RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS

La resolución de problemas presenta 5 dificultades:

1. **Analizar el enunciado**

   Lectura comprensiva: subrayar las palabras más significativas del enunciado pues lo primero que debemos encontrar son las palabras que dan las órdenes. Es evidente que no todos los enunciados necesitan del subrayado, pero sí de un cuidadoso desarrollo paso a paso como se muestra en los ejemplos.

2. **Expresarlo en lenguaje simbólico**

   De la misma forma en que podemos traducir una expresión de un idioma a otro, debemos ser capaces de traducir los enunciados en símbolos matemáticos para poder pasar al siguiente paso.

3. **Resolver** el sistema de ecuaciones correspondiente

4. **Verificar** si el resultado obtenido satisface las condiciones del problema

5. **Dar la respuesta**

   Traducir el resultado obtenido al lenguaje coloquial, expresándolo por escrito.

***Ejemplos*:**

1.- Calcular dos números tales que su suma es 8 y su producto es 15.

Llamamos x e y a los números desconocidos.

La suma es 8 $\Rightarrow x + y = 8$

Su producto es 15 $\Rightarrow x \cdot y = 15$

Planteamos el sistema formado por ambas ecuaciones: $\begin{cases} x + y = 8 \\ x \cdot y = 15 \end{cases}$

Despejamos x en la 1ª ecuación:

$$x = 8 - y$$

Sustituyendo en la 2ª:

$$(8 - y) \cdot y = 15$$

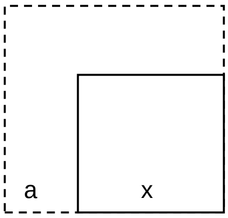
Resolvemos la ecuación de 2º grado:

$8y - y^2 = 15 \Rightarrow y^2 - 8y + 15 = 0$

$$y = \frac{8 \pm \sqrt{64 - 4 \cdot 15}}{2} = \frac{8 \pm 2}{2} = \begin{cases} x_1 = 5 \\ x_2 = 3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \text{Si } x_1 = 5 \rightarrow y_1 = 3 \\ \text{Si } x_2 = 3 \rightarrow y_2 = 5 \end{cases}$$

Por tanto, los dos números son 3 y 5.

2.- Si el lado de un cuadrado aumenta en una cierta cantidad, su área aumenta en 700 cm^2; pero si disminuye en la misma cantidad, su área disminuye en 500 cm^2. Calcular el lado del cuadrado y la cantidad aumentada o disminuida.



Lado del cuadrado: x $\Rightarrow$ *Área:* x^2

Si aumenta en a unidades $\Rightarrow$ *lado: x + a; Área* $(x+a)^2 = x^2 + 700$

Si disminuye en a unidades $\Rightarrow$ *lado: x – a ; Área* $(x - a)^2 - 500$

De esta forma obtenemos el siguiente sistema:

$$\begin{cases}(x+a)^2 = x^2 + 700 \\ (x-a)^2 = x^2 - 500\end{cases}$$

Desarrollando los cuadrados y simplificando, obtenemos:

$$\begin{cases}x^2 + a^2 + 2ax = x^2 + 700 \\ x^2 + a^2 - 2ax = x^2 - 500\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}a^2 + 2ax = +700 \\ a^2 - 2ax = -500\end{cases}$$

Aplicando el método de reducción:

$$2a^2 = 200 \Rightarrow a^2 = 100 \Rightarrow a = \pm 10.$$

Descartamos la solución –10, ya que a representa la longitud aumentada o disminuida.

Si a = 10, sustituyendo en la primera ecuación del sistema, obtenemos

$$100 + 20x = 700 \Rightarrow 20x = 600 \Rightarrow x = 30$$

Luego el lado del cuadrado es 30 cm.

Verificamos el resultado obtenido:

- *La medida del cuadrado es 30cm, con lo cual su área es 900* cm^2
- *Si disminuyo el lado en 10 cm, el lado medirá 20 cm y su área será 400* cm^2 *, luego ha disminuido en 500* cm^2
- *Si aumento el lado en 10 cm, el lado medirá 40 cm y su área 1600* cm^2 *, por tanto, ha aumentado en 700* cm^2

Actividades propuestas

1.- El perímetro de un rectángulo es 24 cm y su área es 20 cm^2. ¿Cuáles son sus dimensiones?

2.- La suma de dos números es 15 y su producto es 26. ¿Cuáles son dichos números?

3.- Halla dos números cuya suma es 14 y la de sus cuadrados 100.

4.- El área de un triángulo rectángulo es de 60 cm^2 y la suma de los catetos es 23 cm. Halla la medida de los lados.

5.- El perímetro de un triángulo isósceles mide 16 cm y la altura 4 cm. Halla la medida de los lados de dicho triángulo.

6.- Calcular dos números tales que su producto es 63 y la diferencia de sus cuadrados 32.

7.- Calcular el área de un rectángulo de perímetro 28 cm y cuya diagonal mide 10 cm.

8.- Un rectángulo mide de perímetro 28 cm y de área 24 cm^2. Hallar la longitud de sus lados.

9.- La diagonal de un rectángulo mide 26 cm y el perímetro 68 cm. Halla los lados del rectángulo.

10.- El perímetro de un triángulo rectángulo mide 36 cm y uno de los catetos 12 cm. Halla los lados restantes.

Soluciones:

1.- El perímetro de un rectángulo es 24 cm y su área es 20 cm^2. ¿Cuáles son sus dimensiones?

Sea x = altura ; y = base

Como perímetro es 24: x + y = 12

Como el área es 20 : xy = 20

Planteamos el sistema: $\begin{cases} x+y=20 \\ xy=24 \end{cases} \rightarrow y = 12 - x$

$(12 - x)\, x = 20 \rightarrow x^2 - 12x + 20 = 0 \Rightarrow \quad x = \dfrac{12 \pm \sqrt{12^2 - 4\cdot 1\cdot 20}}{2\cdot 1} = \dfrac{12\pm 8}{2} = \begin{cases} x_1 = \dfrac{12+8}{2} = 10 \Rightarrow y_1 = 2 \\ x_2 = \dfrac{12-8}{2} = 2 \Rightarrow y_2 = 10 \end{cases}$

Las dimensiones son 2 x 10

2.- La suma de dos números es 15 y su producto es 26. ¿Cuáles son dichos números?

Sean x, y ambos números

La suma es 15: x + y = 15

Su producto es 26 : xy = 26

Planteamos el sistema: $\begin{cases} x+y=15 \\ xy=26 \end{cases} \rightarrow y = 15 - x$

$(15 - x)\, x = 26 \rightarrow x^2 - 15x + 26 = 0 \Rightarrow \quad x = \dfrac{15 \pm \sqrt{15^2 - 4\cdot 1\cdot 26}}{2\cdot 1} = \dfrac{15\pm 11}{2} = \begin{cases} x_1 = \dfrac{15+11}{2} = 13 \Rightarrow y_1 = 2 \\ x_2 = \dfrac{15-11}{2} = 2 \Rightarrow y_2 = 13 \end{cases}$

Los números son 3 y 12.

3.- Halla dos números cuya suma es 14 y la de sus cuadrados 100.

Sean x, y ambos números

La suma es 14: x + y = 14

La suma de sus cuadrados es 100 : $x^2 + y^2 = 100$

Planteamos el sistema: $\begin{cases} x+y=14 \\ x^2+y^2=100 \end{cases}$

Si $y = 14 - x \rightarrow x^2 + (14 - x)^2 = 100 \rightarrow x^2 + x^2 - 28x + 196 - 100 = 0 \Rightarrow x^2 - 14x + 48 = 0$

$$x = \frac{14 \pm \sqrt{14^2 - 4\cdot 1\cdot 48}}{2\cdot 1} = \frac{14\pm 2}{2} = \begin{cases} x_1 = \dfrac{14+2}{2} = 8 \Rightarrow y_1 = 6 \\ x_2 = \dfrac{14-2}{2} = 6 \Rightarrow y_2 = 8 \end{cases}$$

Los números son 8 y 6.

4.- El área de un triángulo rectángulo es de 60 cm^2 y la suma de los catetos es 23 cm. Halla la medida de los lados.

Sea x = base e y = altura

La suma de sus catetos es 23 : x + y = 23

El área es 60 : x y = 60 ⇒ y = 14 – x

Planteamos el sistema: $\begin{cases} x+y=23 \\ xy=60 \end{cases} \rightarrow y = 23 - x$

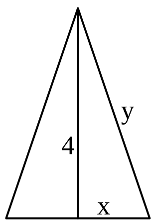
x (23 – x) = 60 → $x^2 - 23x + 60 = 0 \Rightarrow \quad x = \dfrac{23 \pm \sqrt{23^2 - 4\cdot 1\cdot 60}}{2\cdot 1} = \dfrac{23 \pm 17}{2} = \begin{cases} x_1 = \dfrac{23+17}{2} = 20 \Rightarrow y_1 = 3 \\ x_2 = \dfrac{23-17}{2} = 3 \Rightarrow y_2 = 20 \end{cases}$

Los dos catetos miden 3 y 20 cm ⇒ La hipotenusa mide: $\sqrt{3^2 + 20^2} = 20´2$ cm

Los lados miden 3, 20 y 20´2 cm

5.- El perímetro de un triángulo isósceles mide 16 cm y la altura 4 cm. Halla la medida de los lados de dicho triángulo.

Sean 2x = lado desigual , y = lado igual



El perímetro es 16: 2x + 2y = 16 ⇒ x + y = 8

La altura es 4: $4^2 + x^2 = y^2 \Rightarrow 16 + x^2 = y^2$

Planteamos el sistema: $\begin{cases} x+y=8 \\ 16+x^2=y^2 \end{cases}$

Si y = 8 – x, la ecuación a resolver es: $16 + x^2 = (8 - x)^2$

$16 + x^2 = 64 - 16x + x^2 \Rightarrow 16x = 48 \Rightarrow x = 3 \Rightarrow 2x = 6$, y = 8 – 3 = 5

Los lados miden 6, 5 y 5 cm

6.- Calcular dos números tales que su producto es 63 y la diferencia de sus cuadrados 32.

Sean x e y los dos números

Producto es 156: xy = 63

Diferencia de sus cuadrados es 25: $y^2 - x^2 = 32$

Planteamos el sistema: $\begin{cases} xy=63 \\ y^2-x^2=32 \end{cases}$

Si $y = \dfrac{63}{x}$ obtenemos la ecuación bicuadrada:

$$\left(\frac{63}{x}\right)^2 - x^2 = 32 \rightarrow x^4 + 32x^2 - 3969 = 0$$

$z^2 + 32z - 3969 = 0 \rightarrow z = \dfrac{-32 \pm \sqrt{32^2 - 4\cdot 1\cdot(-3969)}}{2\cdot 1} = \dfrac{-32 \pm 130}{2} = \begin{cases} z_1 = \dfrac{-32+130}{2} = 49 \Rightarrow x_1 = 7 \Rightarrow y_1 = 9 \\ z_2 = \dfrac{-32-130}{2} = -81 \end{cases}$

Los dos números son 7 y 9

7.- Calcular el área de un rectángulo de perímetro 28 cm y cuya diagonal mide 10 cm.

Sea x = base e y = altura

Perímetro es 28: $2x + 2y = 28$

Diagonal es 10: $y^2 + x^2 = 100$

Planteamos el sistema: $\begin{cases} 2x+2y=28 \\ x^2+y^2=100 \end{cases} \Rightarrow y = 14 - x$

Planteamos la ecuación: $(14 - x)^2 + x^2 = 100196 + x^2 - 28x + x^2 = 100 \Rightarrow x^2 - 14x + 48 = 0 \Rightarrow$

$$x = \frac{14 \pm \sqrt{14^2 - 4\cdot 1\cdot 48}}{2\cdot 1} = \frac{14\pm 2}{2} = \begin{cases} x_1 = \dfrac{14+2}{2} = 8 \Rightarrow y_1 = 6 \\ x_2 = \dfrac{14-2}{2} = 6 \Rightarrow y_2 = 8 \end{cases}$$

El área del rectángulo es 48 cm^2

8.- Un rectángulo mide de perímetro 28 cm y de área 24 cm^2. Hallar la longitud de sus lados.

Sean x = altura ; y = base

Perímetro es 28: $2x + 2y = 28$

Área es 24: $x \cdot y = 24$

Planteamos el sistema: $\begin{cases} 2x+2y=28 \\ xy=24 \end{cases} \Rightarrow y = 14 - x$

Planteamos la ecuación: $x(14 - x) = 24$

$14x - x^2 = 24 \Rightarrow x^2 - 14x + 24 = 0$

$$x = \frac{14 \pm \sqrt{14^2 - 4\cdot 24}}{2\cdot 1} = \frac{14\pm 10}{2} = \begin{cases} x_1 = \dfrac{14+10}{2} = 12 \Rightarrow y = 14-12 = 2 \\ x_2 = \dfrac{14-10}{2} = 2 \Rightarrow y = 14-2 = 12 \end{cases}$$

Las dimensiones son 2 x 12

9.- La diagonal de un rectángulo mide 26 cm y el perímetro 68 cm. Halla los lados del rectángulo.

Sean x = altura ; y = base

Perímetro es 68: $2x + 2y = 68$

Diagonal es 10: $y^2 + x^2 = 26^2$

Planteamos el sistema: $\begin{cases} 2x+2y=28 \\ x^2+y^2=26^2 \end{cases} \Rightarrow y = 34 - x$

Perímetro es 34: $x + y = 34 \Rightarrow y = 34 - x$

Planteamos la ecuación: $x^2 + (34 - x)^2 = 26^2$

$x^2 + 1156 + x^2 - 68x - 676 = 0 \Rightarrow 2x^2 - 68x + 480 = 0 \Rightarrow x^2 - 34x + 240 = 0$

$$x = \frac{34 \pm \sqrt{34^2 - 4\cdot 240}}{2\cdot 1} = \frac{34\pm 14}{2} = \begin{cases} x_1 = \dfrac{34+14}{2} = 24 \Rightarrow y = 34-24 = 10 \\ x_2 = \dfrac{34-14}{2} = 10 \Rightarrow y = 34-10 = 24 \end{cases}$$

Las dimensiones son 24 x 10 cm.

10.- El perímetro de un triángulo rectángulo mide 36 cm y uno de los catetos 12 cm. Halla los lados restantes.

Sea x = cateto e y = hipotenusa

El perímetro es 36: $x + y + 12 = 36 \Rightarrow y = 24 - x$

Al ser triángulo rectángulo se verifica: $y^2 = x^2 + 12^2$

Planteamos el sistema: $\begin{cases} x + y = 24 \\ y^2 = x^2 + 12^2 \end{cases}$

Si $y = 24 - x \rightarrow (24 - x)^2 = x^2 + 12^2$

$576 - 48x + x^2 = x^2 + 144 \Rightarrow 432 = 48x \Rightarrow x = 9 \Rightarrow y = 15$

Los lados miden 15 y 9 cm