

EXAMEN DE MATEMÁTICAS APLICADAS I

Temas 6, 7 y 8

1. (2 puntos) Dadas las funciones:

$$f(x) = -x^2; \quad g(x) = \sqrt{3+x}; \quad h(x) = \frac{3}{x^2 - 2x}; \quad j(x) = \frac{-4}{x^2 + 2}$$

a) Determina el dominio de cada una de ellas.

b) Explica porqué el recorrido de f , g y j es el que se indica:

$$\text{Im}(f) = (-\infty, 0]; \quad \text{Im}(g) = [0, +\infty); \quad \text{Im}(j) = [-2, 0).$$

2. (1 punto) Para las funciones: $f(x) = -x^2$; $g(x) = \sqrt{3+x}$; $h(x) = \frac{3}{x^2 - 2x}$

a) Halla $g(6)$ y $f(g(6))$. Determina la expresión de $f(g(x))$.

b) Explica porqué $-1 \notin \text{Im}(h)$. Esto es, no existe ningún valor de x tal que $h(x) = -1$.

3. (1,5 puntos) Supongamos que el impuesto sobre bienes inmuebles (IBI) de una ciudad se basa en el valor catastral de la vivienda y en la distancia de ésta al centro de la ciudad. Una casa en el centro paga 10 € al año por cada 6000 € de valor catastral, y una que se encuentra a 2 km del centro paga 7 € por cada 6000 de valor catastral.

Determina mediante la función de interpolación lineal cuánto ha de pagar al año una vivienda de 240000 € de valor catastral y que está a 0,75 km del centro de la ciudad.

4. (1,5 puntos) Las funciones de oferta y demanda de un producto son: $q_s = -5 + 2p$ y

$q_d = 210 - 0,4p^2$, donde p viene dado en euros y q en miles de unidades. Halla:

a) Las cantidades de oferta y demanda a un precio de 8 euros.

b) El precio y la cantidad de equilibrio para ese producto.

5. Resuelve las siguientes ecuaciones:

a) $3^{2x} = 81$ (0,3 puntos)

b) $\ln x = 3$ (0,2 puntos)

c) $18,3 = 2,8^{2x}$ (0,4 puntos)

d) $2^x + 2^{x+1} + 2^{x+2} = 244$ (0,6 puntos)

6. (1 punto) Resuelve la ecuación: $\log(x+6) - 2 \cdot \log(x-3) = 1$.

7. Calcula el capital acumulado por 2000 euros durante 5 años a una tasa anual del 6% a interés compuesto:

a) Anual (0,3 puntos)

b) Trimestral (0,3 puntos)

c) Mensual (0,4 puntos)

8. (1 punto) La población de una determinada región crece anualmente a un ritmo del 2%. Si actualmente tiene 500000 habitantes, ¿cuántos años han de pasar para que llegue a tener 1 millón?

Alcalá de Henares, 5 de febrero de 2015.

JoséMMM

Soluciones

1. (2 puntos) Dadas las funciones:

$$f(x) = -x^2; \quad g(x) = \sqrt{3+x}; \quad h(x) = \frac{3}{x^2 - 2x}; \quad j(x) = \frac{-4}{x^2 + 2}$$

a) Determina el dominio de cada una de ellas.

b) Explica porqué el recorrido de f , g y j es el que se indica:

$$\text{Im}(f) = (-\infty, 0]; \quad \text{Im}(g) = [0, +\infty); \quad \text{Im}(j) = [-2, 0).$$

Solución:

→ $f(x) = -x^2$ está definida para cualquier valor de $x \in \mathbf{R} \Rightarrow \text{Dom}(f) = \mathbf{R}$.

La función nunca toma valores positivos $\Rightarrow \text{Im}(f) = (-\infty, 0] \rightarrow \{x \in \mathbf{R}, x \leq 0\}$

→ $g(x) = \sqrt{3+x}$ está definida siempre que $3+x \geq 0 \Rightarrow x \geq -3$. $\text{Dom}(g) = [-3, +\infty)$.

Para que g sea función solamente se tomará un valor de la raíz; en este caso, el positivo. Por tanto: $\text{Im}(g) = [0, +\infty)$.

→ $h(x) = \frac{3}{x^2 - 2x}$ está definida siempre que $x^2 - 2x \neq 0 \Rightarrow \text{Dom}(h) = \mathbf{R} - \{0, 2\}$.

Su recorrido, aunque no se pide ni yo justifico aquí es $\text{Im}(h) = (-\infty, +\infty) - (-3, 0]$.

→ $j(x) = \frac{-4}{x^2 + 2}$ está definida para cualquier valor de $x \in \mathbf{R}$, pues el denominador nunca se

anula $\Rightarrow \text{Dom}(j) = \mathbf{R}$.

Como el denominador siempre es mayor o igual que 2, el valor de j siempre será menor o igual que $-4/2 = -2 \Rightarrow \text{Im}(j) = [-2, 0)$.

2. (1 punto) Para las funciones: $f(x) = -x^2$; $g(x) = \sqrt{3+x}$; $h(x) = \frac{3}{x^2 - 2x}$

a) Halla $g(6)$ y $f(g(6))$. Determina la expresión de $f(g(x))$.

b) Explica porqué $-1 \notin \text{Im}(h)$. Esto es, no existe ningún valor de x tal que $h(x) = -1$.

Solución:

a) $g(6) = \sqrt{3+6} = \sqrt{9} = 3$; $f(g(6)) = f(3) = -3^2 = -9$.

$$f(g(x)) = -(g(x))^2 = -(\sqrt{3+x})^2 = -(3+x).$$

b) Si $h(x) = \frac{3}{x^2 - 2x} = -1 \Rightarrow 3 = -x^2 + 2x \Rightarrow x^2 - 2x + 3 = 0 \Rightarrow x = \frac{2 \pm \sqrt{4-12}}{2}$, lo que no puede ser.

3. (1,5 puntos) Supongamos que el impuesto sobre bienes inmuebles (IBI) de una ciudad se basa en el valor catastral de la vivienda y en la distancia de ésta al centro de la ciudad. Una casa en el centro paga 10 € al año por cada 6000 € de valor catastral, y una que se encuentra a 2 km del centro paga 7 € por cada 6000 de valor catastral.

Determina mediante la función de interpolación lineal cuánto ha de pagar al año una vivienda de 240000 € de valor catastral y que está a 0,75 km del centro de la ciudad

Solución:

Datos:

Distancia (km)	0	0,75	2
Coste en €(por 6000 €)	10	I	7

Función lineal (la de interpolación): $f(x) = ax + b$

Pasa por (0, 10) $\Rightarrow 10 = b$

Pasa por (2, 7) $\Rightarrow 7 = 2a + b \Rightarrow a = -1,5$

Luego, $f(x) = -1,5x + 10$.

Si $x = 0,75 \Rightarrow f(0,75) = -1,5 \cdot 0,75 + 10 = 8,875$ (€por cada 6000).

Para 240000 € de valor catastral, se ha de pagar $8,875 \cdot 240000 : 6000 = 355$ €

El IBI correspondiente será $I = 355$ euros.

4. (1,5 puntos) Las funciones de oferta y demanda de un producto son: $q_s = -5 + 2p$ y

$q_d = 210 - 0,4p^2$, donde p viene dado en euros y q en miles de unidades. Halla:

a) Las cantidades de oferta y demanda a un precio de 8 euros.

b) El precio y la cantidad de equilibrio para ese producto.

Solución:

a) Si $p = 8 \Rightarrow q_s = 11 \Rightarrow$ Oferta: 11.000 unidades.

Si $p = 8 \Rightarrow q_d = 184,4 \Rightarrow$ Demanda: 184.400 unidades.

b) $q_s = q_d \Rightarrow -5 + 2p = 210 - 0,4p^2 \Rightarrow 0,4p^2 + 2p - 215 = 0 \Rightarrow$

$$\Rightarrow p = \frac{-2 \pm \sqrt{4 - 4 \cdot 0,4 \cdot (-215)}}{2 \cdot 0,4} = \begin{cases} 20,818 \\ -25,818 \end{cases} \rightarrow (\text{El valor } p = -25,818 \text{ no es posible})$$

Precio de equilibrio es $p = 20,818$ euros. (Puede tomarse $p = 20,82$ €)

La cantidad de equilibrio es $q_s(20,818) = -5 + 2 \cdot 20,818 = 36,636 \rightarrow 36636$ unidades.

(Si la cantidad de equilibrio se halla a partir de $q_d = 210 - 0,4p^2$, se obtiene 36644 unidades; obviamente el desajuste se produce por el redondeo).

5. Resuelve las siguientes ecuaciones:

a) $3^{2x} = 81$ (0,3 puntos) b) $\ln x = 3$ (0,2 puntos)

c) $18,3 = 2,8^{2x}$ (0,4 puntos) d) $2^x + 2^{x+1} + 2^{x+2} = 244$ (0,6 puntos)

Solución:

a) $3^{2x} = 81 \Rightarrow 3^{2x} = 3^4 \Rightarrow 2x = 4 \Rightarrow x = 2$.

b) $\ln x = 3 \Rightarrow x = e^3$.

c) $\log 18,3 = \log 2,8^{2x} \Rightarrow \log 18,3 = 2x \cdot \log 2,8 \Rightarrow x = \frac{\log 18,3}{2 \log 2,8} = 1,4116$

d) $2^x + 2^{x+1} + 2^{x+2} = 244 \Rightarrow 2^x \cdot 1 + 2^x \cdot 2 + 2^x \cdot 2^2 = 244 \Rightarrow$
 $\Rightarrow 2^x (1 + 2 + 4) = 244 \Rightarrow 2^x = \frac{244}{7} \Rightarrow 2^x = 34,86 \Rightarrow x \log 2 = \log 34,86 \Rightarrow x = 5,12$

6. (1 punto) Resuelve la ecuación: $\log(x+6) - 2 \cdot \log(x-3) = 1$.

Solución:

$$\log(x+6) - 2 \cdot \log(x-3) = 1 \Rightarrow \log(x+6) - \log(x-3)^2 = \log 10 \Rightarrow \log \frac{x+6}{(x-3)^2} = \log 10 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{x+6}{(x-3)^2} = 10 \Rightarrow 10x^2 - 61x + 84 = 0 \Rightarrow x = 4 \text{ y } x = 2,1$$

Sólo vale la solución $x = 4$, pues si sustituimos $x = 2,1$ en la ecuación, observamos que en el segundo logaritmo del enunciado quedaría $\log(2,1 - 3) = \log(-0,9)$, que no tiene sentido.

7. Calcula el capital acumulado por 2000 euros durante 5 años a una tasa anual del 6% a interés compuesto:

b) Anual (0,3 puntos) b) Trimestral (0,3 puntos) c) Mensual (0,4 puntos)

Solución:

a) $C = 2000 \cdot (1 + 0,06)^5 = 2000 \cdot 1,06^5 = 2676,45$ euros.

b) $C = 2000 \cdot \left(1 + \frac{0,06}{4}\right)^{4 \cdot 5} = 2000 \cdot 1,015^{20} = 2693,71$ euros

c) $C = 2000 \cdot \left(1 + \frac{0,06}{12}\right)^{12 \cdot 5} = 2000 \cdot 1,005^{60} = 2697,70$ euros

8. (1 punto) La población de una determinada región crece anualmente a un ritmo del 2%. Si actualmente tiene 500000 habitantes, ¿cuántos años han de pasar para que llegue a tener 1 millón?

Solución:

$$1000000 = 500000 \cdot (1,02)^t \Rightarrow 2 = (1,02)^t \Rightarrow \log 2 = t \log 1,02 \Rightarrow t = 35$$

Alcalá de Henares, 5 de febrero de 2015.

JoséMMM