TEMA 5. FACTORIZACIÓN DE POLINOMIOS.

1. SACAR FACTOR COMÚN

Cuando **todos** los términos de un polinomio, P(x), son múltiplos de un mismo monomio, M(x), podemos extraer M(x) como **factor común.**
Por ejemplo:

$P(x) = 6x^4 - 9x^3 + 12x^2 - 3x$

El monomio M(x) = 3x es factor común a todos los términos de P(x). Por tanto:

$$P(x) = 3x\ (2x^3 - 3x^2 + 4x - 1)$$

Para convencernos de que las dos expresiones son iguales y comprobar que no nos hemos equivocado, podemos realizar la multiplicación, quitando el paréntesis:

$$3x\ (2x^3 - 3x^2 + 4x - 1) = \quad 6x^4 - 9x^3 + 12x^2 - 3x$$

Ejercicio resuelto

Extraer factor común en cada uno de los siguientes polinomios:

a) $A(x) = 100x^5 - 80x^4 + 16x^3$

Todos los sumandos tiene el factor x^3. Además, 100, 80 y 16 son múltiplos de 4. Por tanto, podemos sacar $4x^3$ como factor común:

$100x^5 - 80x^4 + 16x^3 \quad = 4x^3\ (25x^2 - 20x + 4)$

b) $B(x) = 45x^5 + 120x^3 + 80x$

5x es factor común a los tres sumandos, por tanto:

$45x^5 + 120x^3 + 80x = 5x\ (9x^4 + 24x^2 + 16)$

c) $C(x) = x^3 + x^2 + x$

x es factor común a los tres sumandos

$x^3 + x^2 + x = x\ (\ x^2 + x + 1)$

En todos los casos podemos comprobar que si quitamos el paréntesis realizando la multiplicación obtenemos las expresiones iniciales.

1. Saca factor común en cada uno de los siguientes polinomios:

a) $A(x) = 3x^3 - 2x^2 + 5x$

b) $B(x) = 2x^4 - 2x^3 + 2x^2$

c) $C(x) = 20x^3 + 15x$

d) $D(x) = 2x^6 + 4x^3 - 2x$

e) $E(x) = 490\,x^3 - 420x^2 + 90x$

f) $F(x) = 20x^6 + 60x^4 + 45x^2$

g) $G(x) = 81x^4 - 36x^2$

h) $H(x) = 4x - 100x^5$

2. IDENTIDADES NOTABLES PARA FACTORIZAR UN POLINOMIO.

Factorizar es expresar como producto de dos o más factores un número o una expresión algebraica.
Utilizando las identidades notables que vimos en la unidad anterior y sacando factor común, podemos factorizar algunos polinomios. Por ejemplo:

1. Expresar como cuadrado o como producto de dos binomios cada uno de los polinomios siguientes:

a) $A(x) = 4x^2 + 4x + 1$
b) $B(x) = 9x^2 - 12x + 4$
c) $C(x) = 4x^2 - 25$

Aplicamos las identidades notables en cada caso:

a) $A(x) = 4x^2 + 4x + 1 = (2x)^2 + 2 \cdot (2x) \cdot 1 + 1^2 = (2x + 1)^2$
b) $B(x) = 9x^2 - 12x + 4 = (3x)^2 - 2 \cdot (3x) \cdot 2 + 2^2 = (3x - 2)^2$
c) $C(x) = 4x^2 - 25 = (2x)^2 - 5^2 = (2x+5)\,(2x-5)$

2. Factorizar todo lo posible los siguientes polinomios:

a) $D(x) = 25x^5 - 20x^4 + 4x^3$
b) $E(x) = 18x^5 + 48x^4 + 32x$
c) $F(x) = 100x^2 - 36x^6$

Sacamos factor común y aplicamos las identidades notables en cada caso:

a) $D(x) = 25x^5 - 20x^4 + 4x^3 = x^3(25x)^2 - 20x + 4 = x^3(5x - 2)^2$

b) $E(x) = 18x^5 + 48x^4 + 32x = 2x(9x^4 + 24x^2 + 16) = 2x(3x^2+4)^2$

c) $F(x) = 100x^2 - 36x^6 = 4x^2(25 - 9x^4) = 4x^2 (5 + 3x^2) (5 - 3x^2)$

2. Sacando factor común cuando sea posible e identificando productos de binomios, factoriza los siguientes polinomios:

a) $A(x) = x^2 + 4x + 4$

b) $B(x) = x^2 - 6x + 9$

c) $C(x) = x^2 - 1$

d) $D(x) = x^3 - 4x$

e) $E(x) = 4x^2 + 12x + 9$

f) $F(x) = x^2 - 9$

g) $G(x) = x^4 - 10x^3 + 25x^2$

h) $H(x) = 9x^2 + 24x + 16$

2. UN CRITERIO DE DIVISIBILIDAD POR x – a

La división $(2x^3 - 8x^2 - 31x + 42) : (x - 6)$, es exacta. Vamos a comprobar mediante la regla de Ruffini

	2	-8	-31	42
6		12	24	$6 \cdot (-7)$
	2	4	-7	0

Para que sea exacta, el término independiente del dividendo ha de ser múltiplo de 6

De esta manera obtenemos un criterio de divisibilidad de un polinomio por x – a, para valores enteros de a, es decir será una división exacta **cuando el término independiente del dividendo sea múltiplo de a.**
Por tanto, para buscar expresiones x –a que sean divisores de un polinomio, probaremos con los valores de a (positivos y negativos) que sean divisores del término independiente.

- ✓ Ejercicio resuelto:

a) Explicar por qué el polinomio $P(x) = x^3 - 3x + 2$ no puede ser divisible por $x - 3$.

b) Indicar qué expresiones del tipo x – a podríamos considerar como posibles divisores de P(x)

c) Comprobar, realizando la división, cuáles de las expresiones consideradas en b) son divisores de P(x).

a) P(x), no puede ser divisible entre x – 3, ya que 2 no es múltiplo de 3

b) Los divisores de 2 son 1, -1, 2 , -2. Por tanto podríamos considerar como posibles divisores de P(x) las expresiones siguientes:

x – 1, x + 1, x - 2, x + 2

c) Comprobando por la regla de Ruffini:

	1	0	-3	2
1		1	1	-2
	1	1	- 2	0

x – 1, si es divisor de P(x) ya que el resto es 0

	1	0	-3	2
-1		-1	1	2
	1	-1	-2	4

x + 1 no es divisor de P(x) ya que el resto no es 0

	1	0	-3	2
2		2	4	2
	1	2	1	4

x – 2 no es divisor de P(x) ya que el resto no es 0

	1	0	-3	2
-2		-2	4	-2
	1	-2	1	0

x + 2 si es divisor de P(x) ya que el resto es 0

3. a) Explica por qué $A(x) = x^3 - 3x^2 - x + 3$ no puede ser divisible por $x - 2$.

b) Indica qué expresiones del tipo $x - a$ podemos considerar como posibles divisores de A(x).

c) Comprueba cuáles de las expresiones consideradas en el apartado b) son divisores de A(x). Para ello, realiza las divisiones con la regla de Ruffini

4. VALOR DE UN POLINOMIO PARA x = a

El valor numérico de un polinomio, P(x), para x = a es el número que se obtiene al sustituir la x por a y efectuar la operaciones indicadas. A este número se le llama P(a).

Por ejemplo, si $P(x) = 7x^4 - 11x^3 - 94x + 7$, para $x = 3$ obtenemos:

$$P(a) = 7 \cdot 3^4 - 11 \cdot 3^3 - 94 \cdot 3 + 7 = -5$$

Este valor, P(3) = -5, coincide con el resto de dividir P(x) entre x – 3.

	7	-11	0	-94	7
3		21	30	90	-12
	7	10	30	-4	**-5**

Esto ocurre siempre, y se denomina **teorema del resto**, que dice: "El valor que toma un polinomio, P(x), cuando hacemos x = a coincide con el resto de la división.

- ✓ Ejercicio resuelto:

Utilizar la regla de Ruffini para calcular P(a) en los siguientes casos:

$P(x) = x^4 - 4x^3 + 3x^2 + 4x - 4$ para a = -2 y para a = 2

- Caso a = -2

	1	-4	3	4	-4	
- 2		-2	12	-30	52	
	1	-6	15	-26	48	→ P(-2) = 48

- Caso a = 2:

	1	-4	3	4	-4	
2		2	- 4	- 2	4	
	1	- 2	- 1	2	0	→ P(2) = 0

4. Calcula P(a) en los siguientes casos, utilizando la regla de Ruffini:

a) $P(x) = 7x^4 - 5x^2 + 2x - 24$ para a = 2, para a = -5 y para a = 10

b) $P(x) = 3x^3 - 8x^2 + 3x$ para a = -3, para a = 1 y para a = 2

5. FACTORIZACIÓN DE POLINOMIOS

1.1 RAÍCES DE UN POLINOMIO.

Un número a se llama raíz de un polinomio P(x) si P(a) = 0
Las raíces de un polinomio son las soluciones de la ecuación P(x) = 0. Para localizar las raíces enteras de un polinomio probaremos con los divisores (positivos y negativos) de su término independiente.
Una vez localizada una raíz, a, puesto que P(x) es divisible por x – a, podremos ponerlo así: $P(x) = (x - a) \cdot P_1(x)$. Las restantes raíces las buscaremos en $P_1(x)$.

5. 2 PROCEDIMIENTO PARA FACTORIZAR UN POLINOMIO.

Factorizar un polinomio es descomponerlo en producto de polinomios (factores) de menor grado posible.

Veamos cómo factorizar, por ejemplo, $P(x) = x^3 - 2x^2 - 5x + 6$

- Comenzamos buscando alguna de sus raíces enteras. Para ello, probamos con alguno de los divisores de 6, es decir, 1, -1, 2, -2, 3, -3, 6, -6.

	1	- 2	- 5	6	
- 1		- 1	3	2	
	1	- 3	-2	8	luego -1 no es raíz

	1	- 2	- 5	6	
1		1	- 1	- 6	
	1	- 1	- 6	0	1 si es raíz

$P(x) = (x - 1)\ (x^2 - x - 6)$

- Ahora buscamos las raíces de $P_1 = x^2 - x - 6$

	1	-1	- 6
- 2		- 2	6
	1	- 3	0

- 2 es raíz de $P_1(x)$ y, por tanto de $P(x)$

$P_1(x) = (x + 2)\ (x - 3)$

- Con esto ya tenemos factorizado $P(x)$:

$$P(x) = (x - 1)\ P_1(x) = (x - 1)\ (x + 2)\ (x - 3)$$

5. Factoriza los siguientes polinomios:
(Siempre que se pueda empezar sacando factor común)

a) $A(x) = x^2 - 5x - 6$

b) $B(x) = x^5 - 5x^4 - 6x^3$

c) $C(x) = x^3 - x$

d) $D(x) = x^3 + 3x^2 - 4x$

e) $E(x) = x^4 - 5x^2 + 4$

f) $F(x) = x^3 + 4x^2 + 4x$

g) $G(x) = x^3 - 3x + 2$

h) $H(x) = x^4 + 2x^3 - 23x^2 - 60x$

i) $I(x) = x^5 + 8x^4 + 21x^3 + 26x^2 + 4x - 3$

j) $J(x) = 9x^4 - 36x^3 + 26x^2 + 4x - 3$

k) $K(x) = 2x^5 + 2x^4 - 2x^3 - 2x^2$

l) $L(x) = 4x^4 - 37x^2 + 9$

m) $M(x) = 6x^4 + 21x^3 + 24x^2 + 9x$

n) $N(X) = x^5 + 10x^4 + 32x^3 + 40x^2 + 31x + 30$

ACTIVIDADES DEL TEMA

2. Saca factor común:

a) $9x^2 + 6x - 3$

b) $2x^3 - 6x^2 + 4x$

c) $10x^3 - 5x^2$

d) $x^4 - x^3 + x^2 - x$

3. Expresa los polinomios siguientes como cuadrado de un binomio:

a) $x^2 + 12x + 36 = (x + \square)^2$

b) $4x^2 - 20x + 25 = (\square - 5)^2$

c) $49 + 14x + x^2$

d) $x^2 + 9 - 6x$

4. Expresa como suma por diferencia los siguientes polinomios:

a) $x^2 - 16 = (x + \square) (x - \square)$

b) $x^2 - 1$

c) $4x^2 - 1$

d) $9 - x^2$

e) $4x^2 - 1$

f) $4x^2 - 9$

5. Saca factor común y utiliza los productos notables para descomponer los siguientes polinomios:

a) $x^3 - 6x^2 + 9x$

b) $4x^4 - 81x^2$

c) $3x^3 - 27x$

d) $x^3 - x$

e) $x^3 + 2x^2 + x$

f) $3x^2 + 30x + 75$

10. a) Explica, sin hacer la división, por qué el polinomio $P(x)= x^3 + x^2 + x + 1$ no puede ser divisible por $x - 2$ ni por $x + 3$

b) Indica qué expresiones del tipo $x - a$ podríamos considerar como posibles divisores de $P(x)$.

c) Comprueba, haciendo la división con la regla de Ruffini, cuáles de las expresiones consideradas en el apartado b) son divisores de $P(x)$.

11. Utiliza la regla de Ruffini para calcular $P(-2)$, $P(3)$ y $P(5)$, en los casos siguientes:

a) $P(x) = x^4- 3x^3 - x^2 - 1$

b) $2 x^3 -7 x^2 - 16x + 5$

c) $P(x) = 2 x^4 - 4 x^3 - 3 x^2 + 9x$

12. Halla, para $x = -3$ y para $x = 4$, el valor de los siguientes polinomios:

$P(x) = 2 x^3 - 3 x^2 + 5x - 1$

$Q(x) = 2 x^4 - 2x x^3 + 2 x^2$

$R(x) = x^3 - 3x^2- x + 3$

13. Averigua cuáles de los números 0, 1, -1, 2, -2, 3 y -3

$P(x) = x^3 -7x -6$

$Q(x) = x^3- 6 x^2 - 4x + 24$

$R(x) = x^4 - 2x^3 - 11 x^2 + 12x$

4. Expresa como cuadrado de un binomio o como suma por diferencia de binomios cada uno de los siguientes polinomios:

a) $x^4 + 4 x^2 + 4$

b) $x^2 - 16$

c) $9\ x^2 - 6x^3 + x^4$

15. Descompón en factores utilizando los productos notables y sacando factor común cuando se pueda:

a) $x^2 - 25$

b) $9 - x^2$

c) $x^3 + 4x$

d) $x^2 - 12x + 36$

e) $x^2 + 4x + 4$

f) $x^4 - 1$

g) $x^4 - 9x^2$

16. Descompón en factores los siguientes polinomios y di cuáles son sus raíces:

a) $x^2 + 8x - 9$

b) $x^3 - x^2 + 9x - 9$

c) $x^4 + x^2 - 20$

d) $x^3 + x^2 - 5x - 5$

e) $x^4 - x^3 - 9\ x^2 + 3x + 18$

g) $x^4 - 81$

17. Descompón en factores:
a) $x^4 - x^2$

b) $x^3 + 3x^2 + 4x + 12$

c) $2x^3 - 3x^2$

d) $x^3 - x^2 - 12x$

e) $x^3 - 7x^2 + 14x - 8$

f) $x^4 - 4x^3 + 4x^2 - 4x + 3$

18. Factoriza los siguientes polinomios:

a) $x^2 - 6x - 7$

b)$4x^2 + 8x - 12$

c) $x^2 + 12x + 35$

d) $2x^3 + 2x^2 - 24x$

e) $x^4 + 9x^3 - 10x$

f) $3x^3 - 9x^2 - 30x$

g) $3x^2 + 2x - 8$

h) $4x^2 + 17x + 15$

i) $2\,x^2 - 9x - 5$

j) $-\,x^2 + 17x - 72$

k) $x^3 - x^2 + 4x - 4$

l) $x^3 - x - 6$

m) $3\,x^4 + 15\,x^2$