45 EJERCICIOS de POLINOMIOS — 4º ESO opc. B

1. Calcular el **valor numérico del polinomio** P(x) para el valor de x indicado:

a) $P(x)=x^2+1$, para x=1

b) $P(x)=x^3+1$, para x=−1

c) $P(x)=x^2+x+2$, para x=2

d) $P(x)=-x^2-x-2$, para x=−2

*(Soluc: **a)** 2; **b)** 0; **c)** 8; **d)** −4)*

☞ *Ejercicios libro ed. Editex: **pág. 31: 7; pág. 42: 25***

2. En cada caso, hallar k para el valor numérico indicado:

a) $P(x)=2x^2-6x-k$, siendo P(1)=7 *(Soluc: k= −11)*

b) $P(x)=-2x^4-6x^3+kx+29$, siendo P(−2)=35 *(Soluc: k=5)*

c) $P(x)=-\frac{1}{2}x^6-5x^4+5x^2-k$, siendo P(−4)=58 *(Soluc: k= -3306)*

d) $P(x)=3x^3+kx^2+x+1$, siendo P(−1)=−3 *(Soluc: k=0)*

e) $P(x)=-8x^4-\frac{1}{4}x^2-12x+k$ siendo P(1/2)=125 *(Soluc: k=2105/16)*

Sumas, restas y productos de polinomios:

3. **Sumar** convenientemente **monomios semejantes**:

a) $2x-5x+7x+x=$

b) $3x^2-7x^2+x^2-2x^2=$

c) $2x^2y-3x^2y+5x^2y=$

d) $-3xy^2+xy^2-6xy^2+8xy^2=$

e) $3x^2y^2-xy^2+5x^2y-x^2y^2+2xy^2-x^2y=$

f) $-2x^3yz+3x^3yz+5x^3yz-x^3yz=$

g) $2ab^2-5a^2b-\frac{2}{3}ab^2-ab^2+\frac{1}{2}a^2b=$

h) $-2xy^3+3x^3y+5xy^3-xy^3=$

*(Soluc: **a)** 5x; **b)** $-5x^2$; **c)** $4x^2y$; **d)** 0; **e)** $2x^2y^2+4x^2y+xy^2$; **f)** $5x^3yz$; **g)** $\frac{1}{3}ab^2-\frac{9}{2}a^2b$; **h)** $2xy^3+3x^3y$)*

☞ *Ejercicios libro ed. Editex: pág. 30: 3a; pág. 42: 23a*

4. Dados $P(x)=2x^5-3x^4+3x^2-5$ y $Q(x)=x^5+6x^4-4x^3-x+7$, hallar P(x)+Q(x) y P(x)−Q(x)

a) P(x)+Q(x)= *(Soluc: $3x^5+3x^4-4x^3+3x^2-x+2$)*

b) P(x)−Q(x)= *(Soluc: $x^5-9x^4+4x^3+3x^2+x-12$)*

5. Dados $P(x)=4x^3+6x^2-2x+3$, $Q(x)=2x^3-x+7$ y $R(x)=7x^2-2x+1$, hallar:

a) P(x)+Q(x)+R(x)= *(Soluc: $6x^3+13x^2-5x+11$)*

b) P(x)−Q(x)−R(x)= *(Soluc: $2x^3-x^2+x-5$)*

c) P(x)+3Q(x)−2R(x)= *(Soluc: $10x^3-8x^2-x+22$)*

www.yoquieroaprobar.es

Texto bajo licencia Crative Commons: se permite su utilización didáctica así como su reproducción impresa o digital siempre y cuando se respete la mención de su autoría, y sea sin ánimo de lucro. En otros casos se requiere el permiso del autor (alfonsogonzalopez@yahoo.es)

6. Efectuar los siguientes **productos** en los que intervienen **monomios**, dando el resultado simplificado:

a) $(-2x^3)\cdot\left(\frac{4}{5}x^2\right)\cdot\left(\frac{1}{2}x\right)=$ *(Soluc : $-\frac{4}{5}x^6$)*

b) $\left(-\frac{5}{7}x^7\right)\cdot\left(\frac{3}{5}x^2\right)\cdot\left(-\frac{4}{3}x\right)=$ *(Soluc : $\frac{4}{7}x^{10}$)*

c) $5x^3\cdot 3x^2y\cdot(-4xz^3)=$ *(Soluc : $-60x^6yz^3$)*

d) $-3ab^2\cdot 2ab\cdot(-\frac{2}{3}a^2b)=$ *(Soluc : $4a^4b^4$)*

e) $(3x^4-2x^3+2x^2+5)\cdot 2x^2=$ *(Soluc : $6x^6-4x^5+4x^4+10x^2$)*

f) $(-2x^5+3x^3-2x^2-7x+1)\cdot(-3x^3)=$ *(Soluc : $6x^8-9x^6+6x^5+21x^4-3x^3$)*

g) $\left(\frac{2}{3}x^3-\frac{3}{2}x^2+\frac{4}{5}x-\frac{5}{4}\right)\cdot 12x^2=$ *(Soluc : $8x^5-18x^4+\frac{48}{5}x^3-15x^2$)*

h) $\left(\frac{1}{2}ab^3-a^2+\frac{4}{3}a^2b+2ab\right)\cdot 6a^2b=$ *(Soluc : $3a^3b^4-6a^4b+8a^4b^2+12a^3b^2$)*

☞ *Ejercicios libro ed. Editex:* ***pág. 42: 23b y 30***

7. **Extraer** el máximo **factor común** posible:

a) $4x^2-6x+2x^3=$ *(Soluc: $2x(x^2+2x-3)$)*

b) $12x^4y^2+6x^2y^4-15x^3y=$ *(Soluc: $3x^2y(4x^2y+2y^3-5x)$)*

c) $-3xy-2xy^2-10x^2yz=$ *(Soluc: $xy(-3-2y-10xz)$)*

d) $-3x+6x^2+12x^3=$ *(Soluc: $3x(4x^2+2x-1)$)*

e) $2ab^2-4a^3b+8a^4b^3=$ *(Soluc: $2ab(b-2a^2+4a^3b^2)$)*

f) $2x^3+4x^2-8x=$ *(Soluc: $2x(x^2+2x-4)$)*

g) $6x^3y^2-3x^2yz+9xy^3z^2=$ *(Soluc: $3xy(2x^2y-xz+3y^2z^2)$)*

h) $-2x(x-3)^2+4x^2(x-3)=$ *(Soluc: $2x(x-3)(x+3)$)*

☞ *Ejercicios libro ed. Editex:* ***pág. 43: 38***

8. Efectuar los siguientes **productos**:

a) $(3x^2+5x--6)\ (8x^2-3x+4)$ *(Soluc: $24x^4+31x^3-51x^2+38x-24$)*

b) $(5x^3-4x^2+x-2)\ (x^3-7x^2+3)$ *(Soluc: $5x^6-39x^5+29x^4+6x^3+2x^2+3x-6$)*

c) $(2x^4-3x^2+5x)\ (3x^5-2x^3+x-2)$ *(Soluc: $6x^9-13x^7+15x^6+8x^5-14x^4-3x^3+11x^2-10x$)*

d) $(ab^2+a^2b+ab)\ (ab-ab^2)$ *(Soluc: $a^3b^2+a^2b^2-a^2b^4-a^3b^3$)*

e) $(-x^6+x^5-2x^3+7)\ (x^2-x+1)$ *(Soluc: $-x^8+2x^7-2x^6-x^5+2x^4-2x^3+7x^2-7x+7$)*

f) $(x^2y^2-2xy)\ (2xy+4)$ *(Soluc: $2x^3y^3-8xy$)*

www.yoquieroaprobar.es

Texto bajo licencia Crative Commons: se permite su utilización didáctica así como su reproducción impresa o digital siempre y cuando se respete la mención de su autoría, y sea sin ánimo de lucro. En otros casos se requiere el permiso del autor (alfonsogonzalopez@yahoo.es)

g) $10\,(x-5+y-5)+(10-x)\,(10-y)$ *(Soluc: xy)*

h) $(x^2-4x+3/2)\,(x+2)$ *(Soluc: $x^3-2x^2-13x/2+3$)*

i) $(x^2+5x/2+35/3)\,(x-6)$ *(Soluc: $x^3-7x^2/2-10x/3-70$)*

j) $(2x^2+4x+2)\,(x-1/2)$ *(Soluc: $2x^3+3x^2-1$)*

9. Efectuar las siguientes **operaciones combinadas**:

a) $(2x^2+x+3/2)\,(2x^2-3)+8x+7/2$ *(Soluc: $4x^4+2x^3-3x^2+5x-1$)*

b) $(3x^3+5x^2/2-3x+13)\,(2x^2+2)-(-6x+24)$ *(Soluc: $6x^5+5x^4+31x^2+2$)*

c) $(3x^2-6x+1)\,(x^3-2x/3+2)+14x/3$ *(Soluc: $3x^5-6x^4-x^3+10x^2-8x+2$)*

d) $-x/3+1/3+(2x^2-x/3-2/3)\,(3x^2+2)$ *(Soluc: $6x^4-x^3+2x^2-x-1$)*

10. Dados $P(x)=4x^3+6x^2-2x+3$, $Q(x)=2x^3-x+7$ y $R(x)=7x^2-2x+1$, hallar:

a) $[R(x)]^2$ **b)** $P(x)-Q(x)\cdot R(x)$ **c)** $P(x)\cdot[Q(x)+R(x)]$ **d)** $P(x)\cdot Q(x)\cdot R(x)$

*(Soluc: **a)** $49x^4-28x^3+18x^2-4x+1$; **b)** $-14x^5+4x^4+9x^3-45x^2+13x-4$; **c)** $8x^6+40x^5+26x^4+6x^3+75x^2-25x+24$*
__d)__ $56x^8+68x^7-72x^6+224x^5+244x^4-179x^3+225x^2-59x+21$)

☞ *Ejercicios libro ed. Editex: **pág. 32: 8 y 9; pág. 42: 27 y 28***

Identidades notables:

11. Desarrollar, aplicando las **igualdades notables**:

a) $(x+2)^2$
b) $(x-3)^2$
c) $(x+2)\,(x-2)$
d) $(3x+2)^2$
e) $(2x-3)^2$
f) $(5x+4)\,(5x-4)$
g) $(x^2+5)^2$
h) $(-2x+5)\,(2x+5)$
i) $(x^3-2)^2$
j) $(x^2-1)\,(x^2+1)$
k) $(2x^2+3x)^2$
l) $(2x^2-3)^2$
m) $(-x-3)^2$
n) $\left(x+\frac{1}{2}\right)^2$
o) $\left(2a-\frac{3}{2}\right)^2$
p) $(-x^2+3)^2$
q) $\left(1+\frac{x}{2}\right)\left(1-\frac{x}{2}\right)$
r) $\left(2x+\frac{3}{4}\right)^2$
s) $\left(\frac{3}{2}-\frac{x}{4}\right)^2$
t) $\left(2+\frac{a}{3}\right)\left(-\frac{a}{3}+2\right)$
u) $\left(\frac{3x}{2}-\frac{1}{x}\right)^2$
v) $\left(\frac{x^2}{2}-\frac{x}{3}\right)\left(\frac{x^2}{2}+\frac{x}{3}\right)$
w) $\left(\frac{3}{2}x+\frac{1}{4}\right)^2$
x) $\left(24-\frac{7}{4}x\right)^2$

*(Soluc: **n)** $x^2+x+\frac{1}{4}$; **o)** $4a^2-6a+\frac{9}{4}$; **q)** $1-\frac{x^2}{4}$; **r)** $4x^2+3x+\frac{9}{16}$; **s)** $\frac{9}{4}-\frac{3x}{4}+\frac{x^2}{16}$; **t)** $4-\frac{a^2}{9}$;*
*__u)__ $\frac{9}{4}x^2-3+\frac{1}{x^2}$; **v)** $\frac{x^4}{4}-\frac{x^2}{9}$; **w)** $\frac{9}{4}x^2+\frac{3x}{4}+\frac{1}{16}$; **x)** $576-84x+\frac{49}{16}x^2$)*

☞ *Ejercicios libro ed. Editex: **pág. 32: 10a,b; pág. 34: 12; pág. 42: 31, 32 y 33***

Texto bajo licencia Crative Commons: se permite su utilización didáctica así como su reproducción impresa o digital siempre y cuando se respete la mención de su autoría, y sea sin ánimo de lucro. En otros casos se requiere el permiso del autor (alfonsogonzalopez@yahoo.es)

12. Operar y simplificar:

a) $(x+1)^2+(x-2)(x+2)$

b) $(3x-1)^2-(2x+5)(2x-5)$

c) $(2x+3)(-3+2x)-(x+1)^2$

d) $(-x+2)^2-(2x+1)^2-(x+1)(x-1)$

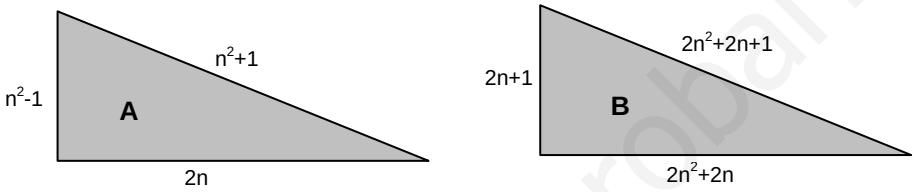
e) $-3x+x(2x-5)(2x+5)-(1-x^2)^2$

f) $(3x-1)^2-(-5x^2-3x)^2-(-x+2x^2)(2x^2+x)$

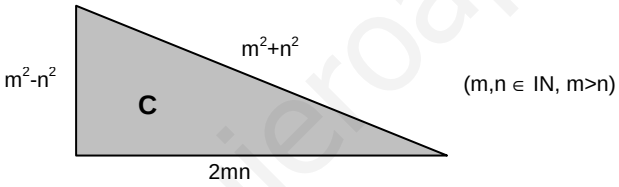
☞ *Ejercicios libro ed. Editex:* ***pág. 42: 34***

(Soluc: ***a)*** $2x^2+2x-3$; ***b)*** $5x^2-6x+26$; ***c)*** $3x^2-2x-10$; ***d)*** $-4x^2-8x+4$; ***e)*** $-x^4+4x^3+2x^2-28x-1$; ***f)*** $-29x^4-30x^3+x^2-6x+1$*)*

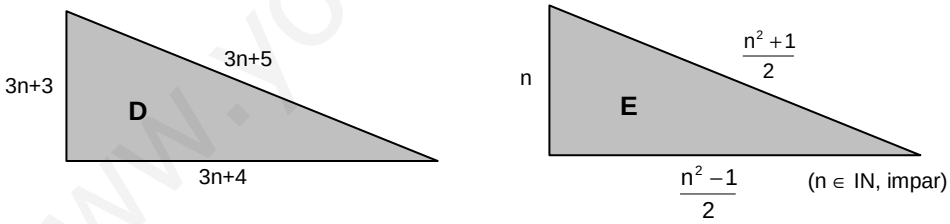
13. El matemático griego Pitágoras (siglo VI a.C) conocía las dos siguientes posibles formas de construir un triángulo rectángulo con sus tres lados de longitud entera, llamadas **ternas pitagóricas**, sin más que dar valores a $n\in$ IN:



Por su parte, Euclides (s. III a.C.) conocía la siguiente fórmula general, que engloba a las dos anteriores:



Finalmente, he aquí otras dos ternas pitagóricas de autor desconocido:



Demostrar la veracidad de estas fórmulas. Generar algunos casos concretos.

14. Demostrar que $(a^2+b^2)(c^2+d^2)=(ac-bd)^2+(ad+bc)^2$

15. Probar que la diferencia entre los cuadrados de dos enteros pares consecutivos es siempre el cuádruple de un impar. Comprobarlo con ejemplos.

Potencia de un binomio:

16. Desarrollar, aplicando el **triángulo de Tartaglia**:

a) $(x+2)^4$ | **b)** $(x^2+3)^6$ | **c)** $(2x^2+3y)^6$ | **d)** $(2x^3+5)^5$

Texto bajo licencia Crative Commons: se permite su utilización didáctica así como su reproducción impresa o digital siempre y cuando se respete la mención de su autoría, y sea sin ánimo de lucro. En otros casos se requiere el permiso del autor (alfonsogonzalopez@yahoo.es)

www.yoquieroaprobar.es

e) $(2x^4+5x)^5$

f) $\left(x+\frac{1}{x}\right)^4$

g) $\left(x+\frac{1}{2}\right)^5$

h) $(a-b)^5$

i) $(x-3)^3$

j) $(3x-2)^4$

k) $(x^2-3x)^5$

l) $(3x-2y)^6$

m) $(2x^2-4)^4$

n) $\left(x-\frac{1}{2}\right)^5$

o) $(2-3x^2)^5$

p) $\left(2x-\frac{1}{3}\right)^4$

q) $(2x-3)^6$

r) $\left(\frac{x}{2}-3\right)^6$

s) $(-x-1)^4$

t) $(2x-1)^5$

u) $\left(x-\frac{1}{x}\right)^4$

v) $\left(\frac{x}{3}-3\right)^5$

☞ *Ejercicio libro ed. Editex:* ***pág. 32: 10c***

(Sol: ***a)*** $x^4+8x^3+24x^2+32x+16$; ***b)*** $x^{12}+18x^{10}+135x^8+540x^6+1215x^4+1458x^2+729$;
c) $64x^{12}+576x^{10}y+2160x^8y^2+4320x^6y^3+4860x^4y^4+2916x^2y^5+729y^6$; ***d)*** $32x^{15}+400x^{12}+2000x^9+5000x^6+6250x^3+3125$;
e) $32x^{20}+400x^{17}+2000x^{14}+5000x^{11}+6250x^8+3125x^5$; ***f)*** $x^4+4x^2+6+4/x^2+1/x^4$; ***g)*** $x^5+5x^4/2+5x^3/2+5x^2/4+5x/16+1/32$;
h) $a^5-5a^4b+10a^3b^2-10a^2b^3+5ab^4-b^5$; ***i)*** $x^3-9x^2+27x-27$; ***j)*** $81x^4-216x^3+216x^2-96x+16$;
k) $x^{10}-15x^9+90x^8-270x^7+405x^6-243x^5$; ***l)*** $729x^6-2916x^5y+4860x^4y^2-4320x^3y^3+2160x^2y^4-576xy^5+64y^6$;
m) $16x^8-128x^6+384x^4-512x^2+256$; ***n)*** $x^5-5x^4/2+5x^3/2-5x^2/4+5x/16-1/32$; ***o)*** $32-240x^2+720x^4-1080x^6+810x^8-243x^{10}$;
p) $16x^4-32x^3/3+8x^2/3-8x/27+1/81$; ***q)*** $64x^6-576x^5+2160x^4-4320x^3+4860x^2-2916x+729$;
r) $x^6/64-9x^5/16+134x^4/16-135x^3/2+1215x^2/4-729x+729$*)*

Cociente de polinomios:

17. Efectuar los siguientes **cocientes** en los que intervienen **monomios**, dando el resultado simplificado:

a) $\frac{4x^3}{2x^2}=$

b) $8x^4:\left(-2x^2\right)=$

c) $\frac{7x^5}{2x^3}=$

d) $-8x^3:\left(2x^2\right)=$

e) $-8x^3:2x^2=$

f) $\frac{-3x^7}{-9x^4}=$

g) $6x^3y^4:\left(2x^2y\right)=$

h) $\frac{\frac{2}{3}x^2y^2z}{\frac{3}{2}xy^2}=$

i) $\frac{-9a^4b^3c^2}{3ab^2c}=$

j) $\frac{6x^5-9x^2+3x}{3x}=$

k) $\frac{-12x^4+6x^3-4x^2}{-2x^2}=$

l) $\frac{-6x^8-7x^4-\frac{3}{4}x^3}{-\frac{5}{3}x^3}=$

m) $\frac{-8x^9+\frac{3}{2}x^5-x^4}{-\frac{3}{7}x^4}=$

n) $(-18x^3yz^3):(6xyz^3)=$

o) $\frac{-3a(a^3b)+5a^4b}{-a^2b}=$

p) $\frac{-3xy^2(-2x^3y)}{4x^2y}=$

(Soluc: ***j)*** $2x^4-3x+1$; ***k)*** $6x^2-3x+2$; ***l)*** $18x^5/5+21x/5+9/20$; ***m)*** $56x^5/3-7x/2+7/3$; ***n)*** $-3x^2$; ***o)*** $-2a^2$; ***p)*** $3x^2y^2/2$*)*

18. Efectuar los siguientes **cocientes**, indicando claramente el cociente C(x) y el resto R(x), y comprobar el resultado mediante la regla D=d·C+R:

1. $x^4-x^3+7x^2+x+15 \mid x^2+2$ *(Soluc: C(x)=x^2-x+5; R(x)=3x+5)*

2. $2x^5-x^3+2x^2-3x-3 \mid 2x^2-3$ *(Soluc: C(x)=x^3+x+1; División exacta)*

Texto bajo licencia Crative Commons: se permite su utilización didáctica así como su reproducción impresa o digital siempre y cuando se respete la mención de su autoría, y sea sin ánimo de lucro. En otros casos se requiere el permiso del autor (alfonsogonzalopez@yahoo.es)

3. $6x^4-10x^3+x^2+11x-6 \mid 2x^2-4x+3$ *(Soluc: C(x)=3x²+x−2; División exacta)*

4. $x^3+2x^2+x-1 \mid x^2-1$ *(Soluc: C(x)=x+2; R(x)=2x+1)*

5. $8x^5-16x^4+20x^3-11x^2+3x+2 \mid 2x^2-3x+2$ *(Soluc: C(x)=4x³−2x²+3x+1; División exa*

6. $x^4+3x^3-2x+5 \mid x^3+2$ *(Soluc: C(x)=x+3; R(x)=−4x−1)*

7. $x^5-2x^4+3x^2-6 \mid x^4+1$ *(Soluc: C(x)=x−2; R(x)=3x²−x−4)*

8. $x^2 \mid x^2+1$ *(Soluc: C(x)=1; R(x)= −1)*

9. $3x^6+2x^4-3x^2+5 \mid x^3-2x+4$ *(Soluc: C(x)=3x³+8x−12; R(x)=13x²−56x+53)*

10. $x^8 \mid x^2+1$ *(Soluc: C(x)=x⁶−x⁴+x²−1; R(x)=1)*

11. $x^3-4x^2+5x-8 \mid x-2$ *(Soluc: C(x)=x²−2x+1; R=−6)*

12. $x^2+1 \mid x^2-4x+13$ *(Soluc: C(x)=1; R(x)= 4x−12)*

13. $2x^5+3x^2-6 \mid x+3$ *(Soluc: C(x)=2x⁴−6x³+18x²−51x+153; R(x)= −465)*

14. $6x^2-5 \mid 3x$ *(Soluc: C(x)=2x; R(x)= −5)*

15. $x^4-7x^3+8x^2-2 \mid x-1$ *(Soluc: C(x)=x³−6x²+2x+2; División exacta)*

16. $2x-1 \mid 2$ *(Soluc: C(x)=x; R(x)= −1)*

17. $3x^5-x^4+8x^2-5x-2 \mid x^2-x+1$ *(Soluc: C(x)=3x³+2x²−x+5; R(x)=x−7)*

18. $4x+1 \mid 2x$ *(Soluc: C(x)=2; R(x)= 1)*

19. $5x^4-2x^3+x-7 \mid x^2-1$ *(Soluc: C(x)=5x²−2x+5; R(x)=−x−2)*

20. $1+x \mid 1-x$ *(Soluc: C(x)= −1; R(x)= 2)*

21. $4x^5-3x^3+5x^2-7 \quad 2x^2-3x+5$ *(Soluc: C(x)=2x³+3x²−2x−8; R(x)=−14x+33)*

22. $9x^3+3x^2-7x+2 \mid 3x^2+5$ *(Soluc: C(x)=3x+1; R(x)=−22x−3)*

23. $4x^4-3x^2+5x-7 \mid 2x^2+x-3$ *(Soluc: C(x)=2x²−x+2; R(x)=−1)*

24. $4x^5+3x^3-2x^2+5 \mid 2x^2-x+3$ *(Soluc: C(x)=2x³+x²−x−3; R(x)=14)*

25. $6x^4+5x^2-3x+8 \mid 3x^3-2x-3$ *(Soluc: C(x)=2x; R(x)=9x²+3x+8)*

26. $4x^4+2x^3-3x^2+5x-1 \mid 2x^2-3$ *(Soluc: C(x)=2x²+x+3/2; R(x)=8x+7/2)*

27. $8x^4+3x^3+2x-2 \mid 4x^2+x-3$ *(Soluc: C(x)=2x²+x/4+23/16; R(x)=21x/16+37/16)*

28. $2x^5-x^3+3x-9 \mid 2x^2-x+2$ *(Soluc: C(x)=x³+x²/2−5x/4−9/8; R(x)=35x/8−27/4)*

29. $6x^3-3x^2+2x-5 \mid 3x-2$ *(Soluc: C(x)=2x²+x/3+8/9; R(x)=−29/9)*

30. $4x^4-x^3+x+5 \mid 2x^2-x+3$ *(Soluc: C(x)=2x²+x/2−11/4; R(x)=−13x/4+53/4)*

31. $6x^4+3x^3-5x^2+x-8 \mid 3x^2-5x+2$ *(Soluc: C(x)=2x²+13x/3+38/9; R(x)=121x/9−148/9)*

32. $8x^4-3x^2+7x-5 \mid 4x^2-3x+2$ *(Soluc: C(x)=2x²+3x/2−5/8; R(x)=17x/8−15/4)*

www.yoquieroaprobar.es

Texto bajo licencia Crative Commons: se permite su utilización didáctica así como su reproducción impresa o digital siempre y cuando se respete la mención de su autoría, y sea sin ánimo de lucro. En otros casos se requiere el permiso del autor (alfonsogonzalopez@yahoo.es)

33. $6x^5+5x^4+31x^2+2 \,|\, 2x^2+2$ *(Soluc: $C(x)=3x^3+5x^2/2-3x+13$; $R(x)=6x-24$)*

34. $3x^5-6x^4-x^3+10x^2-8x+2 \,|\, 3x^2-6x+1$ *(Soluc: $C(x)=x^3--2x/3+2$; $R(x)=14x/3$)*

35. $6x^4-x^3+2x^2-x-1 \,|\, 3x^2+2$ *(Soluc: $C(x)=2x^2--x/3-2/3$; $R(x)=-x/3+1/3$)*

36. $4x^4 \,|\, 2x^2-1$ *(Soluc: $C(x)=2x^2+1$; $R(x)=1$)*

37. $4x^4+x^3-x+1 \,|\, 2x^2-1$ *(Soluc: $C(x)=2x^2+x/2+1$; $R(x)=-x/2+2$)*

☞ *Ejercicios libro ed. Editex:* ***pág. 33: 11; pág. 42: 29***

19. Inventar una división de polinomios cuyo cociente sea $C(x)=x^2-3x+1$, el resto sea $R(x)=x-1$ y el dividendo un polinomio de 4º grado.

Regla de Ruffini:

20. Efectuar las siguientes divisiones mediante la **regla de Ruffini**, indicando claramente el cociente C(x) y el resto R(x), y comprobar el resultado:

1. $x^4-7x^3+8x^2-2 \,|\, x-1$ *(Soluc: $C(x)=x^3-6x^2+2x+2$; División exacta)*

2. $x^3-4x^2+5x-8 \,|\, x-2$ *(Soluc: $C(x)=x^2-2x+1$; $R=-6$)*

3. $2x^4+3x^3-4x^2+x-18 \,|\, x-2$ *(Soluc: $C(x)=2x^3+7x^2+10x+21$; $R=24$)*

4. $2x^5+3x^2-6 \,|\, x+3$ *(Soluc: $C(x)=2x^4-6x^3+18x^2-51x+153$; $R=-465$)*

5. $3x^4-10x^3-x^2-20x+5 \,|\, x-4$ *(Soluc: $C(x)=3x^3+2x^2+7x+8$; $R=37$)*

6. $2x^4-10x+8 \,|\, x+2$ *(Soluc: $C(x)=2x^3-4x^2+8x-26$; $R=60$)*

7. $10x^3-15 \,|\, x+5$ *(Soluc: $C(x)=10x^2-50x+250$; $R=-1265$)*

8. $x^3-2x^2-13x/2+3 \,|\, x+2$ *(Soluc: $C(x)=x^2-4x+3/2$; División exacta)*

9. $x^3-2x^2-3x \,|\, x+2$ *(Soluc: $C(x)=x^2-4x+5$; $R=-10$)*

10. $x^3-7x^2/2-10x/3-70 \,|\, x-6$ *(Soluc: $C(x)=x^2+5x/2+35/3$; División exacta)*

11. $x^3-2x^2 \,|\, x+2$ *(Soluc: $C(x)=x^2-4x+8$; $R=-16$)*

12. $x^4-2x^3/3+x^2/2+3x+1 \,|\, x+3$ $\left(Soluc: C(x)=x^3-\frac{11}{3}x^2+\frac{23}{2}x-\frac{63}{2};\ R(x)=\frac{191}{2}\right)$

13. $x^3+2x^2+3x+1 \,|\, x-1$ *(Soluc: $C(x)=x^2+3x+6$; $R=7$)*

14. $x^4-2x^3+x^2+3x+1 \,|\, x-2$ *(Soluc: $C(x)=x^3+x+5$; $R=11$)*

15. $x^3+a^3 \,|\, x+a$ *(Soluc: $C(x)=x^2-ax+a^2$; $R=0$)*

16. $x^3+x^2+x+1 \,|\, x+1$ *(Soluc: $C(x)=x^2+1$; División exacta)*

17. $x^3-a^3 \,|\, x-a$ *(Soluc: $C(x)=x^2+ax+a^2$; $R=0$)*

18. $2x^4+x^3-2x^2-1 \,|\, x+2$ *(Soluc: $C(x)=2x^3-3x^2+4x-8$; $R=15$)*

www.yoquieroaprobar.es

Texto bajo licencia Crative Commons: se permite su utilización didáctica así como su reproducción impresa o digital siempre y cuando se respete la mención de su autoría, y sea sin ánimo de lucro. En otros casos se requiere el permiso del autor (alfonsogonzalopez@yahoo.es)

19. $1+x \,|\, 1-x$ *(Soluc: C(x)=−1; R=2)*

20. $2x^4-7x^3+4x^2-5x+6 \,|\, x-3$ *(Soluc: C(x)=$2x^3-x^2+x-2$; División exacta)*

21. $x^3+2x^2+3x \,|\, x-1$ *(Soluc: C(x)=x^2+3x+6; R=6)*

22. $x^5+1 \,|\, x-1$ *(Soluc: C(x)=$x^4+x^3+x^2+x+1$; R=2)*

23. $2x^3+3x^2-1 \,|\, x-1/2$ *(Soluc: C(x)=$2x^2+4x+2$; División exacta)*

24. $x^3-5x^2+3x \,|\, x$ *(Soluc: C(x)=x^2-5x+3; División exacta)*

25. $3x^3+2x^2+2x-1 \,|\, x-1/3$ *(Soluc: C(x)=$3x^2+3x+3$; División exacta)*

26. $x^4+x^3-x^2+x-1 \,|\, x+2$ *(Soluc: C(x)=x^3-x^2+x-1; R=1)*

27. $2x^3-x^2-x-3 \,|\, 2x-3$ *(Soluc: C(x)=x^2+x+1; División exacta)*

(Ayuda: Dividir entre 2 ambos términos)

28. $ax^3-3a^2x^2+2a^3x+1 \,|\, x-a$ *(Soluc: C(x)=ax^2-2a^2x; R=1)*

☞ *Ejercicios libro ed. Editex:* ***pág. 35: 15; pág. 43: 39***

Teorema del resto:

RECORDAR:

TEOREMA DEL RESTO: "El resto de la división de P(x) por x−a coincide con el valor numérico P(a)"

Ejemplo: Al efectuar la división de $P(x)=x^2+x-2$ entre x−1 se obtiene resto cero, como cabía esperar, puesto que P(1)=0

Utilidad: El th. del resto permite predecir, **sin necesidad de efectuar la división**, si se trata de una división exacta.

21. Comprobar el **teorema del resto** mediante las primeras divisiones del ejercicio anterior.

22. Dado $P(x)=2x^2-x-3$, comprobar si es divisible por x+1 o por x−2 mediante el teorema del resto. Comprobar a continuación efectuando la división ¿Cuál es el otro factor por el que es divisible? *(Soluc: SÍ; NO; 2x−3)*

23. Determinar, aplicando el teorema del resto, el valor de **a** para que el resto de la división $x^5+3x^4+ax^3+9x^2+2x-7 \,|\, x-3$ sea −1; comprobar, a continuación, el resultado obtenido haciendo la división. *(Soluc: a=−3)*

24. Averiguar, sin efectuar la división, cuáles de las siguientes divisiones son exactas:

a) $x^3-3x^2+2x-10 \,|\, x-4$ *(Soluc: NO)*

b) $x^3-x^2+x+14 \,|\, x+2$ *(Soluc: SÍ)*

c) $x^6-1 \,|\, x-1$ *(Soluc: SÍ)*

d) $x^5-3x^3+2x \,|\, x-4$ *(Soluc: NO)*

25. Hallar, de dos formas distintas, el valor de **m** en cada caso para que las siguientes divisiones sean exactas:

a) $x^3+8x^2+4x+m \,|\, x+4$ *(Soluc: m=−48)*

b) $2x^3-10x^2+mx+25 \,|\, x-5$ *(Soluc: m=−5)*

Texto bajo licencia Crative Commons: se permite su utilización didáctica así como su reproducción impresa o digital siempre y cuando se respete la mención de su autoría, y sea sin ánimo de lucro. En otros casos se requiere el permiso del autor (alfonsogonzalopez@yahoo.es)

www.yoquieroaprobar.es

c) $2x^4+mx^3-4x^2+40$ | x−2 *(Soluc: m=−7)*

d) $mx^2-3x-744$ | x−8 *(Soluc: m=12)*

e) x^2+4x-m | x+3 *(Soluc: m=−3)*

f) x^3-5x^2+m | x−1 *(Soluc: m=4)*

g) $5x^4+2x^2+mx+1$ | x−3 *(Soluc: m=−424/3)*

h) $x^5-4x^3+mx^2-10$ | x+1 *(Soluc: m=7)*

Teorema del factor:

RECORDAR:

TEOREMA DEL FACTOR: "P(x) es divisible por x−a (o dicho de otra forma, P(x) contiene el factor x−a) si se cumple que P(a)=0"

Ejemplo: Dado $P(x)=x^2+x-2$, como P(1)=0, podemos asegurar que P(x) es divisible por x−1

De hecho, puede comprobarse que al factorizarlo se obtiene $x^2+x-2=(x-1)(x+2)$

(Nótese que el th. del factor es a la división polinómica lo que los criterios de divisibilidad eran a la división numérica)

26. Comprobar, sin efectuar la división, que $x^{99}+1$ | x+1 es exacta. *(Soluc: Al hacer P(−1), sale 0)*

27. Comprobar que x^2-2x-3 es divisible por x−3 sin efectuar la división. Comprobar el resultado obtenido haciendo la división. ¿Por qué otro factor es divisible? *(Soluc: P(x)=(x−3)(x+1))*

28. Estudiar si $P(x)=x^2+x-2$ es divisible por x+2 y/o por x−3, sin efectuar la división. Comprobar el resultado obtenido haciendo la división. ¿Por qué otro factor es divisible? *(Soluc: divisible por x+2 pero no por x−3)*

29. Estudiar si $P(x)=x^5-32$ es divisible por x−2 sin efectuar la división (Comprobar el resultado obtenido haciendo la división). *(Soluc: Sí es divisible)*

30. Sin necesidad de efectuar la división, ¿podemos asegurar que el polinomio $P(x)=x^{50}+x^{25}-x-1$ es divisible por x−1? ¿Por qué?

31. **TEORÍA:** Razonar, mediante ejemplos, que el teorema del factor viene a ser a la división polinómica lo que los criterios de divisibilidad eran a la división numérica

Factorización de polinomios de cualquier grado por Ruffini:

32. Dados los siguientes polinomios cuadráticos se pide: **i)** Obtener sus raíces y comprobarlas.
ii) A partir de las raíces anteriores, factorizarlos.
iii) Comprobar dicha factorización.

a) x^2-5x+6 **b)** x^2-2x-8 **c)** x^2-6x+9 **d)** $4x^2+23x--6$ **e)** x^2+x+1 **f)** $6x^2-7x+2$

33. Dados los siguientes polinomios se pide**:** **i)** Obtener sus raíces por Ruffini. **ii)** Comprobar dichas raíces sustituyéndolas en P(x) **iii)** Factorizar P(x) a partir de sus raíces y comprobar dicha factorización:

a) $P(x)=x^3-4x^2+x+6$ *(Soluc: x=-1,2,3)*

b) $P(x)=x^3+x^2-5x+3$ *(Soluc: x=1doble,−3)*

c) $P(x)=x^4-8x^3+17x^2+2x-24$ *(Soluc: x=−1,2,3,4)*

d) $P(x)=x^4-2x^2+1$ *(Soluc: x=−1doble,1doble)*

e) $P(x)=6x^4+x^3-25x^2-4x+4$ *(Soluc: x=±2,−1/2,1/3)*

Texto bajo licencia Crative Commons: se permite su utilización didáctica así como su reproducción impresa o digital siempre y cuando se respete la mención de su autoría, y sea sin ánimo de lucro. En otros casos se requiere el permiso del autor (alfonsogonzalopez@yahoo.es)

34. Sabiendo que una de sus raíces es x=1/2, factorizar $P(x)=2x^4-3x^3+3x^2-3x+1$

35. Dadas las siguientes ecuaciones polinómicas se pide:

i) Resolverlas por Ruffini.

ii) Comprobar las soluciones obtenidas sustituyéndolas en la ecuación.

iii) A partir de sus raíces, factorizar el polinomio y comprobar dicha factorización.

1. $x^3-6x^2+11x-6=0$ *(Soluc: x=1,2,3)*

2. $x^3+x^2-9x-9=0$ *(Soluc: x=−1,−3,3)*

3. $x^4-2x^3-17x^2+18x+72=0$ *(Soluc: x=−2, ±3, 4)*

4. $x^4-x^3-13x^2+25x-12=0$ *(Soluc: x=−4, 1 doble, 3)*

5. $x^4-x^3+2x^2+4x-8=0$ *(Soluc: carece de raíces $\in \mathbb{Q}$)*

6. $3x^3+x^2-8x+4=0$ *(Soluc: x=−2,1,2/3)*

7. $x^5-3x^4-5x^3+15x^2+4x-12=0$ *(Soluc: x=±1,±2,3)*

8. $x^4-5x^2+4=0$ *(Soluc: x=±1,±2) (También se puede hacer por ecuación bicuadrada)*

9. $x^4+2x^3-5x^2-6x=0$ *(Soluc: x=−3,−1,0,2)*

10. $x^4+2x^3-7x^2-8x+12=0$ *(Soluc: x=1, ±2, -3)*

11. $x^3-5x^2-5x-6=0$ *(Soluc: x=6)*

12. $x^3+2x^2-2x-4=0$ *(Soluc: x=−2, ±√2)*

13. $x^5-2x^4-x+2=0$ *(Soluc: x=±1,2)*

14. $x^4-6x^3+11x^2-6x=0$ *(Soluc: x=0,1,2,3)*

15. $6x^4+11x^3-28x^2-15x+18=0$ *(Soluc: x=−1,−3,2/3,3/2)*

16. $\frac{3-x}{2}=\frac{1}{x^2}$ *(Soluc: x=1, 1±√3)*

17. $x^3+3x^2-10x-24=0$ *(Soluc: x=−4,−2,3)*

18. $x^3+2x^2-15x-36=0$ *(Soluc: x=−3 doble,4)*

19. $x^3-3x^2+3x-1=0$ *(Soluc: x=1 triple)*

20. $x^3-8=0$ *(Soluc: x=2)*

36. Dados los siguientes polinomios, se pide:

i) Obtener sus raíces reales por Ruffini.

ii) Comprobar dichas raíces sustituyéndolas en P(x)

iii) Factorizar P(x) a partir de sus raíces y comprobar dicha factorización.

1. $P(x)=x^4+4x^3+7x^2+8x+4$ *(Soluc: x=−2,−1)*

2. $P(x)=6x^3+7x^2-9x+2$ *(Soluc: x=−2,1/2,1/3)*

3. $P(x)=x^4-x^3+2x^2-4x-8$ *(Soluc: x=−1,2)*

4. $P(x)=x^4-5x^3+5x^2+5x-6$ *(Soluc: x=2,3,±1)*

5. $P(x)=x^4-3x^3+5x^2-9x+6$ *(Soluc: x=1,2)*

6. $P(x)=x^4-5x^2+4$ *(También se puede hacer por ecuación bicuadrada)*

7. $P(x)=x^4-5x^2-36$ *(También se puede hacer por ecuación bicuadrada)*

www.yoquieroaprobar.es

Texto bajo licencia Crative Commons: se permite su utilización didáctica así como su reproducción impresa o digital siempre y cuando se respete la mención de su autoría, y sea sin ánimo de lucro. En otros casos se requiere el permiso del autor (alfonsogonzalopez@yahoo.es)

8. $P(x)=x^4-2x^3-2x^2-2x-3$ *(Soluc: x=−1,3)*

9. $P(x)=x^4-6x^2+7x-6$ *(Soluc: x=2,−3)*

10. $P(x)=x^4-3x^3-3x^2+7x+6$ *(Soluc: x=−1 doble,2,3)*

11. $P(x)=12x^4-25x^3+25x-12$ *(Soluc: x=±1,4/3,3/4)*

12. $P(x)=2x^4-x^3+6x^2-7x$ *(Soluc: x=0, 1)*

13. $P(x)=x^4-x^3-x^2-x-2$ *(Soluc: x=1)*

14. $P(x)=x^5-x^3-x^2+1$ *(Soluc: x=±1)*

15. $P(x)=x^4-2x^3-7x^2+5x-6$ *(Soluc: carece de raíces ε Q)*

16. $P(x)=3x^4-9x^3-6x^2+36x-24$ *(Soluc: x=1,2 doble,−2)*

17. $P(x)=6x^4+11x^3-13x^2-16x+12$ *(Soluc: x=1, −2, 2/3, −3/2)*

18. $P(x)=x^6+6x^5+9x^4-x^2-6x-9$ *(Soluc: x=±1,−3 doble)*

☞ *Ejercicios libro ed. Editex:* ***pág. 37: 19; pág. 43: 55 y 57***

CONSECUENCIA:

TEOREMA FUNDAMENTAL DEL ÁLGEBRA: "Un polinomio de grado *n* tiene a lo sumo *n* raíces reales"

37. Resolver la ecuación $2x^3-3x^2=-\frac{1}{2}$, sabiendo que una de sus raíces es 1/2 *(Soluc: x=±1/2, 3/2)*

38. Resolver la ecuación $\sqrt[3]{x-2}=x$ *(Sol: x=2)*

39. ¿Serías capaz de resolver la ecuación $\sqrt[3]{x}=2\sqrt{x}-1$? Aunque es un poco complicada para este curso, puedes resolverla con los conocimientos ya adquiridos: tendrás que aplicar Tartaglia y Ruffini… *(Sol: x=1)*

40. Resolver: **a)** $\left.\begin{array}{l}\frac{1}{x}-\frac{1}{y}=\frac{1}{2}\\ y-x^2=1\end{array}\right\}$ *(Soluc: x=1, y=2)* **b)** $\left.\begin{array}{l}y=\frac{3}{2}x-\frac{1}{2}\\ y=\sqrt{x^3}\end{array}\right\}$ *(Soluc: x=1; y=1)*

41. Inventar una ecuación polinómica que tenga únicamente por soluciones x=−2, x=1 y x=3

42. Inventar, de dos formas distintas, una ecuación polinómica que tenga únicamente como raíces 1 y 2

☞ *Ejercicios libro ed. Editex:* ***pág. 43: 48, 50 y 52***

43. Determinar el polinomio de grado 3 que verifica: P(-1)=P(2)=P(−3)=0 y P(−2)=18

44. Un polinomio de grado 3, ¿cuántas raíces puede tener como mínimo? Razonar la respuesta. *(Soluc: 1 raíz)*

45. Demostrar de dos formas (por Ruffini u operando directamente) que:

$$x^n-1=(x-1)\left(x^{n-1}+x^{n-2}+\ldots+x+1\right)$$

CURIOSIDAD MATEMÁTICA: REGLA DE LOS SIGNOS DE DESCARTES

El francés René Descartes (1596-1650) encontró un método para predecir el número de raíces de un polinomio ordenado: « La cantidad de raíces positivas de f(x)=0 es el número de variaciones del

www.yoquieroaprobar.es

Texto bajo licencia Crative Commons: se permite su utilización didáctica así como su reproducción impresa o digital siempre y cuando se respete la mención de su autoría, y sea sin ánimo de lucro. En otros casos se requiere el permiso del autor (alfonsogonzalopez@yahoo.es)

signo de los coeficientes de f(x) o disminuido en ese número en una cantidad par, y de raíces negativas es el número de variaciones del signo de los coeficientes de f(-x) o disminuido en ese número en una cantidad par» (es importante insistir en que, para poder aplicar la regla, el polinomio f(x) ha de estar ordenado).

Ejemplos:

$f(x)=x^2 + x - 12$ tiene un cambio de signo, del 2º al 3er término $\Rightarrow$ tiene una raíz positiva (sus raíces son –4 y 3)

$f(x)=x^3 - 4x^2 + x + 6$ tiene dos cambios de signo $\Rightarrow$ tiene dos raíces positivas (raíces –1, 2 y 3)

$f(x)=x^4 - 5x^2 + 4$ tiene dos raíces positivas (raíces ± 1 y ± 2)

$f(x)=x^3 + 4x^2 + 3x$ no tiene cambios de signo $\Rightarrow$ no tiene raíces reales positivas (raíces 0, –1 y –3)

$f(x)=x^3 - 2x^2 - 5x + 6$, ¿cuántas raíces positivas tiene como máximo?

www.yoquieroaprobar.es

Texto bajo licencia Crative Commons: se permite su utilización didáctica así como su reproducción impresa o digital siempre y cuando se respete la mención de su autoría, y sea sin ánimo de lucro. En otros casos se requiere el permiso del autor (alfonsogonzalopez@yahoo.es)