



Nombre: _____

Evaluación: Primera.

Fecha: 15 de noviembre de 2010

NOTA	
------	--

Ejercicio nº 1. - a) Divide el polinomio $D(x) = 5x^4 - 14 + 5x + x^3$ entre $d(x) = x^2 - 3$ indicando el cociente, $C(x)$, y el resto, $R(x)$, resultantes.

b) Aplica la regla de la división para comprobar que los cálculos del apartado anterior están bien realizados.

2 puntos

Ejercicio nº 2. - a) Halla el valor de m para que la división $(x^3 + mx^2 + 2x - 10) : (x - 5)$ sea exacta.

b) Halla el resto de las divisiones $(x^{2010} - 1) : (x - 1)$ y $(x^{2011} - 1) : (x + 1)$.

2 puntos

Ejercicio nº 3. - Factoriza los siguientes polinomios e indica cuáles son sus raíces:

a) $x^5 - 9x^3$

b) $x^3 - 3x^2 - 25x - 21$

c) $x^5 + 3x^4 - 9x^3 - 23x^2 - 12x$

3 puntos

Ejercicio nº 4. - Efectúa las siguientes operaciones y simplifica el resultado cuando sea posible:

a) $\frac{x^2}{x+1} + \frac{1}{x-1} + \frac{2x}{x^2-1}$

b) $\frac{2x^2+2}{(x+1)^2} \cdot \frac{x^2-1}{x^2+1}$

c) $\left(\frac{1}{x^2-4} + \frac{1}{x-2}\right) : \left(1 + \frac{2}{x-2}\right)$

3 puntos

SOLUCIONES

E.1. a) Divide el polinomio $D(x) = 5x^4 - 14 + 5x + x^3$ entre $d(x) = x^2 - 3$ indicando el cociente, $C(x)$, y el resto, $R(x)$, resultantes.

b) Aplica la regla de la división para comprobar que los cálculos del apartado anterior están bien realizados.

a) Ordenamos el dividendo en forma decreciente, dejando un hueco en la columna de los términos de grado 2 y otra en los términos independientes:

$$\begin{array}{r} 5x^4 + x^3 + 5x - 14 \quad | \quad x^2 - 3 \\ - 5x^4 + 15x^2 - 15 \\ \hline + x^3 + 15x^2 - 15 \\ - x^3 + 3x \\ \hline + 15x^2 + 8x - 15 \\ - 15x^2 - 45 \\ \hline + 8x + 31 \end{array}$$

Cociente: $C(x) = 5x^2 + x + 15$; Resto: $R(x) = 8x + 31$.

b) Aplicamos la prueba de la división:

$$\begin{aligned} d(x) \cdot c(x) + r(x) &= (x^2 - 3) \cdot (5x^2 + x + 15) + (8x + 31) = \\ &= 5x^4 + x^3 + 15x^2 - 15x^2 - 3x - 45 + 8x + 31 = 5x^4 + x^3 + 5x - 14 = D(x). \quad (\text{c.q.d.}) \end{aligned}$$

E.2. a) Halla el valor de m para que la división $(x^3 + mx^2 + 2x - 10) : (x - 5)$ sea exacta.

b) Halla el resto de las divisiones $(x^{2010} - 1) : (x - 1)$ y $(x^{2011} - 1) : (x + 1)$.

a) Si la división es exacta, el resto ha de ser cero. Se trata de aplicar el teorema del resto, así que lo podemos resolver de dos formas:

Valor numérico:

$$P(5) = 0 \Rightarrow 5^3 + m \cdot 25 + 2 \cdot 5 - 10 = 0 \Rightarrow 125 + 25m + 10 - 10 = 0 \Rightarrow 25m = -125 \Rightarrow m = -5.$$

Haciendo la división (aplicando la regla de Ruffini):

$$\begin{array}{r|rrrr} & 1 & m & 2 & -10 \\ 5 & & 5 & 25 + 5m & 135 + 25m \\ \hline & 1 & 5 + m & 27 + 5m & 125 + 25m \end{array}$$

Al imponer que el resto sea 0, se obtiene el mismo resultado : $125 + 25m = 0 \Rightarrow m = -5$.

b) En este caso es "mucho más complicado" hacer la división. No queda más remedio que aplicar directamente el Teorema del Resto:

- $r_1 = P(1) = 1^{2010} - 1 = 1 - 1 = 0$. Por lo tanto, se trata de una división exacta.
- $r_2 = P(-1) = (-1)^{2011} - 1 = -1 - 1 = -2$.

E.3. Factoriza los siguientes polinomios e indica cuáles son sus raíces:

- $x^5 - 9x^3$
- $x^3 - 3x^2 - 25x - 21$
- $x^5 + 3x^4 - 9x^3 - 23x^2 - 12x$

a) En primer lugar extraemos factor común, y después, factorizamos la identidad notable:

$$x^5 - 9x^3 = x^3 \cdot (x^2 - 9) = x^3 \cdot (x+3) \cdot (x-3).$$

Sus raíces (valores que hacen cero el polinomio) son 0 y ± 3 .

b) Para factorizar este polinomio debemos aplicar la regla de Ruffini con los divisores del término independiente:

	1	- 3	- 25	- 21
- 1		- 1	4	+ 21
	1	- 4	- 21	0
- 3		- 3	+ 21	
	1	- 7	0	

Ya lo tenemos:

$$x^3 - 3x^2 - 25x - 21 = (x+1) \cdot (x+3) \cdot (x-7) \text{ y sus raíces son } -1, -3 \text{ y } +7.$$

c) Sacamos factor común y después aplicamos la regla de Ruffini con los divisores de 12:

$$x^5 + 3x^4 - 9x^3 - 23x^2 - 12x = x \cdot (x^4 + 3x^3 - 9x^2 - 23x - 12) = x \cdot (x+1)^2 \cdot (x-3) \cdot (x+4).$$

	1	+ 3	- 9	- 23	- 12
- 1		- 1	- 2	+ 11	+ 12
	1	+ 2	- 11	- 12	0
- 1		- 1	- 1	+ 12	
	1	+ 1	- 12	0	
3		+ 3	+ 12		
	1	+ 4	0		

Las raíces de este polinomio son: 0, -1, +3 y -4.

E.4. Efectúa las siguientes operaciones y simplifica el resultado cuando sea posible:

a) $\frac{x^2}{x+1} + \frac{1}{x-1} + \frac{2x}{x^2-1}$ b) $\frac{2x^2+2}{(x+1)^2} \cdot \frac{x^2-1}{x^2+1}$ c) $\left(\frac{1}{x^2-4} + \frac{1}{x-2}\right) : \left(1 + \frac{2}{x-2}\right)$

a) $\frac{x^2}{x+1} + \frac{1}{x-1} + \frac{2x}{x^2-1} = \frac{x^2 \cdot (x-1) + x+1 + 2x}{(x+1) \cdot (x-1)} = \frac{x^3 - x^2 + 3x + 1}{(x+1) \cdot (x-1)} = \frac{x^3 - x^2 + 3x + 1}{x^2 - 1}$.

b) $\frac{2x^2+2}{(x+1)^2} \cdot \frac{x^2-1}{x^2+1} = \frac{2 \cdot \cancel{(x^2+1)} \cdot (x+1) \cdot (x-1)}{(x+1) \cdot \cancel{(x^2+1)}} = \frac{2 \cdot (x-1)}{x+1} = \frac{2x-2}{x+1}$.

c) $\left(\frac{1}{x^2-4} + \frac{1}{x-2}\right) : \left(1 + \frac{2}{x-2}\right) = \frac{1+x+2}{(x+2) \cdot (x-2)} : \frac{x-2+2}{x-2} = \frac{x+3}{(x+2) \cdot (x-2)} : \frac{x}{x-2} =$
 $= \frac{(x+3) \cdot \cancel{(x-2)}}{x \cdot (x+2) \cdot \cancel{(x-2)}} = \frac{x+3}{x \cdot (x+2)} = \frac{x+3}{x^2+2x}$.