

EXAMEN DE MATEMÁTICAS APLICADAS I

Primera evaluación

1. (1 punto) Calcula y simplifica: $\frac{2}{5}(5x^2 - 3x)^2 + 4x^2\left(\frac{1}{6}x^2 - \frac{2}{3}x + \frac{7}{10}\right)$.

2. (0,7 puntos) Expresa en notación de intervalos y representa gráficamente el conjunto de números reales que verifican la inecuación $1 < \sqrt{x-2} < 3$.

3. Calcula, agrupando y simplificando:

a) (0,6 puntos) $\left(5\sqrt{2} - 2\sqrt{8}\right) - \left(\frac{3}{5}\sqrt{2} + \sqrt{32}\right)$. b) (0,4 puntos) $\frac{1-\sqrt{3}}{\sqrt{12}+2}$.

4. a) (0,8 punto) Factoriza el polinomio $P(x) = x^3 - 3x^2 - 4x + 12$

b) (0,5 punto) Opera y simplifica el resultado: $\frac{5x-2}{x^2-1} - \frac{3-2x}{x+1}$.

5. (1 punto) Resuelve el sistema $\begin{cases} x^2 - 2x - y = 0 \\ (x+1)^2 + y = 3 \end{cases}$.

6. (0,7 puntos) Resuelve la inecuación: $(x-1)^2 - 2x - 1 \geq 0$. (0,3 puntos) Representa gráficamente los intervalos solución.

7. (1 punto) Representa gráficamente el conjunto de soluciones correspondiente al sistema:

$$\begin{cases} 2x + 5y \geq 20 \\ 4x - 10y \geq 0 \end{cases}$$

Indica el vértice de la región de soluciones.

8. (1 punto) Resuelve las siguientes ecuaciones:

a) $\log \frac{1}{x} = -3$ (0,4 puntos) b) $2^x + 2^{x+1} + 2^{x+3} = 88$ (0,7 puntos)

9. (1 punto) En los primeros días del verano una determinada especie de mosquitos crece diariamente a un ritmo del 30%. Si el primer día había 2000 mosquitos, ¿cuántos días han de pasar para que lleguen a 1 millón?

10. (1 punto) Una familia suscribe un préstamo hipotecario de 150000 euros. El banco les ofrece dicha cantidad a un 4,5% anual por un período de 15 años. ¿Cuánto deberán amortizar mensualmente?

Dato: La fórmula que da la amortización mensual es $a = \frac{D(1+r)^n \cdot r}{(1+r)^n - 1}$

Alcalá de Henares, 15 de diciembre de 2015. JoséMMM

SOLUCIONES

1. (1 punto) Calcula y simplifica: $\frac{2}{5}(5x^2 - 3x)^2 + 4x^2\left(\frac{1}{6}x^2 - \frac{2}{3}x + \frac{7}{10}\right)$.

Solución:

$$\begin{aligned} \frac{2}{5}(5x^2 - 3x)^2 + 4x^2\left(\frac{1}{6}x^2 - \frac{2}{3}x + \frac{7}{10}\right) &= \frac{2}{5}(25x^4 - 30x^3 + 9x^2) + \frac{4}{6}x^4 - \frac{8}{3}x^3 + \frac{28}{10}x^2 = \\ &= 10x^4 - 12x^3 + \frac{18}{5}x^2 + \frac{2}{3}x^4 - \frac{8}{3}x^3 + \frac{14}{5}x^2 = \frac{32}{3}x^4 - \frac{44}{3}x^3 + \frac{32}{5}x^2 \end{aligned}$$

2. (0,7 puntos) Expresa en notación de intervalos y representa gráficamente el conjunto de números reales que verifican la inecuación $1 < \sqrt{x-2} < 3$.

Solución:

$$1 < \sqrt{x-2} < 3 \Rightarrow 1 < x-2 < 9 \Rightarrow 3 < x < 11 \rightarrow x \in (3, 11)$$



3. Calcula, agrupando y simplificando:

a) (0,6 puntos) $(5\sqrt{2} - 2\sqrt{8}) - \left(\frac{3}{5}\sqrt{2} + \sqrt{32}\right)$. b) (0,4 puntos) $\frac{1-\sqrt{3}}{\sqrt{12}+2}$.

Solución:

a) $(5\sqrt{2} - 2\sqrt{8}) - \left(\frac{3}{5}\sqrt{2} + \sqrt{32}\right) = 5\sqrt{2} - 2 \cdot 2\sqrt{2} - \frac{3}{5}\sqrt{2} - 4\sqrt{2} = \left(5 - 4 - \frac{3}{5} - 4\right)\sqrt{2} = -\frac{18}{5}\sqrt{2}$.

b) $\frac{1-\sqrt{3}}{\sqrt{12}+2} = \frac{(1-\sqrt{3})(\sqrt{12}-2)}{(\sqrt{12}+2)(\sqrt{12}-2)} = \frac{\sqrt{12}-2-2\sqrt{3}+2\sqrt{6}}{12-4} = \frac{2\sqrt{3}-2-6+2\sqrt{3}}{8} = \frac{4\sqrt{3}-8}{8}$.

4. a) (0,8 punto) Factoriza el polinomio $P(x) = x^3 - 3x^2 - 4x + 12$

b) (0,5 punto) Opera y simplifica el resultado: $\frac{5x-2}{x^2-1} - \frac{3-2x}{x+1}$.

Solución:

a) $P(x) = x^3 - 3x^2 - 4x + 12 \rightarrow$ Posibles raíces: $\pm 1, \pm 2, \pm 3, \pm 6, \pm 12$.

$$P(1) = 1 - 3 - 4 + 12 = 6 \Rightarrow x = 1 \text{ no es raíz.}$$

$$P(2) = 8 - 12 - 8 + 12 = 0 \Rightarrow x = 2 \text{ es raíz} \Rightarrow x - 2 \text{ es un factor. Se divide por } x - 2:$$

2	1	-3	-4	12
		2	-2	-12
	1	-1	-6	0

Por tanto: $P(x) = x^3 - 3x^2 - 4x + 12 = (x-2)(x^2 - x - 6) = (x-2)(x+2)(x-3)$

El trinomio $x^2 - x - 6 = 0 \Rightarrow x = \frac{1 \pm \sqrt{1 - 4(-6)}}{2} = \begin{cases} 3 \\ -2 \end{cases} \Rightarrow x^2 - x - 6 = (x+2)(x-3)$.

b) $\frac{5x-2}{x^2-1} - \frac{3-2x}{x+1} = \frac{5x-2}{x^2-1} - \frac{(3-2x)(x-1)}{(x+1)(x-1)} = \frac{5x-2}{x^2-1} - \frac{3x-3-2x^2+2x}{x^2-1} = \frac{2x^2+1}{x^2-1}$.

5. (1 punto) Resuelve el sistema $\begin{cases} x^2 - 2x - y = 0 \\ (x+1)^2 + y = 3 \end{cases}$.

Solución:

$$\begin{cases} x^2 - 2x - y = 0 \\ (x+1)^2 + y = 3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x^2 - 2x = y \\ (x+1)^2 + y = 3 \end{cases} \Rightarrow (x+1)^2 + x^2 - 2x = 3 \Rightarrow 2x^2 - 1 = 3 \Rightarrow x^2 = 1 \Rightarrow x = \pm 1.$$

Si $x = -1$, $y = 1 + 2 = 3$. Solución: punto $(-1, 3)$.

Si $x = 1$, $y = 1 - 2 = -1$. Solución: punto $(1, -1)$.

6. (0,7 puntos) Resuelve la inecuación: $(x-1)^2 - 2x - 1 \geq 0$. (0,3 puntos) Representa gráficamente los intervalos solución.

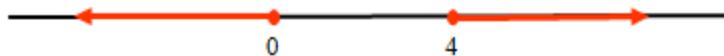
Solución:

$$(x-1)^2 - 2x - 1 \geq 0 \Rightarrow x^2 - 2x + 1 - 2x - 1 \geq 0 \Rightarrow x^2 - 4x \geq 0 \Rightarrow x(x-4) \geq 0.$$

Hay que tener en cuenta el signo de los factores x y $x-4$.

- Si $x < 0$, como ambos factores son negativos, el producto $x(x-4) > 0$.
- Si $0 < x < 4$, el primer factor es positivo, pero el segundo es negativo $\Rightarrow x(x-4) < 0$.
- Si $x > 4$, como ambos factores son positivos, el producto $x(x-4) > 0$.

Por tanto, la solución es: $x \in (-\infty, 0] \cup [4, +\infty)$.



7. (1 punto) Representa gráficamente el conjunto de soluciones correspondiente al sistema:

$$\begin{cases} 2x + 5y \geq 20 \\ 4x - 10y \geq 0 \end{cases}$$

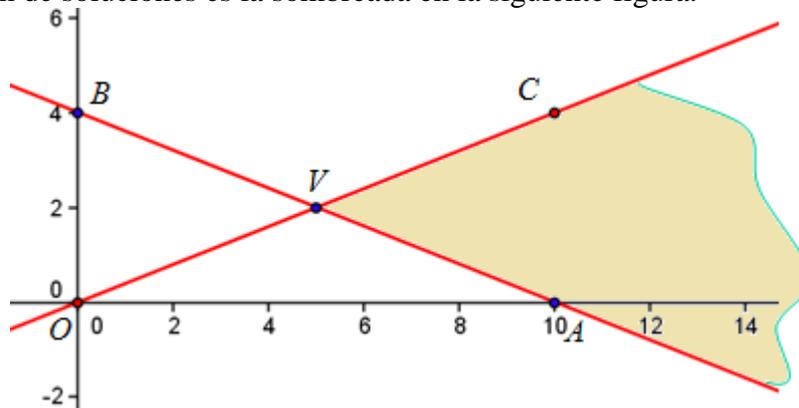
Indica el vértice de la región de soluciones.

Solución:

La inecuación $2x + 5y \geq 20$ determina el semiplano que está por encima de la recta $2x + 5y = 20$ (incluidos los puntos de ella). Dos de sus puntos son $A(10, 0)$ y $B(0, 4)$

La inecuación $4x - 10y \geq 0$ determina el semiplano que está por debajo de la recta $4x - 10y = 0$ (incluidos los puntos de ella). Dos de sus puntos son $O(0, 0)$ y $C(10, 4)$.

Por tanto, la región de soluciones es la sombreada en la siguiente figura.



Las coordenadas del vértice se calculan resolviendo el sistema $\begin{cases} 2x + 5y = 20 \\ 4x - 10y = 0 \end{cases}$.

Su solución es $V(5, 2)$.

8. (1 punto) Resuelve las siguientes ecuaciones:

a) $\log \frac{1}{x} = -3$ (0,4 puntos) b) $2^x + 2^{x+1} + 2^{x+3} = 88$ (0,7 puntos)

Solución:

a) $\log \frac{1}{x} = -3 \Rightarrow \frac{1}{x} = 10^{-3} \Rightarrow \frac{1}{x} = \frac{1}{10^3} \Rightarrow x = 1000.$

b) $2^x + 2^{x+1} + 2^{x+3} = 88 \Rightarrow$
 $\Rightarrow 2^x + 2^x \cdot 2 + 2^x \cdot 2^3 = 88 \Rightarrow 2^x (1 + 2 + 2^3) = 88 \Rightarrow 2^x \cdot 11 = 88 \Rightarrow 2^x = 8 \Rightarrow x = 3$

9. (1 punto) En los primeros días del verano una determinada especie de mosquitos crece diariamente a un ritmo del 30%. Si el primer día había 2000 mosquitos, ¿cuántos días han de pasar para que lleguen a 1 millón?

Solución:

La expresión que da la población de mosquitos es $P(x) = 2000 \cdot (1 + 0,30)^x$, siendo x el tiempo en días.

Para que $1000000 = 2000 \cdot (1 + 0,30)^x \Rightarrow 500 = (1,30)^x \Rightarrow \log 500 = \log (1,30)^x \Rightarrow$

$\Rightarrow \log 500 = x \log (1,30) \Rightarrow x = \frac{\log 500}{\log (1,30)} = 23,6869$ días.

10. (1 punto) Una familia suscribe un préstamo hipotecario de 150000 euros. El banco les ofrece dicha cantidad a un 4,5% anual por un período de 15 años. ¿Cuánto deberán amortizar mensualmente?

Dato: La fórmula que da la amortización mensual es $a = \frac{D(1+r)^n \cdot r}{(1+r)^n - 1}$

Solución:

Un interés anual del 4,5% equivale a una tasa mensual de $r = 0,045/12 = 0,00375$.

El número de meses es $n = 15 \cdot 12 = 180$.

Por tanto:

$$a = \frac{150000(1 + 0,00375)^{180} \cdot 0,00375}{(1 + 0,00375)^{180} - 1} = 1147,49 \text{ €}$$

Alcalá de Henares, 15 de diciembre de 2015. JoséMMM