EXAMEN DE MATEMÁTICAS APLICADAS I **Recuperación**

Temas 6, 7 y 8

1. (1 punto) Dadas $f(x)=x^2$ y $g(x)=\dfrac{1}{x+1}$, halla:

a) $f\left(g(2)\right)$ y $g\left(f(-1)\right)$.

b) El dominio de $f\left(g(x)\right)$.

2. (2 puntos) Cuando una persona se cambia de ciudad comienza un proceso paulatino de conocimiento de su nuevo hábitat. Supongamos que el porcentaje de ciudad (calles, edificios, comercios...) que va conociendo viene dado por el valor de la función $f(x)=\dfrac{100x}{x+50}$, donde x indica las semanas que lleva en la nueva ciudad.

a) ¿Qué porcentaje de ciudad conocerá al cabo de 4, 18, 52 semanas? (0,6 puntos)

b) ¿Cuántas semanas deben pasar para que conozca más del 80% de la ciudad? (0,8 puntos)

c) Representa los valores hallados (y algunos más) y haz una gráfica de $f(x)$. (0,6 puntos)

3. (2 puntos) Resuelve las siguientes ecuaciones:

a) (0,3 puntos) $8^{2x}=512$

b) (0,3 puntos) $\log_3 1420 = x$

c) (0,7 puntos) $\log\left(2x-8\right)+\log\left(x+1\right)=2$

d) (0,7 puntos) $9^x-8\cdot 3^{x+1}-81=0$

4. (2,5 puntos) De un fenómeno se tiene la información dada en la siguiente tabla:

Variable x	-1	1	2	3
Variable y	10	d	13	26

a) Calcula la función de (interpolación) de segundo grado asociada.

b) Calcula el valor que se debe asignar a d.

5. (1,5 puntos) Supongamos que un automóvil deprecia su valor en un 15 % anual.

a) Si nuevo costó 24.000 €, ¿cuánto valdrá a los 6 años?

b) ¿Cuántos años deben pasar para que su valor sea inferior a 6.000 euros?

6. (1 punto) Una empresa puede vender cierto producto a 9 € la unidad. Los costes de funcionamiento de la empresa son de 3640 € y el coste de producción por unidad de producto es de 3,40 €.

a) Determina las funciones de costes y de ingresos.

b) ¿Cuántas piezas deben producirse y venderse para que los costes se igualen a los ingresos?

7. (1 punto) Calcula el capital acumulado al cabo de 8 años para 10000 euros al 5 %, si los intereses se abonan:

a) Anualmente.

b) Mensualmente.

Alcalá de Henares, 26 de febrero de 2015.

JoséMMM

Soluciones:

1. (1 punto) Dadas $f(x)=x^2$ y $g(x)=\dfrac{1}{x+1}$, halla:

a) $f\left(g(2)\right)$ y $g\left(f(-1)\right)$.

b) El dominio de $f\left(g(x)\right)$.

Solución:

a) $f\left(g(2)\right)=f\left(\dfrac{1}{3}\right)=\dfrac{1}{9}$. $\qquad g\left(f(-1)\right)=g(1)=\dfrac{1}{2}$.

b) $f\left(g(x)\right)=f\left(\dfrac{1}{x+1}\right)=\dfrac{1}{\left(x+1\right)^2}$ $\Rightarrow$ Su dominio es **R** – {–1}.

2. (2 puntos) Cuando una persona se cambia de ciudad comienza un proceso paulatino de conocimiento de su nuevo hábitat. Supongamos que el porcentaje de ciudad (calles, edificios, comercios...) que va conociendo viene dado por el valor de la función $f(x)=\dfrac{100x}{x+50}$, donde x indica las semanas que lleva en la nueva ciudad.

a) ¿Qué porcentaje de ciudad conocerá al cabo de 4, 18, 52 semanas? (0,6 puntos)

b) ¿Cuántas semanas deben pasar para que conozca más del 80% de la ciudad? (0,8 puntos)

c) Representa los valores hallados (y algunos más) y haz una gráfica de $f(x)$. (0,6 puntos)

Solución:

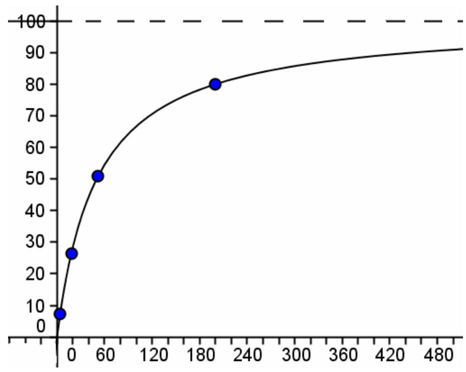
a) $f(4)=\dfrac{100\cdot 4}{4+50}\approx 7,41\%$; $f(18)=\dfrac{100\cdot 18}{18+50}\approx 26,47\%$ $f(52)=\dfrac{100\cdot 52}{52+50}\approx 50,98\%$

b) $\dfrac{100x}{x+50}\geq 80 \Rightarrow$

$\Rightarrow 100x\geq 80x+4000 \Rightarrow 20x\geq 4000 \Rightarrow x\geq 200$.

Deben transcurrir 200 semanas.

c) La gráfica es la adjunta.



3. (2 puntos) Resuelve las siguientes ecuaciones:

a) (0,3 puntos) $8^{2x}=512$ $\qquad$ b) (0,3 puntos) $\log_3 1420 = x$

c) (0,7 puntos) $\log\left(2x-8\right)+\log\left(x+1\right)=2$ $\qquad$ d) (0,7 puntos) $9^x-8\cdot 3^{x+1}-81=0$

Solución:

a) $8^{2x}=512 \Rightarrow \left(2^3\right)^{2x}=2^9 \Rightarrow 2^{6x}=2^9 \Rightarrow 6x=9 \Rightarrow x=\dfrac{3}{2}$.

De otra manera (aplicando logaritmos):

$8^{2x}=512 \Rightarrow \log\left(8^{2x}\right)=\log 512 \Rightarrow 2x\log 8=\log 512 \Rightarrow x=\dfrac{\log 512}{2\log 8}=1,5$

b) $\log_3 1420 = x \Rightarrow 3^x = 1420 \Rightarrow \log 3^x = \log 1420 \Rightarrow x\log 3=\log 1420 \Rightarrow$

$\Rightarrow \ x = \dfrac{\log 1420}{\log 3} = 6{,}60689$.

Si se conoce la fórmula de cambio de base la respuesta es inmediata: $\log_a b = \dfrac{\log b}{\log a}$

c) $\log(2x-8) + \log(x+1) = 2 \ \Rightarrow \ \log\left[(2x-8)(x+1)\right] = \log 100 \Rightarrow (2x-8)(x+1) = 100 \ \Rightarrow$

$$\Rightarrow \ 2x^2 - 6x - 108 = 0 \Rightarrow x = \frac{6 \pm \sqrt{6^2 - 4\cdot 2\cdot(-108)}}{2\cdot 2} = \frac{6 \pm 30}{4} = \begin{cases} 9 \\ -6 \end{cases}$$

(La solución x = –6 no es válida).

d) $9^x - 8\cdot 3^{x+1} - 81 = 0 \ \Rightarrow \ \left(3^2\right)^x - 8\cdot 3\cdot 3^x - 81 = 0 \ \Rightarrow \ \left(3^x\right)^2 - 24\cdot 3^x - 81 = 0 \ \Rightarrow \ \left(3^x = t\right) \ \Rightarrow$

$$\Rightarrow \ t^2 - 24t - 81 = 0 \Rightarrow t = \frac{24 \pm \sqrt{24^2 - 4\cdot(-81)}}{2} = \frac{24 \pm 30}{2} = \begin{cases} 27 \\ -3 \end{cases}$$

Si $t = 27 \Rightarrow 3^x = 27 \Rightarrow x = 3$.
Si $t = -3 \Rightarrow 3^x = -3$, que no puede ser.

4. (2,5 puntos) De un fenómeno se tiene la información dada en la siguiente tabla:

Variable x	–1	1	2	3
Variable y	10	d	13	26

a) Calcula la función de (interpolación) de segundo grado asociada.
b) Calcula el valor que se debe asignar a *d*.
Solución:
a) La función de interpolación es de la forma $f(x) = ax^2 + bx + c$
Por pasar por (–1, 10), $f(-1) = 10 \ \Rightarrow 10 = a - b + c$
Por pasar por (2, 13), $f(2) = 13 \ \Rightarrow 13 = 4a + 2b + c$
Por pasar por (3, 26), $f(3) = 26 \ \Rightarrow 26 = 9a + 3b + c$
Sistema que puede resolverse por el método de Gauss:

$$\begin{cases} 10 = a - b + c \\ 13 = 4a + 2b + c \\ 26 = 9a + 3b + c \end{cases} \Rightarrow \begin{matrix} \\ E2 - E1 \\ E3 - E1 \end{matrix} \begin{cases} 10 = a - b + c \\ 3 = 3a + 3b \\ 16 = 8a + 4b \end{cases} \Rightarrow \begin{matrix} \\ \\ 3E3 - 4E2 \end{matrix} \begin{cases} 10 = a - b + c \\ 3 = 3a + 3b \\ 36 = 12a \end{cases} \Rightarrow$$

Resolviendo el sistema se tiene: $a = 3$, $b = -2$, $b = 5$.
La función de interpolación será: $f(x) = 3x^2 - 2x + 5$
b) Para $x = 1$ se tiene que $f(1) = 3\cdot 1^2 - 2\cdot 1 + 5 = 6 \Rightarrow d = 6$.

5. (1,5 puntos) Supongamos que un automóvil deprecia su valor en un 15 % anual.
c) Si nuevo costó 24.000 €, ¿cuánto valdrá a los 6 años?
d) ¿Cuántos años deben pasar para que su valor sea inferior a 6.000 euros?
Solución:
a) Su valor debe multiplicarse anualmente por 1 – 0,15.
Por tanto, la función que determina su precio en función de los años, *t*, transcurridos desde su compra será: $P(t) = 24000\cdot(1 - 0{,}15)^t$.

Para $t = 6$: $P(6) = 24000 \cdot (1-0,15)^6 = 9051,59$ euros.

b) Para P = 6.000 euros:

$$6000 = 24000 \cdot (1-0,15)^t \Rightarrow 0,25 = 0,85^t \Rightarrow t = \frac{\log 0,25}{\log 0,85} \approx 8,53 \text{ años.}$$

Deben pasar algo más de 8,5 años.

6. (1 punto) Una empresa puede vender cierto producto a 9 € la unidad. Los costes de funcionamiento de la empresa son de 3640 € y el coste de producción por unidad de producto es de 3,40 €.

a) Determina las funciones de costes y de ingresos.

b) ¿Cuántas piezas deben producirse y venderse para que los costes se igualen a los ingresos?

Solución:

a) Gastos por la producción de x unidades de producto: $G(x) = 3640 + 3,40x$

Ingresos por la venta de x unidades de producto: $I(x) = 9x$.

b) $G(x) = I(x) \Rightarrow 3640 + 3,40x = 9x \Rightarrow 5,6x = 3640 \Rightarrow x = 650$.

Debe producir 650 unidades.

7. (1 punto) Calcula el capital acumulado al cabo de 8 años para 10000 euros al 5 %, si los intereses se abonan:

a) Anualmente.

b) Mensualmente.

Solución:

La expresión que da el capital acumulado es $C = C_0\left(1+\frac{r}{n}\right)^{nt}$, siendo r la tasa de interés, t el tiempo en años y n el número de periodos anuales.

En este caso, C_0 = 10000 €, el 5 % es una tasa de r = 0,05 y t = 8.

a) Si el interés se abona anualmente:

$$C = 10000 \cdot (1+0,05)^8 = 14774,55 \text{ €}$$

b) Mensualmente (n = 12): $C = 10000 \cdot \left(1+\frac{0,05}{12}\right)^{12\cdot 8} = 14905,85$ €

Alcalá de Henares, 26 de febrero de 2015.

JoséMMM