}\right)^3$$

Como $p(B) = 5\ p(A) \Rightarrow \quad p(B) = \frac{5}{46656} = 0{,}000107 \quad \Rightarrow p(B^3) = 125\ p(A^3) = 0.003$

"3 por mil"

Se lanzan 7 bolas en tres cajas A, B, C, de modo que cada bola tenga la misma probabilidad de caer en cualquier caja.
¿Cuál es la probabilidad de que A quede sin bola?
¿Cuál es la probabilidad de que alguna caja quede sin bola?
¿Cuál es la probabilidad de que todas las cajas tengan bola?

a) Sea α el suceso "la caja A queda sin bolas"
Sea ß el suceso "la caja B queda sin bolas"
Sea σ el suceso "la caja C queda sin bolas"

P (1 bola en A) = P (1 bola en B) = P (1 bola en C) = $\frac{1}{3}$

$$P(\alpha) = \left(1 - \frac{1}{3}\right)^7 = \left(\frac{2}{3}\right)^7$$

b) P (alguna caja sin bolas) = P (α U ß U σ) = P (α) + P (ß) + P (σ) – P (α ∩ ß) -

$- P(\alpha \cap \sigma) - P(ß \cap \sigma) + P(\alpha \cap ß \cap \sigma) = \left(\frac{2}{3}\right)^7 + \left(\frac{2}{3}\right)^7 +$
$\left(\frac{2}{3}\right)^7 - \left(\frac{1}{3}\right)^7 - \left(\frac{1}{3}\right)^7 - \left(\frac{1}{3}\right)^7 -$

$0 = 3 \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^7 - 3 \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^7 = 0{,}174$

c) P (ninguna vacía) = 1 - P (alguna vacía) = 1 - 0,174 = 0,826

Se tienen dos cajas. La caja 1 contiene 4 bolas blancas y 3 bolas negras. La caja 2 contiene 3 bolas blancas y 4 negras. Se selecciona una caja al azar y seguidamente se toma una bola de la caja seleccionada. Se pide:

a) Probabilidad de que la bola extraída sea blanca; b) Probabilidad de que la bola extraída sea negra ; c) Si se extrae una bola y resulta ser blanca, ¿cual es la probabilidad de que sea de la caja 1?

a) Se trata de un experimento aleatorio compuesto, formado por dos experimentos sucesivos.

Dibujemos el diagrama en árbol correspondiente

$$\begin{cases} \boldsymbol{A} \rightarrow \begin{cases} \boldsymbol{b} \\ \boldsymbol{n} \end{cases} \quad \mathrm{P}(\mathrm{A}) = \dfrac{1}{2} \quad \rightarrow \mathrm{P}(\mathrm{b}/\mathrm{A}) = \dfrac{4}{7}\ ;\ \ \mathrm{P}(\mathrm{n}/\mathrm{A}) = \dfrac{\mathbf{3}}{\mathbf{7}} \\ \boldsymbol{B} \rightarrow \begin{cases} \boldsymbol{b} \\ \boldsymbol{n} \end{cases} \quad \mathrm{P}(\mathrm{B}) = \dfrac{1}{2} \quad \rightarrow \mathrm{P}(\mathrm{b}/\mathrm{B}) = \dfrac{3}{7}\ ;\ \ \mathrm{P}(\mathrm{n}/\mathrm{B}) = \dfrac{\mathbf{4}}{\mathbf{7}} \end{cases}$$

$$\mathrm{P}(\mathrm{A} \cap \mathrm{b}) = \mathrm{P}(\mathrm{A}) \cdot \mathrm{P}(\mathrm{b}/\mathrm{A}) = \frac{1}{2} \cdot \frac{4}{7} = \frac{2}{7}$$

$$P(A \cap n) = P(A) \cdot P(n/A) = \frac{1}{2} \cdot \frac{3}{7} = \frac{3}{14}$$

$$P(B \cap b) = P(B) \cdot P((b/B)) = \frac{1}{2} \cdot \frac{3}{7} = \frac{3}{14}$$

$$P(B \cap n) = P(B) \cdot P(n/B) = \frac{1}{2} \cdot \frac{4}{7} = \frac{2}{7}$$

$$P(b) = P(A \cap b) + P(B \cap b) = \frac{2}{7} + \frac{3}{14} = \frac{4+3}{14} = \frac{7}{14} = \frac{1}{2}$$

b) Para calcular la P(n) podemos pensar que si sólo hay bolas blancas y negras en las dos cajas, la probabilidad de que sea negra la bola extraída será la contraria de que sea blanca, es decir:

$$P(n) = 1 - P(b) = 1 - \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$$

$$c)\ P(A/b) = \frac{\text{P(caminos favorables)}}{\text{Suma de P(caminos posibles)}} = \frac{P(A) \cdot P(b/A)}{P(b)} = \frac{\frac{1}{2} \cdot \frac{4}{7}}{\frac{1}{2}} = \frac{4}{7}$$

Se tienen dos urnas del mismo aspecto exterior. La primera contiene 6 bolas blancas y 8 bolas negras. La segunda, 4 bolas blancas y 3 negras. Una persona se aproxima al azar a una de las urnas y extrae una bola. ¿Cuál es la probabilidad de que sea blanca?

Llamemos B_1 = (que salga bola blanca en la 1ª urna)
B_2 = (que salga bola blanca en la 2ª urna)

$$P(B) = \frac{1}{2}\ P(B_1 \cup B_2) = \frac{1}{2}\ [\ P(B_1) + P(B_2)\ ] = \frac{1}{2}\ \left(\frac{6}{14} + \frac{4}{7}\right) =$$

$$= \frac{1}{2} \cdot \frac{6+8}{14} = \frac{1}{2} \cdot 1 = \frac{1}{2}$$

Multiplicamos por ½ la probabilidad de la unión, por que lo primero que hay que tener en cuenta es el elegir una de las urnas al azar entre las dos existentes.

Se tienen tres sucesos A, B, C de un experimento aleatorio, con

$P(A) = O'7$, $P(B) = O'6$, $P(C) = O'1$ y $P(A \cup B) = O'58$. Se pide: a) ¿Son independientes A y B?. b) ¿Cual es el valor máximo que puede tomar $P(A \cap C)$?. Si toma ese valor máximo, calcular $P(C^C/A^C)$.

a) Para ver si A y B son independientes hay que ver si $P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B)$

$$P(A \cap B) = 1 - P\{(A \cap B)^C\} \overset{(1)}{===} 1 - P(A^C \cup B^C) = 1 - 0'58 = 0'42$$

El paso (1) es por las leyes de Morgan.

$P(A) \cdot P(B) = O'7 \,.\, 0'6 = O'42$ Los sucesos A y B son independientes.

b) Para que el suceso $A \cap C$ sea máximo, será necesario que C que es mas pequeño que A según la probabilidad dada, este totalmente incluido en A.

$P(A \cap C) = P(C) = 0'1$

Si C esta incluido en A, podemos decir que AC esta incluido en CC

$$c)\ P(C^C/A^C) = \frac{P(C^C \cap A^C)}{P(A^C)} = \frac{P(A^C)}{P(A^C)} = 1$$

Se tiene una urna con 6 bolas blancas y 5 bolas negras, se realizan tres extracciones con reemplazamiento. ¿Cuál es la probabilidad de que apa-rezcan dos bolas blancas y una negra?. Probabilidad del mismo suceso, pero suponiendo que las tres extracciones se hacen sin reemplazamiento.

Con reemplazamiento, se supone que las tres extracciones son independientes, pues al ir devolviendo las bolas, la siguiente extracción no depende de lo que haya salido en la anterior.

$P(2b \text{ y } In) = P(b \cap b \cap n) + P(b \cap n \cap b) + P(n \cap b \cap b) = 3 \cdot P(b \cap b \cap n) =$

$$= 3.\ P(b).P(b).P(n) = 3 \cdot \frac{6}{11} \cdot \frac{6}{11} \cdot \frac{5}{11} = 0'4$$

Henos considerado primero las tres posibilidades según el orden de salida entre las blancas y la negra.

Después, como las tres probabilidades son iguales, calculo una de ellas.

Al ser los sucesos independientes, la probabilidad es el producto de las tres probabilidades de los sucesos elementales.

Para resolver el problema sin reemplazamiento, consideraremos que los sucesos son dependientes , por lo que existirá condicionamiento.

$P(2b \text{ y } ln) = P(b\cap b\cap n) + P(b\cap n\cap b) + P(n\cap b\cap b) = P(b) \cdot P(b/b) \cdot P(n/b\cap b) +$
$+ P(b) \cdot P(n/b) \cdot P(b/b\cap n) + P(n) \cdot P(b/n) \cdot P(b/n\cap b) =$

$$\frac{6}{11} \cdot \frac{5}{10} \cdot \frac{5}{9} + \frac{6}{11} \cdot \frac{5}{10} \cdot \frac{5}{9} + \frac{6}{11} \cdot \frac{5}{10} \cdot \frac{5}{9} = 3 \cdot \frac{6 \cdot 5 \cdot 5}{11 \cdot 10 \cdot 9} = \frac{5}{11}$$

Según cierto estudio, el 40% de los hogares europeos tiene contratado el acceso a Internet, el 33% tiene contratada la televisión por cable, y el 20% disponen de ambos servicios. Se selecciona un hogar europeo al azar.
(a) ¿Cuál es la probabilidad de que solo tenga contratada la televisión por cable?
(b)¿Cuál es la probabilidad de que no tenga contratado ninguno de los dos servicios? (PAU JUNIO 2007)

A=Internet $P(A) = 0,4$
B=T.V. $P(B) = 0,33$
C=ambos $P(A\cap B) = 0,2$

P (solo tenga TV) = $P(B\cap \mathbf{A}^C) = P(B) - P(A\cap B) = 0,33 - 0,2 = 0,13$

P (no tenga ninguno) = $P(\mathbf{A}^C \cap B^C) = P(A^C \cup B^C) = 1 - P(A \cup B) =$

$= 1- [P(A) - P(B) - P(A\cap B)] = 1- (0,4 + 0,33 - 0,2) = 1 - 0,53 = 0,47$

Siendo A y B dos sucesos incompatibles de un cierto espacio probabilistico y tales que P(A) = 1/5 y P(B) = 2/5. Hallar $P(A^C \cap B^C)$

Si A^C es el suceso contrario de A y B^C es el contrario de B, vamos a utilizar las propiedad de la probabilidad y del Algebra de Boole de los sucesos.

Según una de las leyes de Morgan $(A \cup B)^C = A^C \cap B^C$

$$P(A^C \cap B^C) = P\{ (A \cup B)^C \} \overset{(1)}{===} 1 - P(A \cup B) \overset{(2)}{===} 1 - \{ P(A) + P(B) \} =$$

$$= 1 - \{ \frac{1}{5} + \frac{2}{5} \} = 1 - \frac{3}{5} = \frac{2}{5}$$

(1) La $P(A^C) = 1 - P(A)$ (2) Por ser A y B incompatibles ya que su intersección es el vacío, podemos decir que la $P(A \cup B) = P(A) + P(B)$

Simultáneamente se sacan dos cartas de una baraja española y se tira un dado. ¿Cuál es la probabilidad de que las dos cartas sean sotas y que el número del dado sea par?

Sea A= (2 sotas) y B= (par)

$A \cap B$= (2 sotas y par) → $P(A \cap B) = P(A).\ P(B)$ ya que los sucesos son independientes.

$$P(A) = P(s) \cdot P(s/s) = \frac{4}{40} \cdot \frac{3}{39} = \frac{12}{1560} = \frac{1}{130}$$

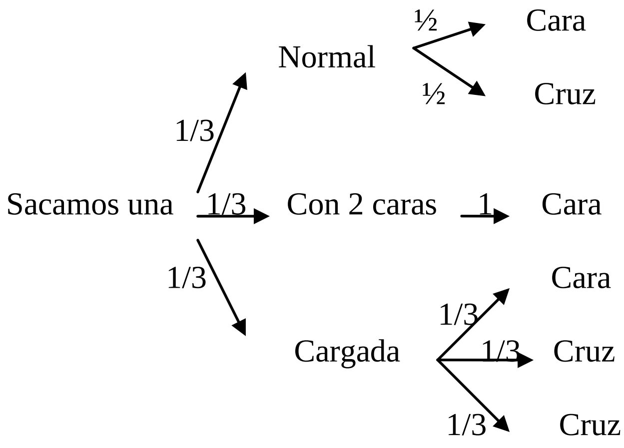
$$P(B) = \frac{casos\ favorables}{casos\ posibles} = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$$

$$P(A \cap B) = \frac{1}{130} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{260} = 0{,}003864$$

Una caja contiene tres monedas. Una moneda es corriente, otra tiene dos caras y la otra está cargada; de modo que la probabilidad de obtener cara es de 1/3. Se selecciona una al azar y se lanza al aire. Hallar la probabilidad de que salga cara.

3monedas [una normal] = A ; [con dos caras] = B ; [cargada] = D

Los sucesos A, B, y D, son incompatibles porque si sale una moneda no puede salir la otra.



P(C) = P(A) · P (C/A) + P(B) · P(C/B) + P(C) · P(C/D)

P(C) = [1/3 · ½] + [1/3 · 1] + [1/3 · 1/3] = 1/6 + 1/3 + 1/9 = **11/18**

Una caja contiene 4 bombillas, una de las cuales es defectuosa. a) Describir el espacio muestral del experimento que consiste en probar las bombillas hasta encontrar la defectuosa. b) Si las bombillas se eligen al azar, asignar probabalidades a los sucesos elementales del apartado a.

El espacio muestral estará formado por 4 sucesos, según donde aparezca la bombilla defectuosa.

E= { (1ªD), (1ªA y 2ªD), (1ªB, 2ªB y 3ªD), (1ªB, 2ªB, 3ªB y 4ªD) }

Para calcular las probabilidades de cada uno de los sucesos elementales

$P(D) = \frac{1}{4}$; $P(B \cap D) = P(B) \cdot P(D/B) = \frac{3}{4} \cdot \frac{1}{3} = \frac{1}{4}$

$P(B \cap B \cap D) = P(B) \cdot P(B/B) \cdot P(D/B\cap B) = \frac{3}{4} \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{4}$

$P(B \cap B \cap B \cap D) = P(B) \cdot .P(B/B) \cdot P(B/B\cap B) \cdot P(B/B\cap B\cap B) = \frac{3}{4} \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{2} \cdot 1 =$

1

$= \frac{\quad}{4}$

Una caja contiene 8 bolas rojas, 4 azules y 6 verdes. Se extraen tres bolas al azar, de una en una. Se pide :
1º) Espacio muestral
2º) Probabilidad de los sucesos elementales

		RRR			AAA			VVV
	RR	RRA		AA	AAR		VV	VVR
		RRV			AAV			VVA
		RAR			ARA			VRV
R	RA	RAA	A	AR	ARR	V	VR	VRR
		RAV			ARV			VRA
		RVR			AVA			VAV
	RV	RVA		AV	AVR		VA	VAR
		RVV			AVV			VAA

a) El espacio muestral esta formado por 27 sucesos elementales

b) p(las tres R) = 8/18 · 7/17 · 6/16 = 7 / 102 ;
p(2 R y 1 A) = 3 · 8/18 · 7/17 · 4/16 = 7 / 51;
p(2 R y 1 V) = 3 · 8/18 · 7/17 · 6/16 = 7 / 34;
p(1 R y 2 A) = 3 · 8/18 · 4/17 · 3/16 = 7 / 34;
p (1R,1A y 1V) = 6 · 8/18 · 4/17 · 6/16 = 4 / 17;
p(1R y 2 V) = 3 · 8/18 · 6/17 · 5 /17 = 5 / 34
p(las tres A) = 4/18 · 3/17 · 2/17 = 1 / 204;
p(2A y 1 V) = 3 · 4/18 · 3/18 · 6/16 = 3 / 68 ;
p(2 V y 1 A) = 3 · 6/18 · 5/17 · 4/16 = 5 / 68 ;
p(las tres V) = 6/18 · 5/17 · 4/16 = 5 / 204.

Hemos considerado que las extracciones se hacen sin reemplazamiento, es decir que los sucesos son dependientes,

Una caja con una docena de huevos contiene dos de ellos rotos. Se extraen al azar sin reemplazamiento (sin devolverlos después y de manera consecutiva) cuatro huevos.

a) Calcular la probabilidad de extraer los cuatro huevos en buen estado.

b) Calcular la probabilidad de extraer entre los cuatro, exactamente un huevo roto.

R
$R \rightarrow$
R^C
$R \rightarrow$
R
$R^C \rightarrow$
R^C
2/12: $R \rightarrow$
R
$R^C \rightarrow$
R^C
$R^C \rightarrow$
R
$R \rightarrow$
R^C

R
$R \rightarrow$
R^C
10/12: $R^C \rightarrow$
R
$R^C \rightarrow$ R
$R^C \rightarrow$
R^C

a) $P(R^C \cap R^C \cap R^C \cap R^C) = P(R^C) \cdot P(R^C / R^C) \cdot P(R^C / R^C \cap R^C) \cdot P(R^C / R^C \cap R^C \cap R^C)$

10 9 8 7 14
= --- · --- · --- · --- = ----

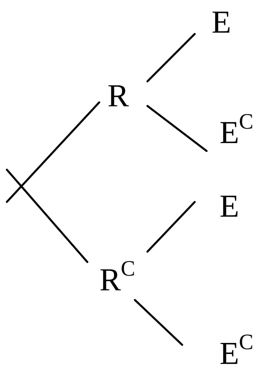
12 11 10 9 33

b) $P(R^C \cap R^C \cap R^C \cap R) + P(R^C \cap R^C \cap R \cap R^C) + P(R^C \cap R \cap R^C \cap R^C) +$

$+ \; P(R \cap R^C \cap R^C \cap R^C) =$

$$4 \cdot \left(\frac{10}{12} \cdot \frac{9}{11} \cdot \frac{8}{10} \cdot \frac{2}{9} \right) = 4 \cdot \frac{4}{33} = \frac{16}{33}$$

Una persona cuida de su jardín pero es bastante distraída y se olvida de regarlo a veces. La probabilidad de que se olvide de regar el jardín es 2/3. El jardín no está en buenas condiciones, así que si se le riega tiene la misma probabilidad de progresar que de estropearse, pero la probabilidad de que progrese si no se le riega es de 0,25. Si el jardín se ha estropeado, ¿Cuál es la probabilidad de que la persona olvidara regarlo?



$P(R^C) = 2/3$

$P(E^C/R^C) = 0,25$

$$P(R^C/E) = \frac{P(R^C) \cdot P(E/R^C)}{P(E)}$$

$P(E) = P(R) \cdot P(E/R) + P(R^C) \cdot P(B/R^C) = 1/3 \cdot 1/2 + 2/3 \cdot 3/4 = 1/6 + 3/6 = 4/6 = 2/3$

$P(R^C/E) = 3/6 \div 2/3 = 3/4$

Una urna contiene 7 bolas blancas, 3 bolas rojas y 2 bolas negras. Se considera el experimento aleatorio consistente en extraer tres bolas de la urna, de forma sucesiva y sin reemplazamiento. Sean los sucesos B_1: la primera bola es blanca, B_2: la segunda bola es blanca y B_3: la tercera bola es blanca. a) Exprésese con ellos el suceso : ***Las bolas extraídas en primer y tercer lugar son blancas, y la extraída en segundo lugar no*****. b) Calcúlese la probabilidad del suceso "*****Las tres bolas son del mismo color*****".**

7B
B
3R
2N

3 bolas sin reemplazamiento. $B_1 = \{ 1^a\ B \}$ $B_2 = \{ 2^a\ B \}$ $B_3 = \{ 3^a \}$

sin devolución.

a) $\boxed{B_1 \cap B_3 \cap \overline{B_2}}$

b) P (3 bolas del mismo color) = P $(B_1 \cap B_2 \cap B_3)$ + P $(R_1 \cap R_2 \cap R_3)$ +

P $(N_1 \cap N_2 \cap N_3)$ = P (B_1) . P $({}^{B_2}/_{B_1})$ ·P $({}^{B_3}/_{B_1 \cap B_2})$ +

P (R_1) · P $({}^{R_2}/_{R_1})$ · $({}^{R_3}/_{B_2 \cap R_2})$ + P (N_1) · P $({}^{N_2}/_{N_1})$ · P $({}^{N_3}/_{N_2})$

P (3 bolas del mismo color) = $\frac{7}{12} \cdot \frac{6}{11} \cdot \frac{5}{10} + \frac{3}{12} \cdot \frac{2}{11} \cdot \frac{1}{10} = \frac{210+6}{12\ .\ 11\ .\ 10} = \frac{216}{1320} =$
$\frac{108}{660} = \frac{54}{330} = \frac{27}{165} = \frac{9}{55}$

Una urna contiene 10 bolas blancas y 5 negras. Se extraen 2 bolas al azar sin reemplazamiento. ¿Cuál es la probabilidad de que sean del mismo color?

10 B y 5 N 2 bolas sin reemplazamiento = sucesos dependientes

$P (B \cap B) + P (N \cap N) = P (B)\, P (B/B) + P (N)\, P (N/N) =$

$$\frac{10}{15} \cdot \frac{9}{14} + \frac{5}{15} \cdot \frac{4}{14} = \frac{2}{3} \cdot \frac{9}{14} + \frac{1}{3} \cdot \frac{4}{14} = \frac{18+4}{42}$$

$$P \text{ (las 2 bolas del mismo color)} = \frac{22}{42} = \frac{11}{21}$$

Un dado con sus caras numeradas del 1 al 6 está "cargado" (preparado tramposamente) y sabemos que tiene la propiedad de que la probabilidad de obtener cada cara es proporcional a la mitad del número que le corresponde a esa cara. Hallar la probabilidad de obtener un número par

Si una cara tiene valor *k* puntos , el enunciado nos dice que
$p(c) = \lambda\, [\, \kappa / 2]$ donde λ es la constante de proporcionalidad citada y que hemos de hallar cuanto antes.

Como la suma de las probabilidades de todas las caras ha de sumar 1 :

$$\sum_{k=1}^{6} (1 / 2\, \lambda\, k) =1/2\, \lambda \cdot 1+ 1/2\, \lambda \cdot 2 + 1/2\, \lambda \cdot 3 + 1/2\, \lambda \cdot 4 + 1/2\, \lambda \cdot 5 + 1/2\, \lambda \cdot 6 = 21 / 2\, \lambda$$

$$21 / 2 \cdot \lambda = 1 \quad \Rightarrow \quad \lambda := 2 / 21$$

p(c 1) = 1 / 21 ; p(c2) = 2 / 21 ; p(c3) = 1 / 7 ; p(c4) = 4 / 21 ; p(c5) = 5 / 21 y p(c6) = 2 /7

Los sucesos que dan puntuación par son aquellos en que aparece la cara c_2, c_4 ó c_6 Por tanto , p(*par*) = 2 / 21 + 4 / 21 + 2 / 7 = 4 / 7

Esta probabilidad, en el caso de un dado correcto, habría sido 1 / 2 < 4 / 7

Un estudiante cuenta, para un examen, con la ayuda de un despertador, el cual consigue despertarlo en un 80% de los casos. Si oye el despertador, la probabilidad de que realice el examen es de 0,9 y en caso contrario, del 0,5. a) Si va a realizar el examen, ¿Cuál es la probabilidad de que haya oído el despertador? b) Si no realiza el examen, ¿Cuál es la probabilidad de que no haya oído el despertador?

A= (oye despertador) B= (realiza examen)

A^C = (no oye despertador) B^C = (no realiza examen)

$x \xrightarrow{0,8} A \xrightarrow{0,9} B$ → P(A ∩ B) = p (A) · p (B / A) = 0,8 · 0,9 = 0,72

$x \xrightarrow{0,8} A \xrightarrow{0,1} B^C$ → P (A ∩ B^C) = 0,8 · 0,1 = 0,08

$x \xrightarrow{0,2} A^C \xrightarrow{0,5} B$ → P(A^C ∩ B) = p (A^C) · p (B / A^C) = 0,2 · 0,5 = 0,10

$x \xrightarrow{0,2} A^C \xrightarrow{0,5} B^C$ → P(A^C ∩ B^C) = 0,2 · 0,5 = 0,10

P(haber hecho o ralizado examen) = P (B) = P(A ∩ B) + P(A^C ∩ B) = 0,82

Mientras que P(B^C) = P (A ∩ B^C) + P(A^C ∩ B^C) = 0,18 es la probabilidad de no realizar examen.

a) P(oir despertador / sabiendo que ha hecho el examen)

$$P\ (A / B) = \frac{P\ (A \cap B)}{P\ (B)} = \frac{0{,}72}{0{,}82} = 0{,}878$$

b) P(no oye despertador / sabiendo que no ha hecho examen)

$$P\ (A^C / B^C) = \frac{P\ (A^C\ \cap B^C)}{P\ (B^C)} = \frac{0{,}10}{0{,}18} = 0{,}556$$

Un experimento aleatorio consiste en extraer una bola de una urna que contiene una bola azul, dos blancas y tres rojas. Sea E el espacio muestral y P(*E*) el conjunto partes de E , formado por las partes o subconjuntos de E . Se define una función real *p* en P(*A*) de la siguiente manera : p(ϕ) = 0, p({*a* }) = 1/6, p({ *b* }) = 1/3, p({ *r* }) = 1/2, p({*a* ó *b* }) = 1/2, p({*a* ó *r* }) = 2/3, p({*b* ó *r* }) = 5/6, p({*a* ó *b* ó *r* }) = 1 , donde *a* representa el suceso "extraer bola azul" , *b* "extraer bola blanca" y *r* "extraer bola roja" , se pide : 1º) Espacio muestral. 2º) Conjunto de las partes de E. Estudiar si la función *p* cumple las condiciones de ser una probabilidad

El conjunto muestral es E = { *a*, *b*, *r* } : en el experimento podemos extraer bola azul o bola blanca o bola roja.

El conjunto P(E) = {ϕ, {*a* }, {*b* }, { *r* }, { *a*, *b* }, { *b*, *r* }, { *r*, *a* }, {*a*, *b*, *c*} = E}
Comprobamos que tiene 2^3 elementos : 8 subconjuntos formados con los "sucesos eleven-tales " { *a* }, {*b* } y { *r*}

Estudio-análisis de los axiomas de probabilidad

i) p {*a* } + p {*b* } + p { *c* } = 1/6 + 1/3 + 1/2 = 1 = p(E)

ii) Veamos si se cumple : p({*a* } *U* { *b* }) = p { *a* } + p { *b* }

Como { *a* } *U* { *b* } = { *a*, *b* } => p({*a* } *U* { *b* }) = 1 / 2 por definición de p, mientras
Que p({*a* }) + p({*b* }) = 1/6 + 1/3 = 1/2 luego se cumple

Veamos si se cumple p({*a* }) + p({*b*, *r* }) = 1

En efecto , { *a* } Λ { *b*, *r* } = ϕ y {*a* } *U* {*b*, *r*} = { *a*, *b*, *r* } = E

p {*a* } + p({*b*, *r* }) = p({ *a*, *b*, *r* }) = p(E) = 1 si se cumple

Análogamente en los casos semejantes

Conclusión : *p* es una probabilidad que mide la que tienen los elementos de P(E)
Se dice que (E, *p*) es un espacio probabilizable

Un sistema está formado por dos componentes A y B. El sistema funciona si lo hace alguna de sus componentes. La probabilidad de que funcione A es de 0’8, la probabilidad de que funcione E es de 0’7 y la probabilidad de que funcione uno y otro es de 0’6. ¿Cual es la probabilidad de que el sistema no funcione?.

Consideremos el conjunto F = A U E de que el sistema funcione. Nos piden que el sistema no funcione es decir $P(F^C) = 1 - P(F)$.

Ahora bien, corno los sucesos A y B son compatibles pues nos dicen que existe intersección, podemos decir que:

$P(F) = P(A \cup B) = P(A) + P(B) – P(A \cap B) = 0´8 + 0´7 - 0’6 = 0´9$

$P(F^C) = 1 - 0’9 =0’1$