# FACTORIZACIÓN DE POLINOMIOS

- **Un polinomio $P(x)$ se dice <u>IRREDUCIBLE</u> cuando no se puede descomponer en producto de otros polinomios de menor grado que él. En caso contrario se dice que es <u>REDUCIBLE.</u>**

<u>Ejemplos</u>

a) $P(x)=x^2-9$ es reducible pues $P(x)=(x-3)(x+3)$

b) $P(x)=4x^2-25$ es reducible pues $P(x)=4x^2-25=(2x-5)(2x+5)$

c) $P(x)=x^2+1$ es irreducible pues no existen polinomios de primer grado $(ax+b)$ y $(cx+d)$ tales que $P(x)=x^2+1=(ax+b)(cx+d)$

d) $P(x)=x^3-1$ es reducible pues $P(x)=x^3-1=(x-1)(x^2+x+1)$

- **<u>FACTORIZAR UN POLINOMIO</u> es expresarlo como el producto de factores lo más sencillos posibles, esto es, binomios de primer grado de la forma $(x\pm a)$ y polinomios irreducibles.**

En definitiva, vamos a hacer con los polinomios algo similar a lo que hacemos con los números reales cuando los descomponemos en producto de factores primos.

**YA CONOCEMOS ALGUNOS MÉTODOS PARA FACTORIZAR POLINOMIOS: SACAR FACTOR COMÚN Y LAS IDENTIDADES NOTABLES.**

<u>EJEMPLOS</u>

I) <u>Sacar factor común</u>

a) $x^2-4x=x(x-4)$

b) $2x^3-16x^2=2x^2(x-8)$

II) <u>Identidades notables</u>

a) $x^2-16=(x-4)(x+4)$

b) $4a^2-81=(2a-9)(2a+9)$

c) $x^2-8x+16=(x-4)^2$

d) $x^2+10x+25=(x+5)^2$

e) $4x^2+4x+1=(2x+1)^2$

f) $9x^2-24x+16=(3x-4)^2$

III) <u>Sacar factor común e identidades notables</u>

a) $2x^4-32x^2=2x^2(x^2-16)=2x^2(x-4)(x-4)$

b) $3x^2+6x+3=3(x^2+2x+1)=3(x+1)^2$

c) $2a^4-20a^3+50a^2=2a^2(a^2-10a+25)=2a^2(a-5)^2$

**Ahora vamos a ver otros métodos para factorizar polinomios (que se pueden combinar con los anteriores, es decir, en un mismo ejercicio podemos utilizar varios métodos)**

## 1. POLINOMIO DE PRIMER GRADO $\rightarrow P(x) = ax \pm b$

| |
|---|
| Se extrae factor común el número que multiplica a "$x$" $\rightarrow (ax \pm b) = a\left(x \pm \frac{b}{a}\right)$ |

EJEMPLOS

a) $2x - 8 = 2(x-4)$

b) $3x + 18 = 3(x+6)$

c) $-5x + 15 = -5(x-3)$

d) $2x - 17 = 2\left(x - \frac{17}{2}\right)$

e) $-5x + 13 = -5\left(x - \frac{13}{5}\right)$

**Observaciones:**

- Un número real "$a$" es una raíz de $P(x)$ si $P(a) = 0$ (es decir, "$a$" es una raíz de $P(x)$ si el valor numérico de $P(x)$ para $x = a$ es 0).
- Se verifica que: $(x-a)$ es un factor (divisor) de $P(x) \Leftrightarrow a$ es una raíz de $P(x)$.

  $2x - 8 = 2(x-4) \longrightarrow 4$ es raíz de $2x - 8 \Leftrightarrow (x-4)$ es factor de $2x - 8$

  $3x + 18 = 3(x+6) \longrightarrow -6$ es raíz de $3x + 18 \Leftrightarrow (x+6)$ es factor de $3x + 18$

## 2. POLINOMIO DE 2º GRAGO $\rightarrow P(x) = ax^2 + bx + c$

1) Hallamos las raíces de $P(x)$ (es decir los números reales que anulan al polinomio)

$$P(x) = 0 \Leftrightarrow ax^2 + bx + c = 0 \begin{cases} \alpha_1 \\ \alpha_2 \end{cases} \text{(es decir, resolvemos la ecuación de 2º grado)}$$

2) La **factorización** de $P(x)$ es: $\underline{P(x) = a \cdot (x - \alpha_1) \cdot (x - \alpha_2)}$ ("$a$" es el coeficiente principal del polinomio y $\alpha_1$ y $\alpha_2$ las soluciones de la ecuación que hemos resuelto en el paso anterior)

EJEMPLOS

a) Factoriza $P(x) = x^2 + 4x + 3$

1) $x^2 + 4x + 3 = 0 \Rightarrow \quad a = 1 \quad b = 4 \quad c = 3$

$$x^2 + 4x + 3 = 0 \Leftrightarrow x = \frac{-4 \pm \sqrt{(4)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 3}}{} \frac{-4 \pm \sqrt{16-12}}{2} = \frac{-4 \pm \sqrt{4}}{2} = \frac{-4 \pm 2}{4} = \begin{cases} \frac{-4+2}{2} = \frac{-2}{2} = -1 \\ \frac{-4-2}{2} = \frac{-6}{2} = -3 \end{cases}$$

2) Factorización: $P(x) = 1 \cdot (x+1)(x+3) \Rightarrow \underline{P(x) = (x+1)(x+3)}$

b) Factoriza $P(x)=-2x^2-5x+3$

1) $-2x^2-5x+3=0 \Rightarrow \quad a=-2 \quad b=-5 \quad c=3$

$$-2x^2-5x+3=0 \Leftrightarrow x=\frac{5\pm\sqrt{(-5)^2-4\cdot(-2)\cdot 3}}{2\cdot(-2)}=\frac{5\pm\sqrt{25+24}}{-4}=\frac{5\pm\sqrt{49}}{-4}=\frac{5\pm 7}{-4}=\begin{cases}\dfrac{5+7}{-4}=\dfrac{12}{-4}=-3\\ \dfrac{5-7}{-4}=\dfrac{-2}{-4}=\dfrac{1}{2}\end{cases}$$

2) Factorización: $\underline{P(x)=-2\cdot(x+3)\left(x-\frac{1}{2}\right)}$

c) Factoriza $P(x)=4x^2+4x+1$

1) $4x^2+4x+1=0 \Rightarrow \quad a=4 \quad b=4 \quad c=1$

$$4x^2+4x+1=0 \Leftrightarrow x=\frac{-4\pm\sqrt{(4)^2-4\cdot 4\cdot 1}}{2\cdot(4)}=\frac{-4\pm\sqrt{16-16}}{8}=\frac{-4\pm\sqrt{0}}{8}=\frac{-4\pm 0}{8}=\begin{cases}\dfrac{-4+0}{8}=\dfrac{-4}{8}=-\dfrac{1}{2}\\ \dfrac{-4-0}{8}=\dfrac{-4}{8}=-\dfrac{1}{2}\end{cases}$$

2) Factorización: $P(x)=4\cdot\left(x+\frac{1}{2}\right)\left(x+\frac{1}{2}\right)=4\left(x+\frac{1}{2}\right)^2 \Rightarrow \underline{P(x)=4\left(x+\frac{1}{2}\right)^2}$

d) $P(x)=x^2+4x+5$

1) $x^2+4x+5=0 \Rightarrow \quad a=1 \quad b=4 \quad c=5$

$$x^2+4x+5=0 \Leftrightarrow x=\frac{-4\pm\sqrt{(4)^2-4\cdot 1\cdot 5}}{2\cdot 1}=\frac{-4\pm\sqrt{16-20}}{2}=\frac{-4\pm\sqrt{-4}}{2} \Rightarrow \text{no tiene solución real}$$

2) Factorización: $\underline{P(x)=x^2+4x+5}$ **es irreducible**

# <u>3. FACTORIZACIÓN DE POLINOMIOS DE GRADO MAYOR QUE 2</u>

## <u>3.1) UNA DIVISIÓN EXACTA PERMITE FACTORIZAR</u>

Si al dividir $P(x):Q(x)$ el cociente $C(x)$ es exacto (es decir, el resto de la división es cero), entonces:

$P(x)=C(x)\cdot Q(x)$ (Recuerda: Dividendo=Cociente · Divisor + Resto)

<u>Ejemplo</u>: $(7x^4-6x^3+3x-4):(x-1)=$

$$\begin{array}{r|rrrr|r} & 7 & -6 & 0 & +3 & -4\\ +1 & & +7 & +1 & +1 & +4\\ \hline & 7 & +1 & +1 & +4 & \boxed{0}\end{array}$$

$\Rightarrow$ Cociente $=7x^3+x^2+x+4$ y Resto $=0$

Por tanto, $(7x^4-6x^3+3x-4)=(x-1)\cdot(7x^3+x^2+x+4)$

Utilizaremos este resultado para factorizar polinomios de grado mayor que 2

## 3.2) FACTORIZACIÓN DE POLINOMIOS DE GRADO MAYOR QUE 2

Hay un par de resultados (que en este curso no demostraremos) que nos permitirán factorizar polinomios:

- **Posibles raíces enteras de $P(x)$ = {Divisores del término independiente}**

  (Recuerda que las raíces de un polinomio son los números reales que lo anulan, es decir,

  "$a$ es una raíz de $P(x)$ si $P(a)=0$"

  Por ejemplo, $x=-3$ es una raíz de $P(x)=x^2-9$ porque $P(-3)=(-3)^2-9=0$)

- ***a* es una raíz de $P(x) \Leftrightarrow (x-a)$ es un factor (divisor) de $P(x) \Leftrightarrow P(x):(x-a)$ es exacta.**

**PARA FACTORIZAR UN POLINOMIO DE GRADO MAYOR QUE 2 PROCEDEREMOS DEL SIGUIENTE MODO:**

**1)** Hallamos las posibles raíces enteras de $P(x)$:

Posibles raíces enteras de $P(x)$ = {divisores del término independiente de $P(x)$}

**2)** Elegimos una de las posibles raíces "$a$" y dividimos $P(x)$ entre $(x-a)$ (por Ruffini).

- Si la división no es exacta $\Rightarrow$ "$a$" no es raíz de $P(x) \Rightarrow (x-a)$ no es factor de $P(x)$.

  Vamos probando con los distintos "candidatos" a raíces de $P(x)$ hasta encontrar una de ellas y, en consecuencia, uno de los factores del polinomio.

- Si la división es exacta $\Rightarrow$ "$a$" es raíz de $P(x) \Rightarrow (x-a)$ es factor de $P(x) \Rightarrow P(x)=(x-a)\cdot C(x)$ con $C(x)$ cociente de la división.

- Ahora continuamos factorizando $C(x)$

**3)**

- Si $C(x)$ es un polinomio de 2º grado, lo factorizamos como hemos visto anteriormente.
- Si $C(x)$ es un polinomio de grado mayor que 2, repetimos el paso anterior hasta que el cociente de la división sí sea un polinomio de grado 2 y lo podamos factorizar como hemos visto anteriormente.

**REALIZAREMOS ALGUNOS DE EJEMPLOS PARA QUE QUEDE TODO MÁS CLARO:**

**a)** Factorizar $P(x) = 3x^4 + 5x^3 - 5x^2 - 5x + 2$

Posibles raíces enteras = {divisores de 2}={±1, ± 2}

RECUERDA: $a$ es una raíz de $P(x) \Leftrightarrow (x-a)$ es un factor (divisor) de $P(x) \Leftrightarrow P(x):(x-a)$ es exacta.

$$\begin{array}{r|rrrr|r} & 3 & +5 & -5 & -5 & +2 \\ 1 & & +3 & +8 & +3 & -2 \\ \hline & 3 & +8 & +3 & -2 & \boxed{0} \end{array} \Rightarrow 1 \text{ es raíz} \Rightarrow (x-1) \text{ es factor y } P(x) = (x-1)\cdot\underbrace{(3x^3+8x^2+3x-2)}_{\text{ahora repetimos el proceso con este polinomio}}$$

$$\begin{array}{r|rrr|r} -1 & & -3 & -5 & +2 \\ \hline & 3 & +5 & -2 & \boxed{0} \end{array} \Rightarrow -1 \text{ es raíz} \Rightarrow (x+1) \text{ es factor y } P(x) = (x-1)\cdot(x+1)\underbrace{(3x^2+5x-2)}_{\text{polinomio de 2º grado}}$$

Finalmente, para buscar las raíces y factorizar $(3x^2 + 5x - 2)$ (en caso de que las tenga, porque podría ser irreducible) resolvemos la ecuación de 2º grado:

$$3x^2 + 5x - 2 = 0 \Rightarrow x = \frac{-5 \pm \sqrt{25+24}}{6} = \frac{-5 \pm 7}{6} = \begin{cases} x = \dfrac{2}{6} = \dfrac{1}{3} \\ x = -2 \end{cases} \Rightarrow 3x^2 + 5x - 2 = 3(x+2)\left(x - \frac{1}{3}\right)$$

Luego, el proceso que hemos seguido ha sido,

$$P(x) = (x-1)\cdot(3x^3 + 8x^2 + 3x - 2) = (x-1)\cdot(x+1)\cdot(3x^2 + 5x - 2) = (x-1)\cdot(x+1)\cdot 3\cdot(x+2)\cdot\left(x - \frac{1}{3}\right)$$

**<u>SOLUCIÓN</u>**

$$\boxed{P(x) = 3(x-1)(x+1)(x+2)\left(x - \frac{1}{3}\right) \qquad \qquad Raíces = \left\{1, -1, -2, \frac{1}{3}\right\}}$$

**b)** Factorizar $P(x) = 2x^4 - x^3 - 4x^2 - 3x - 2$

Posibles raíces = {divisores de – 2} = {±1, ± 2}

RECUERDA: $a$ es una raíz de $P(x) \Leftrightarrow (x-a)$ es un factor (divisor) de $P(x) \Leftrightarrow P(x):(x-a)$ es exacta.

$$\begin{array}{r|rrrr|r} & 2 & -1 & -4 & -3 & -2 \\ -1 & & -2 & +3 & +1 & +2 \\ \hline & 2 & -3 & -1 & -2 & \boxed{0} \end{array} \Rightarrow -1 \text{ es raíz} \Rightarrow (x+1) \text{ es factor y } P(x) = (x+1)\cdot\underbrace{(2x^3-3x^2-x-2)}_{\text{ahora repetimos el proceso con este polinomio}}$$

$$\begin{array}{r|rrr|r} 2 & & +4 & +2 & +2 \\ \hline & 2 & +1 & +1 & \boxed{0} \end{array} \Rightarrow 2 \text{ es raíz} \Rightarrow (x-2) \text{ es factor y } P(x) = (x+1)\cdot(x-2)\underbrace{(2x^2+x+1)}_{\text{polinomio de 2º grado}}$$

Finalmente, para buscar las raíces y factorizar $(2x^2+x+1)$ (en caso de que las tenga, porque podría ser irreducible) resolvemos la ecuación de 2º grado:

$$2x^2+x+1=0 \Rightarrow x=\frac{-1\pm\sqrt{1-8}}{4}=\frac{-1\pm\sqrt{-7}}{4} \Rightarrow \text{no tiene solución real} \Rightarrow (2x^2+x+1) \text{ es irreducible}$$

Luego, $P(x)=(x+1)\cdot(x-2)\cdot(2x^2+x+1)$

**SOLUCIÓN**

$$\boxed{P(x)=(x+1)(x-2)(2x^2+x+1) \qquad\qquad Raíces=\{-1,2\}}$$

**c)** Factorizar $P(x)=2x^5+9x^4+9x^3-x^2-3x$

1º) Extraemos "$x$" factor común y tenemos: $\underline{P(x)=2x^5+9x^4+9x^3-x^2-3x=x\cdot(2x^4+9x^3+9x^2-x-3)}$

2º) Ahora tenemos que factorizar el polinomio $\underline{Q(x)=(2x^4+9x^3+9x^2-x-3)}$.

Posibles raíces = {divisores de $-3$}=$\{\pm1,\pm3\}$

$$\begin{array}{r|rrrrr}
 & 2 & +9 & +9 & -1 & -3 \\
-1 & & -2 & -7 & -2 & +3 \\
\hline
 & 2 & +7 & +2 & -3 & \boxed{0} \\
-3 & & -6 & -3 & +3 & \\
\hline
 & 2 & +1 & -1 & \boxed{0} &
\end{array}$$

$\Rightarrow -1 \text{ es raíz} \Rightarrow (x+1) \text{ es factor y } Q(x)=(x+1)(2x^3+7x^2+2x-3)$

$\Rightarrow -3 \Rightarrow (x+3) \text{ es factor y } Q(x)=(x+1)(x+3)(2x^2+x-1)$

3º) Finalmente, para buscar las raíces y factorizar $(2x^2+x-1)$ (en caso de que las tenga, porque podría ser irreducible) resolvemos la ecuación de 2º grado:

$$2x^2+x-1=0 \Rightarrow x=\frac{-1\pm\sqrt{1+8}}{4}=\frac{-1\pm3}{4}=\begin{cases} x=\frac{2}{4}=\frac{1}{2} \\ x=-1\end{cases} \Rightarrow 2x^2+x-1=2(x+1)\left(x-\frac{1}{2}\right)$$

$$\underline{\text{Luego, } Q(x)=(x+1)\cdot(x+3)\cdot2\cdot(x+1)\cdot\left(x-\frac{1}{2}\right)=2\cdot(x+1)\cdot(x+3)\cdot(x+1)\cdot\left(x-\frac{1}{2}\right)}$$

Por tanto,

$$P(x)=2x^5+9x^4+9x^3-x^2-3x=x\cdot Q(x)=x\cdot(2x^4+9x^3+9x^2-x-3)=x\cdot2\cdot(x+1)\cdot(x+3)\cdot(x+1)\cdot\left(x-\frac{1}{2}\right)=$$

$$=2x(x+1)^2(x+3)\left(x-\frac{1}{2}\right)$$

**SOLUCIÓN**

$$\boxed{P(x)=2x(x+1)^2(x+3)\left(x-\frac{1}{2}\right) \qquad\qquad Raíces=\left\{0,-1(doble),-3,\frac{1}{2}\right\}}$$