2

BLOQUE 1. ARITMÉTICA Y ÁLGEBRA

Polinomios y fracciones algebraicas

1. Polinomios
- 1.1. Valor numérico de un polinomio
- 1.2. Raíces de un polinomio

2. Operaciones con polinomios
- 2.1. Suma
- 2.2. Resta
- 2.3. Multiplicación
- 2.4. División
- 2.5. Regla de Ruffini

3. Factorización de polinomios
- 3.1. Teorema del resto
- 3.2. Teorema del factor
- 3.3. Factorización

4. Fracciones algebraicas
- 4.1. Fracciones algebraicas equivalentes
- 4.2. M.C.D. y m.c.m. de polinomios
- 4.3. Simplificación de fracciones algebraicas

5. Operaciones con fracciones algebraicas
- 5.1. Suma y resta
- 5.2. Multiplicación
- 5.3. División
- 5.4. Descomposición de fracciones algebraicas en fracciones simples

Problemas interactivos

Simulador

Noticias

En Chile, Franco Parisi, el ingeniero comercial conocido como "el economista de los pobres", propone ajustar el sueldo mínimo a un polinomio, una ecuación de ajuste automático anual, en función del producto geográfico bruto per cápita. A su juicio, «se puede tener un Chile para todos, donde todos son bienvenidos, pero también donde alcanza, y eso es lo que no está ocurriendo. El salario mínimo: hagamos un polinomio y se acabó la tortura…».

Adaptado de: **http://www.andime.cl** y **http://links.edebe.com/j2**

EN CONTEXTO

a> Lee la noticia anterior, reflexiona y responde: ¿qué otras situaciones conoces que crees que pueden resolverse mediante polinomios o fórmulas matemáticas? Haz la pregunta a personas de tu entorno y compara sus respuestas con la tuya.

b> Observa la imagen:

— Escribe en tu cuaderno qué ves en ella, qué piensas al observarla y qué pregunta te sugiere.

— En pequeños grupos, exponed vuestras respuestas de forma razonada.

— Finalmente, ponedlas en común con toda la clase y registrad las respuestas en un cuadro de observaciones.

c> La densidad de población se puede modelar mediante la fórmula:

$$D(x) = \frac{ax}{x^2 + b}$$

donde $D(x)$ representa la densidad de población a la distancia x (en km) del centro de la ciudad, y a y b son constantes relacionadas con las características propias de la localidad. Cuanto más cerca del centro, mayor es la densidad de población.

— ¿Podrías decir dónde está el centro de la urbe de la imagen?

— ¿Hay zonas de tu ciudad más pobladas que otras?

— ¿Crees que este hecho tiene relación con lo cerca o lejos que dichas zonas están del centro de la ciudad?

— Razona si tu ciudad responde al modelo descrito por la fórmula del enunciado.

1. Polinomios
1.1. Valor numérico de un polinomio
1.2. Raíces de un polinomio

1. Polinomios

Los **polinomios** son expresiones algebraicas que relacionan constantes y variables. Aunque formalmente son relativamente simples, pueden describir gran cantidad de fenómenos y, por ello, resultan una potente herramienta matemática utilizada en disciplinas como la informática o la ingeniería.

Un polinomio es una expresión algebraica compuesta por la suma o resta de dos o más monomios.

Se designan por una letra mayúscula, seguida de la variable o variables que aparecen en su expresión, entre paréntesis:

$$P(z) = 2z^3 + 2z^2 - 9; \qquad Q(x, y) = -3x^2 + 5y + 3xy - 2$$

Si restringimos nuestro estudio al caso de una única variable indeterminada:

Un **polinomio en la indeterminada *x*** es una expresión algebraica del tipo: $P(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0$

Consideremos el polinomio $P(x) = 4x^3 + 3x^2 - 2x + 8$:

— Cada uno de los monomios que forman el polinomio se denomina **término** del polinomio. En este caso, los términos son: $4x^3$, $3x^2$, $-2x$ y 8.

— Los **coeficientes** de un polinomio son los números reales que multiplican a la variable en cada uno de sus términos; así, en el ejemplo: 4, 3, −2 y 8.

— El **término principal** es el término de mayor grado con coeficiente no nulo, en este caso, $4x^3$. Su grado determina el **grado del polinomio**, que en nuestro ejemplo es 3.

— El **término independiente** es el monomio de grado 0; en este caso, 8.

Los términos de los polinomios suelen ordenarse en orden decreciente respecto a sus grados, en cuyo caso hablamos de **polinomio ordenado.** Finalmente, un **polinomio reducido** es aquel que no tiene monomios semejantes.

1.1. Valor numérico de un polinomio

Observa que si damos un valor a la indeterminada de un polinomio y efectuamos las operaciones indicadas, obtenemos como resultado un número real.

El **valor numérico** de un polinomio $P(x)$ para un valor dado $x = a$, $P(a)$, es el número real que se obtiene sustituyendo la variable x por su valor a y operando el polinomio.

1 EJEMPLO

Calcula el valor numérico del polinomio $P(x) = 5x^3 + 3x^2 - 7x + 8$ para $x = 2$.

Solución

COMPRENSIÓN. Debe sustituirse en la expresión del polinomio el valor $x = 2$.

RESOLUCIÓN. Sustituimos el valor $x = 2$ y obtenemos un valor numérico de 46:

$$P(2) = 5 \cdot 2^3 + 3 \cdot 2^2 - 7 \cdot 2 + 8 = 40 + 12 - 14 + 8 = 46$$

RECUERDA

Un **monomio** es una expresión algebraica en la que las únicas operaciones que aparecen entre sus variables son el producto y la potencia de exponente natural.

Si tiene una única variable indeterminada, un monomio es una expresión del tipo:

$$ax^n$$

donde a es un número real llamado **coeficiente** del monomio, x^n es la **parte literal**, x es la **indeterminada** y n, el **exponente**, es un número natural que indica el **grado** del monomio.

Dos monomios son **semejantes** si su parte literal es idéntica, es decir, si tienen la misma variable indeterminada y el mismo grado:

— $7x^2$ y $-3x^2$ son semejantes.

— $2z^5$ y $2z^2$ no son semejantes.

VOCABULARIO

Una **expresión algebraica** es la combinación de letras, números y signos de operaciones aritméticas. Las letras suelen representar cantidades desconocidas y se denominan *variables* o *incógnitas.*

INTERNET

En el apartado de Recursos de la siguiente web encontrarás un interesante documento sobre los primeros tratados de álgebra y sobre los primeros usos de las letras como elementos matemáticos:

http://links.edebe.com/hf5psr

Ejercicios y problemas
7, 8

1.2. Raíces de un polinomio

Existen ciertos valores de la variable, los que anulan el polinomio, que se denominan **raíces** o **ceros,** y que tienen especial importancia pues, como veremos en apartados siguientes, es muy útil calcularlos para factorizar polinomios, resolver ecuaciones polinómicas y simplificar fracciones algebraicas.

Las raíces de un polinomio son los valores de la variable indeterminada que hacen que su valor numérico sea 0:

$$a \text{ es raíz de } P(x) \Leftrightarrow P(a) = 0$$

Las **raíces enteras** de un polinomio cumplen las siguientes **propiedades:**

— Para que un número entero a sea raíz de un polinomio, es imprescindible que a sea divisor de su término independiente (siempre que este no sea nulo).

— El número de raíces enteras de un polinomio es siempre menor o igual que su grado.

2 EJEMPLO

Verifica si –2, 2 y 3 son raíces del polinomio $P(x) = 2x^2 - 8$.

Solución

COMPRENSIÓN. Las raíces del polinomio serán los valores de x que anulan el polinomio (hacen que su valor numérico sea cero).

RESOLUCIÓN. Sustituimos los distintos valores de x en la expresión del polinomio:

$P(x) = 2x^2 - 8$; $P(-2) = 2 \cdot (-2)^2 - 8 = 8 - 8 = 0 \rightarrow x = -2$ es raíz de $P(x)$.

$P(2) = 2 \cdot (2)^2 - 8 = 8 - 8 = 0 \rightarrow x = 2$ es raíz de $P(x)$.

$P(3) = 2 \cdot (3)^2 - 8 = 18 - 8 = 10 \rightarrow x = 3$ no es raíz de $P(x)$.

3 EJEMPLO

Calcula las raíces enteras del polinomio $P(x) = x^2 + x - 12$.

Solución

COMPRENSIÓN. Las raíces enteras del polinomio se encuentran entre los divisores del término independiente. Como el grado de $P(x)$ es 2, como máximo habrá dos raíces enteras.

RESOLUCIÓN. Realizamos una lista con todos los divisores (positivos y negativos) del término independiente y calculamos el valor numérico del polinomio para cada uno de los divisores: Div. (12) = $\{\pm 1, \pm 2, \pm 3, \pm 4, \pm 12\}$.

$P(1) = (1)^2 + 1 - 12 = -10 \rightarrow x = 1$ no es raíz de $P(x)$.

$P(-1) = (-1)^2 + (-1) - 12 = 1 - 1 - 12 = -12 \rightarrow x = -1$ no es raíz de $P(x)$.

$P(2) = (2)^2 + 2 - 12 = 4 + 2 - 12 = -6 \rightarrow x = 2$ no es raíz de $P(x)$.

$P(-2) = (-2)^2 + (-2) - 12 = 4 - 2 - 12 = -10 \rightarrow x = -2$ no es raíz de $P(x)$.

$P(3) = (3)^2 + 3 - 12 = 9 + 3 - 12 = 0 \rightarrow x = 3$ es raíz de $P(x)$.

$P(-3) = (-3)^2 + (-3) - 12 = 9 - 3 - 12 = -6 \rightarrow x = -3$ no es raíz de $P(x)$.

$P(4) = (4)^2 + 4 - 12 = 16 + 4 - 12 = 8 \rightarrow x = 4$ no es raíz de $P(x)$.

$P(-4) = (-4)^2 + (-4) - 12 = 16 - 4 - 12 = 0 \rightarrow x = -4$ es raíz de $P(x)$.

En este caso, el grado del polinomio es 2 y ya hemos hallado dos raíces. Así, las raíces de $P(x)$ son $x = 3$ y $x = -4$.

FÍJATE

Todos los polinomios que no tienen término independiente admiten como raíz $x = 0$.

En estos casos, podemos sacar factor común a la x: $P(x) = x\,Q(x)$.

Así pues, si calculamos el valor numérico del polinomio para $x = 0$, el resultado será cero, como corresponde a una raíz.

Por ejemplo:

Si $P(x) = x^2 + x = x\,(x + 1)$, entonces $P(0) = 0$ y $x = 0$ es una raíz.

LENGUAJE MATEMÁTICO

La utilidad del lenguaje algebraico para plantear y resolver problemas estriba en su simplicidad y precisión.

Uno de los problemas más antiguos de las matemáticas consiste en la **resolución** de ecuaciones algebraicas y en la determinación de las **raíces** de polinomios. La notación que aún hoy utilizamos se desarrolló a partir del siglo XV, pero no fue hasta el siglo XVI cuando aparecieron las primeras aproximaciones de raíces y **fórmulas** de polinomios de hasta grado cuatro.

Problemas resueltos
A

Ejercicios y problemas
9 a 12

2. Operaciones con polinomios
2.1. Suma
2.2. Resta
2.3. Multiplicación
2.4. División
2.5. Regla de Ruffini

FÍJATE

Al operar, escribiremos previamente los polinomios ordenados de forma decreciente.

Del mismo modo, el **resultado** de cualquier operación entre polinomios debe darse siempre en forma de polinomio **ordenado** y **reducido.**

FÍJATE

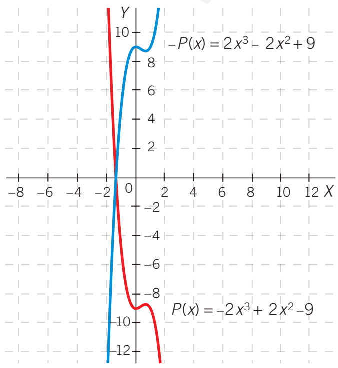
El **grado** del **polinomio suma** es siempre menor o igual que el del polinomio de mayor grado.

LENGUAJE MATEMÁTICO

— El **polinomio nulo $O(x)$** es aquel que tiene todos sus coeficientes nulos: $O(x) = 0x^n + 0x^{n-1} + \ldots + 0x + 0$.

Su **valor numérico** es **nulo** para cualquier valor de x, de ahí su nombre.

— Dado un polinomio $P(x)$, su **opuesto** es el polinomio que se obtiene cambiando el signo de todos sus términos. El polinomio opuesto se denota como $-P(x)$.



Polinomios opuestos.

2. Operaciones con polinomios

Las operaciones que vamos a realizar con polinomios son la suma, la resta, la multiplicación y la división.

2.1. Suma

Para **sumar** dos o más polinomios, se suman los términos semejantes de ambos, obteniéndose un nuevo polinomio. Si efectuamos la suma en vertical, escribimos los polinomios uno debajo del otro, de modo que en una misma columna estén los términos de igual grado, dejando, si es preciso, espacios en blanco.

Propiedades de la suma de polinomios

La suma de polinomios cumple las mismas propiedades que la suma de números reales:

— **Asociativa.** Dados tres polinomios $P(x)$, $Q(x)$ y $R(x)$, se verifica que $[P(x) + Q(x)] + R(x) = P(x) + [Q(x) + R(x)]$.

— **Conmutativa.** Dados dos polinomios $P(x)$ y $Q(x)$, se verifica que $P(x) + Q(x) = Q(x) + P(x)$.

— **Elemento neutro.** Para cualquier polinomio se verifica que $P(x) + O(x) = P(x)$, donde $O(x)$ es el **polinomio nulo.**

— **Elemento opuesto.** Para cualquier polinomio $P(x)$, existe $-P(x)$, tal que $P(x) + [-P(x)] = O(x) = 0$.

2.2. Resta

Para **restar** dos polinomios, sumamos al primer polinomio (minuendo) el opuesto del segundo (sustraendo), obteniéndose un nuevo polinomio:

$$P(x) - Q(x) = P(x) + [-Q(x)], \text{ donde } -Q(x) \text{ es el opuesto de } Q(x).$$

4 EJEMPLO

Dados los polinomios $P(x) = 5x^4 - 2x^2 + x + 8$ y $Q(x) = -3x^3 + 6x^2 - 3x - 1$, calcula $P(x) + Q(x)$ y $P(x) - Q(x)$.

Solución

COMPRENSIÓN. Hemos de operar los términos semejantes de los dos polinomios.

RESOLUCIÓN. En primer lugar, calculamos la suma:

$$P(x) + Q(x) = (5x^4 - 2x^2 + x + 8) + (-3x^3 + 6x^2 - 3x - 1) =$$
$$= 5x^4 - 3x^3 + (-2 + 6)x^2 + (1 - 3)x + (8 - 1) = 5x^4 - 3x^3 + 4x^2 - 2x + 7$$

Para determinar la diferencia, restamos los términos semejantes de los dos polinomios, o sumamos los términos semejantes del primer polinomio con los del opuesto del segundo:

$$P(x) - Q(x) = (5x^4 - 2x^2 + x + 8) - (-3x^3 + 6x^2 - 3x - 1) =$$
$$= (5x^4 - 2x^2 + x + 8) + (3x^3 - 6x^2 + 3x + 1) =$$
$$= 5x^4 + 3x^3 + (-2 - 6)x^2 + (1 + 3)x + (8 + 1) = 5x^4 + 3x^3 - 8x^2 + 4x + 9$$

Si operamos verticalmente:

	$5x^4$		$-2x^2$	$+x$	$+8$
(+)		$-3x^3$	$+6x^2$	$-3x$	-1
	$5x^4$	$-3x^3$	$+4x^2$	$-2x$	$+7$

	$5x^4$		$-2x^2$	$+x$	$+8$
(–)		$-3x^3$	$+6x^2$	$-3x$	-1
	$5x^4$	$+3x^3$	$-8x^2$	$+4x$	$+9$

2.3. Multiplicación

Para **multiplicar** dos polinomios, multiplicamos todos los términos del primero por cada uno de los términos del segundo y sumamos los monomios obtenidos. Dicho de otra forma, aplicamos la propiedad distributiva del producto de números reales respecto de la suma. El resultado será un nuevo polinomio.

La **multiplicación de un número real por un polinomio** es un caso concreto de la multiplicación de dos polinomios, uno de los cuales es un polinomio de grado cero.

RECUERDA

El **producto de dos monomios** ax^m y bx^n es otro monomio abx^{m+n}.

5 EJEMPLO

Dados los polinomios $P(x) = 3x^2 - 2x + 3$ y $Q(x) = 3x - 1$, calcula su producto.

Solución

COMPRENSIÓN. Multiplicamos todos los términos del segundo polinomio por cada uno de los monomios del primero (o viceversa).

RESOLUCIÓN. Si aplicamos la propiedad distributiva del producto respecto de la suma:

$$P(x) \cdot Q(x) = (3x^2 - 2x + 3) \cdot (3x - 1) = 3x^2 \cdot 3x + 3x^2 \cdot (-1) + (-2x) \cdot 3x + (-2x) \cdot (-1) +$$
$$+ 3 \cdot 3x + 3 \cdot (-1) = 9x^3 - 3x^2 - 6x^2 + 2x + 9x - 3 = 9x^3 - 9x^2 + 11x - 3$$

Donde, para terminar, hemos reducido los términos semejantes y ordenado el polinomio.

Verticalmente, en la primera línea escribimos el producto de $P(x)$ por -1 y en la segunda, el producto de $P(x)$ por $3x$. Después, sumamos ambas:

$P(x)$		$3x^2$	$-2x$	$+3$
$Q(x)$			$3x$	-1
1.ª línea:		$-3x^2$	$+2x$	-3
2.ª línea:	$9x^3$	$-6x^2$	$+9x$	
$P(x) \cdot Q(x)$	$9x^3$	$-9x^2$	$+11x$	-3

FÍJATE

Al multiplicar dos polinomios, el **grado** del **polinomio resultante** es igual a la suma de los grados de los polinomios que se multiplican.

Propiedades de la multiplicación de polinomios

La multiplicación de polinomios cumple las mismas propiedades que la multiplicación de números reales:

— **Asociativa.** Dados tres polinomios $P(x)$, $Q(x)$ y $R(x)$, se verifica que $[P(x) \cdot Q(x)] \cdot R(x) = P(x) \cdot [Q(x) \cdot R(x)]$.

— **Conmutativa.** Dados dos polinomios $P(x)$ y $Q(x)$, se verifica que $P(x) \cdot Q(x) = Q(x) \cdot P(x)$.

— **Elemento neutro.** Para cualquier polinomio se verifica que $P(x) \cdot 1 = P(x)$, donde 1 es el polinomio neutro.

— **Distributiva de la multiplicación respecto de la suma.** Dados tres polinomios, $P(x) \cdot [Q(x) + R(x)] = P(x) \cdot Q(x) + P(x) \cdot R(x)$.

LENGUAJE MATEMÁTICO

El **polinomio neutro** es aquel que únicamente tiene término independiente, que es igual a 1.

FÍJATE

Es importante procurar que la presentación de los cálculos y los resultados obtenidos sea ordenada para evitar errores.

6 EJEMPLO

Comprueba la propiedad conmutativa del producto de $P(x) = x^2 + 3x$ y $Q(x) = x + 2$.

Solución

COMPRENSIÓN. Verificamos el enunciado de la propiedad conmutativa del producto de polinomios.

RESOLUCIÓN. Multiplicamos $P(x) \cdot Q(x)$ y $Q(x) \cdot P(x)$ y comprobamos si se obtiene el mismo resultado.

$$P(x) \cdot Q(x) = (x^2 + 3x) \cdot (x + 2) = x^3 + 2x^2 + 3x^2 + 6x = x^3 + 5x^2 + 6x$$
$$Q(x) \cdot P(x) = (x + 2) \cdot (x^2 + 3x) = x^3 + 3x^2 + 2x^2 + 6x = x^3 + 5x^2 + 6x$$

2.4. División

FÍJATE

Para dividir dos polinomios, se debe cumplir que el grado del dividendo sea igual o mayor que el grado del divisor.

Al dividir un polinomio $P(x)$ de grado m entre otro polinomio $Q(x)$ de grado $n < m$, obtenemos otros dos polinomios, $C(x)$ y $R(x)$, que cumplen las siguientes condiciones:

$$P(x) = Q(x) \cdot C(x) + R(x)$$

$$\text{grado de } C(x) = m - n; \text{ grado de } R(x) < n$$

De forma análoga a la división de números reales, los polinomios $P(x)$, $Q(x)$, $C(x)$ y $R(x)$ se llaman, respectivamente, **dividendo, divisor, cociente** y **resto.**

Si $R(x) = 0$, la **división** es **exacta** y entonces podemos decir que $P(x)$ es **divisible** por $Q(x)$, que $P(x)$ es **múltiplo** de $Q(x)$, y que $Q(x)$ es **divisor** de $P(x)$.

7 EJEMPLO

Veamos cómo dividir el polinomio $P(x) = 63x^3 - 86x^2 + 3x + 20$ entre $Q(x) = x - 1$.

Para dividir dos polinomios, aplicamos el algoritmo de la división:

- **Ordenamos los términos del dividendo y del divisor, de mayor a menor grado, y dejamos un espacio en blanco en el lugar de cada término que falte en el dividendo.**
- **Dividimos el primer término del dividendo entre el primer término del divisor, y obtenemos el primer término del cociente.**
- **Multiplicamos el cociente por el divisor.**
- **Restamos este producto del dividendo, para lo cual lo cambiamos de signo (para restar sumamos el opuesto), y obtenemos el primer resto parcial:**

$$\begin{array}{rrr|l}
63x^3 & -86x^2 & +3x+20 & x-1 \\ \cline{4-4}
-63x^3 & +63x^2 & & 63x^2 \\ \cline{1-2}
 & -23x^2 & &
\end{array}$$

- **Bajamos el siguiente término del dividendo y repetimos el proceso con el polinomio resultante hasta obtener un resto parcial de grado menor que el grado del divisor:**

$$\begin{array}{rrrr|l}
63x^3 & -86x^2 & +3x & +20 & x-1 \\ \cline{5-5}
-63x^3 & +63x^2 & & & 63x^2-23x-20 \\ \cline{1-2}
 & -23x^2 & +3x & & \\
 & 23x^2 & -23x & & \\ \cline{1-4}
 & & -20x & +20 & \\
 & & +20x & -20 & \\ \cline{3-4}
 & & & 0 &
\end{array}$$

El cociente y el resto de la división son:

$$C(x) = 63x^2 - 23x - 20$$

$$R(x) = 0$$

Como el resto es igual a cero, se trata de una división exacta. Entonces podemos decir que $P(x)$ es múltiplo de $Q(x)$ y que $Q(x)$ es divisor de $P(x)$.

Podemos comprobar que el resultado es correcto verificando que $P(x) = Q(x) \cdot C(x) + R(x)$:

$$Q(x) \cdot C(x) + R(x) = (x - 1) \cdot (63x^2 - 23x - 20) + 0 =$$
$$= 63x^3 - 23x^2 - 20x - 63x^2 + 23x + 20 = 63x^3 - 86x^2 + 3x + 20$$

INTERNET

En el siguiente blog encontrarás aplicaciones de operaciones con polinomios en la vida cotidiana:

http://links.edebe.com/en3r

Ejercicios y problemas
13, 14, 16 a 25, 29 a 31

2.5. Regla de Ruffini

La **regla de Ruffini** es un método que nos permite efectuar la división de polinomios de una manera más sencilla. Para aplicarla, el divisor debe ser de la forma $(x - a)$, donde a es un número real.

8 EJEMPLO

Veamos cómo dividir el polinomio $P(x) = 5x^4 - 3x^3 + 2x^2 - 7x + 3$ entre $Q(x) = x - 1$, aplicando la regla de Ruffini.

Observamos que la forma del divisor es del tipo $(x - a)$, siendo $a = 1$; por lo tanto, podemos aplicar la regla de Ruffini:

— **Escribimos los coeficientes ordenados del dividendo y el opuesto del término independiente del divisor (el número a) del modo que se muestra. Si el dividendo es incompleto, debe colocarse un cero en el lugar de cada término que falta:**

$$\begin{array}{c|ccccc} & 5 & -3 & 2 & -7 & 3 \\ 1 & & & & & \\ \hline & & & & & \end{array}$$

— **Bajamos el primer coeficiente del dividendo, lo multiplicamos por a y el resultado lo sumamos al segundo coeficiente:**

$$\begin{array}{c|ccccc} & 5 & -3 & 2 & -7 & 3 \\ 1 & & 5 & & & \\ \hline & 5 & 2 & & & \end{array}$$

— **Repetimos el proceso con todos los coeficientes del dividendo:**

$$\begin{array}{c|ccccc} & 5 & -3 & 2 & -7 & 3 \\ 1 & & 5 & 2 & 4 & -3 \\ \hline & 5 & 2 & 4 & -3 & 0 \end{array}$$

El último número obtenido equivale al resto de la división, y el polinomio cociente se construye con los demás números obtenidos como coeficientes, teniendo en cuenta que tiene un grado menos que el dividendo.

Dividendo

Divisor

$$\begin{array}{c|ccccc} & 5 & -3 & 2 & -7 & 3 \\ 1 & & 5 & 2 & 4 & -3 \\ \hline & 5 & 2 & 4 & -3 & 0 \end{array}$$

Resto

Cociente

Así pues, el cociente y el resto resultantes son:

$$C(x) = 5x^3 + 2x^2 + 4x - 3 \text{ y } R(x) = 0$$

De la misma forma que en la división numérica, se debe cumplir que $P(x) = Q(x) \cdot C(x) + R(x)$, luego podemos escribir:

$$5x^4 - 3x^3 + 2x^2 - 7x + 3 = (x - 1) \cdot (5x^3 + 2x^2 + 4x - 3) + 0$$

Si calculamos el producto, comprobaremos que se cumple que el resultado equivale al polinomio inicial:

$$(x - 1) \cdot (5x^3 + 2x^2 + 4x - 3) = 5x^4 + 2x^3 + 4x^2 - 3x - 5x^3 - 2x^2 - 4x + 3 =$$
$$= 5x^4 - 3x^3 + 2x^2 - 7x + 3$$

PAOLO RUFFINI

Paolo Ruffini (1765-1822) fue un matemático y médico italiano que también se dedicó a la docencia. Ideó el método que permite hallar los coeficientes del polinomio que resulta de la división de un polinomio cualquiera por el binomio $x - a$. Hacia 1805 demostró, aunque de forma prematura, la imposibilidad de hallar una solución general para las ecuaciones de quinto grado o superiores.

FÍJATE

Si nos encontramos con **divisores del tipo $(-x + a)$**, para poder aplicar la regla de Ruffini debemos multiplicar por -1 el dividendo y el divisor, ya que:

$$-1 \cdot (-x + a) = x - a$$

AMPLÍA

Dado un polinomio con coeficiente principal a_n y término independiente a_0, el **teorema de Gauss** establece que si este polinomio tiene raíces racionales, entonces estas raíces se encuentran dentro de la lista que se forma tomando todas las fracciones posibles cuyo numerador sea un divisor de a_0 y cuyo denominador sea divisor de a_n.

Ejercicios y problemas
15, 26 a 28, 32

3. Factorización de polinomios
3.1. Teorema del resto
3.2. Teorema del factor
3.3. Factorización

INTERNET

— Cálculo de raíces de un polinomio de grado 3:

http://links.edebe.com/cpa4, http://links.edebe.com/3p2bkh

— Aplicación del teorema del resto y regla de Ruffini:

http://links.edebe.com/gbse6u, http://links.edebe.com/6y

FÍJATE

El **teorema del resto** permite:

— Hallar el valor numérico de un polinomio sin sustituir.

— Obtener el resto de una división entre $x - a$ sin efectuarla.

FÍJATE

— El **teorema del factor** permite saber si un polinomio es **divisible** por otro de la forma $(x - a)$ sin resolver la división.

— Si $(x - a)$ es **factor** de un polinomio, entonces a es **raíz** de dicho polinomio.

Ejercicios y problemas
33, 37 a 42

3. Factorización de polinomios

En este apartado veremos cómo expresar un polinomio en forma de producto de factores, para lo que nos serán muy útiles los teoremas del resto y del factor.

3.1. Teorema del resto

El **teorema del resto,** que se deduce directamente de las propiedades de la división, se enuncia como sigue:

El resto $R(x)$ de la división de un polinomio $P(x)$ entre $(x - a)$ es igual al valor numérico de dicho polinomio para $x = a$; $P(a) = R(x)$.

9 EJEMPLO

Calcula por sustitución y mediante el teorema del resto el valor numérico del polinomio $P(x) = x^3 - x + 6$ para $x = 2$.

Solución

COMPRENSIÓN. Hallamos el valor numérico $P(2)$ sustituyendo el valor de $x = 2$ en el polinomio y calculando el resto de la división $P(x) : (x - 2)$.

RESOLUCIÓN. En primer lugar, sustituimos en el polinomio por $x = 2$:

$$P(2) = 2^3 - 2 + 6 = 12$$

A continuación, calculamos el resto $R(x)$ de la división $P(x) : (x - 2)$ por la regla de Ruffini:

	1	0	−1	6
2		2	4	6
	1	2	3	12

COMPROBACIÓN. Tal como enuncia el teorema del resto, el valor numérico del polinomio para $x = 2$ y el resto de la división coinciden: $P(2) = R(x) = 12$.

3.2. Teorema del factor

Si aplicamos el teorema del resto en el caso en que la división de $P(x)$ entre $(x - a)$ sea exacta, obtenemos el **teorema del factor,** que se enuncia como sigue:

Un polinomio $P(x)$ es divisible por $(x - a)$ si y solo si el valor numérico de dicho polinomio para $x = a$ es 0.

Así, el polinomio $P(x)$ puede expresarse de la forma $P(x) = (x - a) \cdot C(x)$, donde $(x - a)$ es un **factor de $P(x)$.**

10 EJEMPLO

Determina de dos formas distintas si el polinomio $P(x) = 5x^4 - 3x^3 + 2x^2 - 7x + 3$ es divisible entre $(x - 1)$.

Solución

COMPRENSIÓN. Hemos de ver si el resto de la división es cero, para lo que podemos calcularla o aplicar el teorema del factor.

RESOLUCIÓN. Primero efectuamos la división por Ruffini:

	5	−3	2	−7	3
1		5	2	4	−3
	5	2	4	−3	0

Luego $P(x)$ es divisible por $(x - 1)$. Análogamente, por el teorema del factor:

$$P(1) = 5 \cdot 14 - 3 \cdot 13 + 2 \cdot 12 - 7 \cdot 1 + 3 = 0 \rightarrow$$

$$\rightarrow P(1) = 0$$

Comprobamos que el polinomio es divisible por $(x - 1)$, dado que $P(1) = 0$.

3.3. Factorización

Factorizar un polinomio consiste en expresarlo como producto de polinomios irreducibles (que no se pueden seguir factorizando) de grado menor llamados **factores.**

En cada paso, se debe escribir el polinomio inicial como **producto de todos los factores encontrados.** De esta forma, un polinomio de grado *n,*

$$P(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0$$

con n raíces x_1, $x_{2,\ldots,}$ x_n, quedaría descompuesto como:

$$P(x) = a_n(x - x_1) \cdot (x - x_2) \cdot \ldots \cdot (x - x_0)$$

Para cada raíz calculada, $x = a$, tendremos un factor $(x - a)$. Ten en cuenta que un polinomio de grado n tiene como máximo n raíces y, por tanto, n factores irreducibles.

Se finaliza la factorización cuando todos los factores sean de grado 1 o cuando no se pueda seguir factorizando.

La factorización de polinomios nos va a permitir:

— Simplificar fracciones algebraicas.

— Resolver ecuaciones y buscar sus raíces enteras.

Podemos utilizar las siguientes técnicas para factorizar un polinomio:

— **Sacar factor común** a la variable y/o a algún número (si el polinomio no tiene término independiente o sus coeficientes tienen algún divisor común).

— **Identificar las igualdades notables** (véase el recuadro al margen).

— **Calcular las raíces enteras** y factorizar el polinomio aplicando la **regla de Ruffini** y los **teoremas del resto** y **del factor.**

— **Calcular las raíces** a través de la **resolución de la ecuación** de forma clásica.

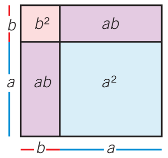
Las raíces de un polinomio pueden estar repetidas. Si una raíz solo aparece una vez, se trata de una raíz **simple;** si está repetida, se denomina raíz **doble,** raíz **triple,** etc., según el número de veces que se repita.

RECUERDA

Igualdades notables:

— Cuadrado de una suma o diferencia:

$$(a \pm b)^2 = a^2 \pm 2ab + b^2$$



— Suma por diferencia:

$$(a + b)(a - b) = a^2 - b^2$$

— Cubo de una suma o diferencia:

$$(a \pm b)^3 = a^3 + 3a^2b \pm 3ab^2 \pm b^3$$

INTERNET

Ejercicios y problemas resueltos de polinomios:

http://www.vitutor.com/ab/p/p_e.html

Problemas resueltos
B, C

Ejercicios y problemas
34 a 36, 43 a 50

Síntesis
70 y 72

11 EJEMPLO

Factoriza el polinomio $P(x) = x^4 + 7x^3 + 16x^2 + 12x$.

Solución

COMPRENSIÓN. Para factorizar el polinomio, intentaremos aplicar los métodos presentados más arriba de forma sucesiva hasta conseguir que todos los factores sean de grado 1 o irreducibles.

RESOLUCIÓN. En primer lugar, sacamos factor común a la x, pues no existe término independiente:

$$P(x) = x^4 + 7x^3 + 16x^2 + 12x = x\,(x^3 + 7x^2 + 16x + 12)$$

Proseguimos factorizando el polinomio de grado 3. Para ello, calculamos las raíces enteras, que se encuentran entre los divisores del término independiente, y aplicamos el teorema del factor. Así, obtenemos que $x = -3$ es una raíz y, por tanto, $(x + 3)$ es un factor de $P(x)$:

$$\text{Div. } (12) = \{\pm 1, \pm 2, \pm 3, \pm 4, \pm 6, \pm 12\}$$

	1	7	16	12
−3		−3	−12	−12
	1	4	4	0

Así, $P(x) = x\,(x + 3)(x^2 + 4x + 4)$.

Podríamos seguir probando con otros divisores, pero se identifica fácilmente una igualdad notable conocida (el cuadrado de una suma):

$$P(x) = x\,(x + 3)(x + 2)^2 = x\,(x + 3)(x + 2)(x + 2)$$

Como todos los factores son de grado 1, hemos terminado la factorización.

Una vez expresado el polinomio de esta forma, podemos identificar que las raíces de $P(x)$ son $x = 0$, $x = -3$ y $x = -2$. Las dos primeras son raíces simples, mientras que $x = -2$ es una raíz doble porque el factor $(x + 2)$ aparece dos veces.

4. Fracciones algebraicas
4.1. Fracciones algebraicas equivalentes
4.2. M.C.D. y m.c.m. de polinomios
4.3. Simplificación de fracciones algebraicas

4. Fracciones algebraicas

De igual modo que la división entre dos números enteros puede expresarse como fracción, la división entre polinomios da lugar a las fracciones algebraicas.

Se llama **fracción algebraica** al cociente de dos polinomios con coeficientes reales $P(x)$ y $Q(x)$ de la forma:

$$\frac{P(x)}{Q(x)} \quad \text{con} \quad Q(x) \neq 0$$

Son fracciones algebraicas, por ejemplo: $\frac{2x^2 - 6x + 8}{x^2 - 3}, \frac{3x^2 - 2}{x}, \frac{5x + 8}{8}$.

FÍJATE

Cualquier polinomio se puede expresar como fracción algebraica, tan solo colocando la unidad como denominador. Por ejemplo:

Polinomio: $x^2 - 2x$

Fracción algebraica: $\frac{x^2 - 2x}{1}$

4.1. Fracciones algebraicas equivalentes

También de forma análoga a las fracciones numéricas, para las fracciones algebraicas es posible definir su equivalencia, que expresamos con el signo igual:

Dos fracciones algebraicas son **equivalentes,** si se cumple que:

$$\frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{R(x)}{S(x)} \Leftrightarrow P(x) \cdot S(x) = R(x) \cdot Q(x)$$

12 EJEMPLO

Determina si las siguientes fracciones algebraicas son equivalentes: $\frac{x^2 + x}{2x}$ **y** $\frac{x^2 - 1}{2x - 2}$.

Solución

COMPRENSIÓN. Para saber si dos fracciones algebraicas son equivalentes, hemos de calcular los productos cruzados de los polinomios que las componen.

RESOLUCIÓN. Hallamos los dos productos cruzados, que son iguales, por lo que las fracciones son equivalentes:

$$(x^2 + x)(2x - 2) = 2x^3 - 2x^2 + 2x^2 - 2x = 2x^3 - 2x^2; \qquad 2x\,(x^2 - 1) = 2x^3 - 2x^2$$

4.2. M.C.D. y m.c.m. de polinomios

Conocer el máximo común divisor y el mínimo común múltiplo de varios polinomios nos será útil para operar con las fracciones algebraicas.

El **máximo común divisor (M.C.D.)** de dos o más polinomios es el polinomio de mayor grado que es divisor de todos ellos.

El **mínimo común múltiplo (m.c.m.)** de dos o más polinomios es el polinomio de menor grado que es múltiplo de todos ellos.

En la práctica, primero descomponemos en factores los distintos polinomios y:

— En el M.C.D., tomamos los factores comunes elevados al menor exponente.

— En el m.c.m., los comunes y no comunes elevados al mayor exponente.

4.3. Simplificación de fracciones algebraicas

Al operar con fracciones algebraicas, al igual que sucedía con las fracciones numéricas, siempre es conveniente simplificar las fracciones.

Además, una vez efectuadas las operaciones, es preferible simplificar también el resultado.

> **Simplificar** una fracción algebraica es transformarla en otra más sencilla y equivalente.

Para simplificar una fracción algebraica, seguiremos los pasos indicados:

— Factorizaremos los polinomios del numerador y del denominador.

— Dividiremos el numerador y el denominador por los factores comunes, es decir, por el M.C.D. de ambos.

De este modo, obtenemos una fracción que no es posible simplificar más.

> Se llama **fracción algebraica irreducible** a aquella en la que entre numerador y denominador no existen más factores comunes que la unidad.

Estas fracciones son la «mínima expresión» de la fracción equivalente inicial y, como su nombre indica, no se pueden reducir más.

FÍJATE

Para simplificar fracciones algebraicas, utilizamos el mismo método de simplificación que usábamos con las fracciones numéricas:

$$\frac{60}{45}=\frac{2^2\cdot\cancel{3}\cdot\cancel{5}}{3^{\cancel{2}}\cdot\cancel{5}}=\frac{2^2}{3}=\frac{4}{3}$$

INTERNET

En el siguiente enlace encontrarás un vídeo sobre la simplificación de fracciones algebraicas:

http://youtu.be/KG12HptTW9w

13 EJEMPLO

Calcula el M.C.D. y el m.c.m. de los polinomios $P(x) = x^4 + 7x^3 + 16x^2 + 12x$ y $Q(x) = x^3 + 8x^2 +$ $+ 21x + 18$.

Solución

COMPRENSIÓN. Para calcular el M.C.D y el m.c.m., es necesario factorizar los dos polinomios.

RESOLUCIÓN. Factorizamos $P(x)$ y $Q(x)$:

$$P(x) = x(x+3)(x+2)^2 \text{ y } Q(x) = (x+3)^2(x+2)$$

Para hallar el M.C.D., consideramos los factores comunes elevados al menor exponente:

$$\text{M.C.D.}[P(x),\ Q(x)] = (x+3)(x+2)$$

Para hallar el m.c.m., tomamos los factores comunes y no comunes elevados al mayor exponente:

$$\text{m.c.m.}[P(x),\ Q(x)] = x\,(x+3)^2(x+2)^2$$

Ejercicios y problemas 51 a 58

14 EJEMPLO

Simplifica la fracción algebraica $\dfrac{P(x)}{Q(x)} = \dfrac{x^4 + x^3 - 8x^3 - 12x}{x^4 - 3x^2 - 10x^2}$.

Solución

COMPRENSIÓN. Factorizamos los polinomios del numerador y del denominador y los dividimos por los factores comunes.

RESOLUCIÓN. Primero factorizamos:

$$P(x) = x(x-3)(x+2)^2; \qquad Q(x) = x^2(x-5)(x+2)$$

Y, a continuación, dividimos por los factores comunes:

$$\frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{x^4 + x^3 - 8x^3 - 12x}{x^4 - 3x^2 - 10x^2} =$$

$$= \frac{\cancel{x}(x-3)(x+2)^{\cancel{2}}}{x^{\cancel{2}}(x-5)\cancel{(x+2)}} = \frac{x^2 - x - 6}{x^2 - 5x}$$

La fracción irreducible es, por tanto, $\dfrac{P(x)}{Q(x)} = \dfrac{x^2 - x - 6}{x^2 - 5x}$.

5. Operaciones con fracciones algebraicas
5.1. Suma y resta
5.2. Multiplicación
5.3. División
5.4. Descomposición de fracciones algebraicas en fracciones simples

5. Operaciones con fracciones algebraicas

Con las fracciones algebraicas podemos efectuar las mismas operaciones que con las fracciones numéricas: suma, resta, multiplicación y división.

5.1. Suma y resta

Para sumar o restar fracciones algebraicas, se siguen los pasos indicados:

— Se calcula el m.c.m. de los denominadores de las fracciones dadas, y se reducen las fracciones a común denominador.

— Se obtiene el numerador resultado mediante la suma o diferencia de los numeradores obtenidos en el paso anterior. El denominador resultado es el m.c.m. de los denominadores.

— Se simplifica la fracción algebraica resultante.

RECUERDA

Al trabajar con las fracciones algebraicas, vamos a realizar las mismas operaciones que utilizábamos con las fracciones numéricas.

— ¿Recuerdas cómo efectuabas las siguientes operaciones?

$$\frac{2}{6}+\frac{5}{12};\quad \frac{3}{8}-\frac{1}{4}$$
$$\frac{4}{2}\cdot\frac{3}{13};\quad \frac{9}{4}:\frac{7}{6}$$

15 EJEMPLO

Calcula $\dfrac{x+10}{x^2-4}-\dfrac{x+4}{x^2+4x+4}$.

Solución

COMPRENSIÓN. Para restar dos fracciones algebraicas, es necesario reducirlas a común denominador.

RESOLUCIÓN. Factorizamos los denominadores, calculamos el m.c.m. y reducimos a común denominador. Finalmente, operamos los numeradores para obtener el resultado.

$$\text{m.c.m. } (x^2-4,\ x^2+4x+4) = \text{m.c.m. } [(x+2)(x-2),\ (x+2)^2] = (x+2)^2(x-2)$$

$$\frac{x+10}{x^2-4}-\frac{x+4}{x^2+4x+4}=\frac{(x+10)(x+2)}{(x+2)^2(x-2)}-\frac{(x+4)(x-2)}{(x+2)^2(x-2)}=$$

$$=\frac{x^2+2x+10x+20-(x^2-2x+4x-8)}{(x+2)^2(x-2)}=\frac{10x+28}{(x+2)^2(x-2)}=\frac{2(5x+14)}{(x+2)^2(x-2)}$$

RECUERDA

Para reducir a común denominador:

1. Calculamos el m.c.m. de los denominadores.
2. Dividimos el m.c.m. entre los denominadores de cada fracción.
3. Multiplicamos el numerador y el denominador de cada fracción por el resultado correspondiente hallado en el punto 2.

5.2. Multiplicación

El **producto** de fracciones algebraicas es otra fracción que tiene:

— Por numerador el **producto** de los **numeradores.**

— Por denominador el **producto** de los **denominadores.**

$$\frac{P(x)}{Q(x)}\cdot\frac{R(x)}{S(x)}=\frac{P(x)\cdot R(x)}{Q(x)\cdot S(x)}$$

Se debe simplificar la **fracción algebraica resultado,** aunque también se puede simplificar antes de operar.

16 EJEMPLO

Calcula $\dfrac{x+1}{x^2-9}\cdot\dfrac{2x+6}{x-2}$.

Solución

COMPRENSIÓN. Deben factorizarse las fracciones algebraicas antes de operar y simplificarlas para que los cálculos sean más sencillos.

RESOLUCIÓN. Factorizamos las fracciones, efectuamos el producto en línea y, finalmente, simplificamos:

$$\frac{x+1}{x^2-9}\cdot\frac{2x+6}{x-2}=\frac{x+1}{(x+3)(x-3)}\cdot\frac{2(x+3)}{x-2}=$$

$$=\frac{2(x+1)\cancel{(x+3)}}{\cancel{(x+3)}(x-3)(x-2)}=\frac{2(x+1)}{(x-3)(x-2)}$$

5.3. División

Para **dividir** dos fracciones algebraicas, se multiplica la primera fracción por la inversa de la segunda.

En la práctica, el cociente de fracciones algebraicas es otra fracción que tiene:

— Por numerador el **producto del numerador** de la primera **por el denominador** de la segunda.

— Por denominador el **producto del denominador** de la primera **por el numerador** de la segunda.

$$\frac{P(x)}{Q(x)} : \frac{R(x)}{S(x)} = \frac{P(x) \cdot S(x)}{Q(x) \cdot R(x)}$$

Es conveniente simplificar la fracción algebraica resultado, aunque también se puede simplificar antes de operar.

17 EJEMPLO

Calcula: $\dfrac{x^2+2x}{x^2-5x+6} : \dfrac{x^2+4x+4}{x^2-4}$.

Solución

COMPRENSIÓN. Deben factorizarse las fracciones algebraicas antes de operar y simplificarlas para que los cálculos sean más sencillos.

RESOLUCIÓN. Factorizamos las fracciones, efectuamos el producto en cruz y, por último, simplificamos:

$$\frac{x^2+2x}{x^2-5x+6} : \frac{x^2+4x+4}{x^2-4} = \frac{x(x+2)}{(x-3)(x-2)} : \frac{(x+2)^{\cancel{2}}}{\cancel{(x+2)}(x-2)} =$$

$$= \frac{x\,\cancel{(x+2)}\,\cancel{(x-2)}}{(x-3)\,\cancel{(x-2)}\,\cancel{(x+2)}} = \frac{x}{x-3}$$

18 EJEMPLO

Efectúa la siguiente operación expresando el resultado en forma de fracción irreducible:

$\dfrac{x-2}{x^2} + \dfrac{x+2}{x^2-x} - \dfrac{1}{x^2-1}$.

Solución

COMPRENSIÓN. Para calcular estas operaciones, debemos reducir las fracciones a común denominador.

RESOLUCIÓN. En primer lugar, factorizamos los denominadores:

$$x^2 - x = x(x-1)$$

$$x^2 - 1 = (x+1)(x-1)$$

A continuación, calculamos el m.c.m. de los tres denominadores:

$$\text{m.c.m.}(x^2, x^2-x, x^2-1) = \text{m.c.m.}[x^2, x(x-1), (x+1)(x-1)] = x^2(x-1)(x+1)$$

Finalmente, reducimos a común denominador y operamos los numeradores para obtener el resultado:

$$\frac{x-2}{x^2} + \frac{x+2}{x^2-x} - \frac{1}{x^2-1} = \frac{(x-2)(x-1)(x+1) + (x+2)x(x+1) - x^2}{x^2(x-1)(x+1)} =$$

$$= \frac{(x^3-2x^2-x+2) + (x^3+3x^2+2x) - x^2}{x^2(x-1)(x+1)} = \frac{2x^3+x+2}{x^4-x^2}$$

RECUERDA

La **fracción inversa** de una dada es otra fracción donde el numerador y el denominador están intercambiados:

$$\frac{x-7}{x+1} \xrightarrow{\text{inversa}} \frac{x+1}{x-7}$$

El producto de todo par de fracciones inversas es igual a la unidad:

$$\frac{x-7}{x+1} \cdot \frac{x+1}{x-7} =$$

$$= \frac{(x-7)\cdot(x+1)}{(x+1)\cdot(x-7)} = 1$$

INTERNET

En el siguiente enlace encontrarás ejercicios sobre fracciones algebraicas:

http://www.vitutor.com/ab/p/f_e.html

Problemas resueltos
D

Ejercicios y problemas
59 a 67

Síntesis
71

5.4. Descomposición de fracciones algebraicas en fracciones simples

AMPLÍA

Si la ecuación $ax^2 + bx + c = 0$ no tiene raíces reales, entonces la fracción $\dfrac{Mx - n}{ax^2 + bx + c}$ no se puede descomponer en factores reales.

Cuando el denominador de una fracción algebraica puede descomponerse en factores, la fracción se puede escribir como suma o diferencia de otras fracciones más simples. Este proceso se conoce con el nombre de **descomposición en fracciones simples.**

Supongamos una fracción algebraica de numerador $P(x)$ y denominador $Q(x)$:

— Si **grado $P(x)$ < grado $Q(x)$,** consideramos los siguientes casos:

- **$Q(x)$ solo tiene raíces simples.**

  $Q(x) = (x - a_1)(x - a_2)\ \dots\ (x - a_n)$, entonces:

$$\frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{A_1}{x - a_1} + \frac{A_2}{x - a_2} + \dots + \frac{A_n}{x - a_n}$$

- **$Q(x)$ tiene raíces múltiples.**

  $Q(x) = (x - a_1)^m(x - a_2)\ \dots\ (x - a_{n-m})$, entonces:

$$\frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{A_1}{x - a_1} + \frac{A_{1,2}}{(x - a_1)^2} + \dots + \frac{A_{1,m}}{(x - a_1)^m} + \frac{A_2}{x - a_2} + \dots + \frac{A_{n-m}}{x - a_{n-m}}$$

- **$Q(x)$ contiene polinomios de grado 2.**

  $Q(x) = (x^2 + bx + c)(x - a_1)(x - a_2)\ \dots\ (x - a_{n-2})$, entonces:

$$\frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{Mx + N}{x^2 + bx + c} + \frac{A_1}{x - a_1} + \frac{A_2}{x - a_2} + \dots + \frac{A_{n-2}}{x - a_{n-2}}$$

— Si **grado $P(x)$ ≥ grado $Q(x)$,** efectuamos la división y obtenemos:

$$\frac{P(x)}{Q(x)} = C(x) + \frac{R(x)}{Q(x)}$$

Como grado $R(x)$ < grado $Q(x)$, aplicamos el método anterior a $\dfrac{R(x)}{Q(x)}$.

Problemas resueltos
E

Ejercicios y problemas
68 y 69

19 EJEMPLO

Descompón la siguiente fracción algebraica en fracciones simples: $\dfrac{4x+1}{x^2+3x-4}$.

Solución

COMPRENSIÓN. Puesto que el grado $P(x)$ < grado $Q(x)$, descompondremos $Q(x)$ en factores y expresaremos la fracción como suma de fracciones.

RESOLUCIÓN. En primer lugar, factorizamos $Q(x)$:

$$Q(x) = (x - 1)(x + 4)$$

Vemos que tiene dos raíces simples, por lo que podemos escribir la fracción de la siguiente forma:

$$\frac{4x + 1}{x^2 + 3x - 4} = \frac{A}{x - 1} + \frac{B}{x + 4} = \frac{A(x + 4) + B(x - 1)}{(x - 1)(x + 4)}$$

Así, si igualamos los numeradores, obtenemos:

$$4x + 1 = A(x + 4) + B(x - 1)$$

Para determinar los valores de A y B, desarrollamos la igualdad y resolvemos el sistema de ecuaciones:

$$4x + 1 = (A + B)x + 4A - B$$

$$\left.\begin{aligned} A + B &= 4 \\ 4A - B &= 1 \end{aligned}\right\}$$

$$5A = 5; \quad A = 1; \quad B = 3$$

Así pues:

$$\frac{4x + 1}{x^2 + 3x - 4} = \frac{1}{x - 1} + \frac{3}{x + 4}$$

Problemas RESUELTOS

A RAÍCES DE UN POLINOMIO

Calcula a y b para que se cumpla que −5 y 0 son raíces de $P(x) = x^2 + 2ax + b$.

Solución

COMPRENSIÓN. m es raíz de $P(x) \Leftrightarrow P(m) = 0$. Para calcular a y b, debemos obtener los valores del polinomio para $x = -5$ y $x = 0$ y resolver las ecuaciones resultantes.

DATOS. $P(x) = x^2 + 2ax + b$; $x = -5$ y $x = 0$ son raíces de $P(x)$.

RESOLUCIÓN. Intenta resolver el problema individualmente. Para ello, tapa la columna de la respuesta y sigue estos pasos:

Pasos	Respuesta
— Aplicamos la definición de raíz a −5 y 0 para plantear un sistema de dos ecuaciones y dos incógnitas.	— $\left.\begin{array}{l} P(-5) = (-5)^2 + 2a(-5) + b = 0 \\ P(0) = (0)^2 + 2a(0) + b = 0 \end{array}\right\} \left.\begin{array}{r} 25 - 10a + b = 0 \\ b = 0 \end{array}\right\}$
— Resolvemos el sistema de ecuaciones sustituyendo el valor obtenido para b en la primera expresión para calcular a.	— $25 - 10a + 0 = 0 \rightarrow -10a = -25 \rightarrow a = \frac{-25}{-10} = \frac{5}{2}$

COMPROBACIÓN. Sustituimos los valores de $a = 5/2$ y $b = 0$ en $P(x)$ y comprobamos que $P(-5) = P(0) = 0$.

1. ★★☆ Calcula a y b para que se cumpla que:

a) Las raíces de $P(x) = x^2 + \frac{a}{4}x - 3b$ sean −3 y 2.

b) Las raíces de $Q(x) = x^5 - ax + b$ sean −2 y 2.

Sol.: a) $a = 4$, $b = 2$; b) $a = 16$, $b = 0$

B FACTORIZACIÓN DE UN POLINOMIO

Factoriza el polinomio $P(x) = 2x^3 - 3x^2 - 11x + 6$ y determina sus raíces.

Solución

COMPRENSIÓN. Para factorizar el polinomio, intentaremos aplicar los diferentes métodos estudiados en la unidad de forma sucesiva hasta conseguir que todos los factores sean de grado 1 o irreducibles.

DATOS. $P(x) = 2x^3 - 3x^2 - 11x + 6$.

RESOLUCIÓN. Calculamos las raíces enteras, que se encuentran entre los divisores del término independiente, y aplicamos el teorema del factor. Así, obtenemos que $x = -2$ es una raíz y, por tanto, $(x + 2)$ es un factor de $P(x)$:

Div. (6) = {±1, ±2, ±3, ±6}

	2	−3	−11	6
2		−4	14	−6
	2	−7	3	0

Así, la factorización queda, por el momento:

$$P(x) = (x + 2) \cdot (2x^2 - 7x + 3)$$

Podríamos seguir probando con otros divisores pero, como el polinomio resultante es de segundo grado, hallaremos las raíces aplicando la fórmula de las ecuaciones de segundo grado:

$$x = \frac{7 \pm \sqrt{7^2 - 4 \cdot 2 \cdot 3}}{2 \cdot 2} = \frac{7 \pm \sqrt{25}}{4} = \frac{7 \pm 5}{4} = \begin{cases} 3 \\ 1/2 \end{cases}$$

Y la factorización queda: $P(x) = 2(x + 2)(x - 3)(x - 1/2)$.

Como todos los factores son de grado 1, hemos terminado la factorización.

Una vez expresado el polinomio de esta forma, podemos identificar que las raíces de $P(x)$ son $x = -2$, $x = 3$ y $x = 1/2$. Todas son raíces simples.

COMPROBACIÓN. Si multiplicamos los factores que forman el polinomio $P(x)$, comprobamos que se obtiene la expresión de $P(x)$ del enunciado.

2. ★★☆ Factoriza los siguientes polinomios y determina sus raíces: a) $P(x) = 2x^3 - 3x^2 - 8x - 3$; b) $Q(x) = 6x^2 - 9x - 6$.

Sol.: a) $P(x) = 2(x + 1)(x + 1/2)(x - 3)$, $x_1 = -1$, $x_2 = -1/2$, $x_3 = 3$;
b) $P(x) = 6(x - 2)(x + 1/2)$, $x_1 = 2$, $x_2 = -1/2$

3. ★★☆ Factoriza el polinomio $P(x) = 2x^5 - 3x^3 + 4x^2 - 9x + 6$ y determina sus raíces.

Sol.: a) $P(x) = (x - 1)^2(x + 2)(2x^2 + 3)$, $x_1 = 1$ (doble), $x_2 = -2$

C FACTORIZACIÓN DE POLINOMIOS MEDIANTE IGUALDADES NOTABLES

Factoriza los siguientes polinomios, con ayuda de las igualdades notables: a) $P(x) = 25x^4 + 30x^2 + 9$; b) $R(x) = (x + 7)^2 - 16$.

Solución

COMPRENSIÓN. Intentaremos identificar la forma de los polinomios con las fórmulas de las igualdades notables.

DATOS. $P(x) = 25x^4 + 30x^2 + 9; R(x) = (x + 7)^2 - 16$.

RESOLUCIÓN.

a) Identificamos que $P(x)$ tiene la forma del cuadrado de una suma: $a^2 + 2ab + b^2 = (a + b)^2$. Por tanto:

$$P(x) = 25x^4 + 30x^2 + 9 =$$
$$= (5x^2)^2 + 2 \cdot 5x \cdot 3 + 3^2 = (5x^2 + 3)^2$$

b) Se identifica que $R(x)$ tiene la forma de una diferencia de cuadrados: $(a + b)(a - b) = a^2 - b^2$. Por tanto:

$$R(x) = (x + 7)^2 - 16 = (x + 7)^2 - 4^2 =$$
$$= [(x + 7) + 4][(x + 7) - 4] = (x + 11)(x + 3)$$

4. ★★☆ Usando las igualdades notables, factoriza: a) $P(x) = x^2 - 9$; b) $Q(x) = x^2y^2 - 1$; c) $R(x) = 4x^2 + 20x + 25$.

Sol.: a) $P(x) = (x + 3)(x - 3)$; b) $Q(x) = (xy + 1)(xy - 1)$; c) $R(x) = (2x + 5)(2x + 5)$

D OPERACIONES COMBINADAS CON FRACCIONES ALGEBRAICAS

Calcula la siguiente operación: $1 + \dfrac{x+3}{x^2-1} \cdot \dfrac{x+1}{2x}$.

Solución

COMPRENSIÓN. Además de operar según hemos visto en la unidad, debe tenerse en cuenta la jerarquía de las operaciones.

DATOS. $1 + \dfrac{x+3}{x^2-1} \cdot \dfrac{x+1}{2x}$.

RESOLUCIÓN. Primero calcularemos el producto de fracciones y después la suma (reduciendo a común denominador). Siempre que sea posible, simplificaremos las fracciones:

$$1 + \frac{x+3}{x^2-1} \cdot \frac{x+1}{2x} = 1 + \frac{(x+3)\cancel{(x+1)}}{2x\cancel{(x+1)}(x-1)} =$$
$$= \frac{2x(x-1) + (x+3)}{2x(x-1)} = \frac{2x^2 - 2x + x + 3}{2x(x-1)} = \frac{2x^2 - x + 3}{2x^2 - 2x}$$

5. ★★☆ Calcula: $\left(\dfrac{1}{x} + \dfrac{1}{x^2-1}\right) \cdot \left(\dfrac{x+1}{2} : \dfrac{x}{x-1}\right)$

Sol.: $\dfrac{x^2 + x - 1}{2x^2}$

E DESCOMPOSICIÓN EN FRACCIONES SIMPLES

Descompón en fracciones simples: $\dfrac{1}{x^2 - 5x + 6}$.

Solución

COMPRENSIÓN. Puesto que el grado $P(x) <$ grado $Q(x)$, descompondremos $Q(x)$ en factores y expresaremos la fracción como suma de fracciones.

DATOS. $P(x) = 1$; $Q(x) = x^2 - 5x + 6$.

RESOLUCIÓN. En primer lugar, factorizamos $Q(x)$:

$$Q(x) = (x - 2)(x - 3)$$

Vemos que tiene dos raíces simples, por lo que podemos escribir la fracción de la siguiente forma:

$$\frac{1}{x^2 - 5x + 6} = \frac{A}{x-2} + \frac{B}{x-3} = \frac{A(x-3) + B(x-2)}{(x-2)(x-3)}$$

Así, si igualamos los numeradores, obtenemos:

$$1 = A(x - 3) + B(x - 2)$$

Para determinar los valores de A y B, tenemos dos opciones:

— Desarrollar la igualdad y resolver el sistema:

$$1 = (A + B)x - 3A - 2B$$

$$\left.\begin{aligned} A + B &= 0 \\ -3A - 2B &= 1 \end{aligned}\right\} \quad \left.\begin{aligned} A &= -B \\ 3B - 2B &= 1 \end{aligned}\right\} \quad B = 1;\ A = -1$$

— En la igualdad $1 = A(x - 3) + B(x - 2)$, sustituir x en los dos miembros por valores que simplifiquen la expresión:

$$x = 2 \longrightarrow 1 = A(2 - 3);\ A = -1 \qquad x = 3 \longrightarrow 1 = B(3 - 2);\ B = 1$$

Así pues:

$$\frac{1}{x^2 - 5x + 6} = \frac{-1}{x-2} + \frac{1}{x-3}$$

6. ★★☆ Descompón en fracciones más simples:

a) $\dfrac{5x - 3}{x^2 - 2x - 3}$ b) $\dfrac{5x^2 + 20x + 6}{x^3 + 2x^2 + x}$

Sol.: a) $\dfrac{2}{x+1} + \dfrac{3}{x-3}$; b) $\dfrac{6}{x} - \dfrac{1}{x+1} + \dfrac{9}{(x+1)^2}$

EJERCICIOS Y PROBLEMAS

1 POLINOMIOS

7. ★☆☆ Justifica cuáles de las siguientes expresiones son polinomios y cuáles no:

a) $x^2 - 5$
b) $x^{-2} + 2$
c) $\frac{3x}{x-7}$
d) $\frac{x}{3} - \frac{x^2}{5}$
e) $x^2 + 2x + 2$
f) $z^2 - 7z$

8. ★☆☆ Calcula para $x = -3$ el valor numérico de los siguientes polinomios: a) $P(x) = 2x^3 + 9x + 12$; b) $Q(x) = -x^3 - 27$.

Sol.: a) $P(-3) = -69$; b) $Q(-3) = 0$

9. ★★☆ Señala el valor numérico de los siguientes polinomios para $x = -2$ y $x = 2$ y sus raíces:

a) $x^2 - 9$
b) $(x-2)(x+2)$
c) $x^2 + 2x + 2$
d) $x^2 + 1$

Sol.: Valores: a) –5, –5; b) 0, 0; c) 2, 10; d) 5, 5;
Raíces: a) 3, –3; b) 2, –2; c) –; d) –

10. ★★☆ Explica con tus propias palabras qué es una raíz de un polinomio.

— ¿Cómo podemos hallar las raíces de $P(x) = ax^2 + bx + c$?

11. ★★☆ Determina cuál es el polinomio de tercer grado cuyas raíces son 1, –3 y 7 y que tiene 7 como coeficiente del término de mayor grado.

Sol.: $7x^3 - 35x^2 - 119x + 147$

12. ★★★ Calcula el polinomio $P(x)$ sabiendo que: a) es de tercer grado; b) se anula para $x = 1$; c) solo tiene dos términos; d) $P(2) = 28$.

Sol.: $P(x) = 4x^3 - 4$ o $P(x) = 7x^3 - 7x^2$ o $P(x) = \frac{14}{3}x^3 - \frac{14}{3}x$

2 OPERACIONES CON POLINOMIOS

13. ★☆☆ Dados los polinomios: $P(x) = 3x^2 + x - 7$ y $Q(x) = x^2 - x$, comprueba que se cumple:

a) La propiedad conmutativa de la suma.
b) La propiedad asociativa del producto.

14. ★☆☆ Dados los monomios: $P(x) = -2x^2$ y $Q(x) = 6x^2$, calcula: a) $P(x) + Q(x)$; b) $P(x) - Q(x)$; c) $P(x) \cdot Q(x)$; d) $2P(x)$.

Sol.: a) $4x^2$; b) $-8x^2$; c) $-12x^4$; d) $-4x^2$

15. ★☆☆ Utilizando la regla de Ruffini, halla el cociente y el resto de las siguientes divisiones:

a) $(x^3 - 8) : (x - 2)$
b) $(3x^3 + 2x^2 - x) : (x + 2)$
c) $(x^4 - 16) : (x + 2)$

Sol.: a) $C(x) = x^2 + 2x + 4$, $R = 0$; b) $C(x) = 3x^2 - 4x + 7$, $R = -14$; c) $C(x) = x^3 - 2x^2 + 4x - 8$, $R = 0$

16. ★★☆ Determina a, b y c para que se verifique:

$$(2x^2 - 4x + c) + (ax^2 + 3bx + 8) = 5x^2 - 2x + 3$$

Sol.: $a = 3$, $b = 2/3$, $c = -5$

17. ★★☆ Realiza las siguientes operaciones con polinomios:

a) $(17x^5 + 19x^2 + 15) - (9x^7 - 11x - 17)$
b) $(20x^6 - 13x^5) - (-7x^6 + 7x^5 - 20x^3 - 4x^2)$
c) $(-2x^2) \cdot (11x^3 - 10x^2 + 4x + 6)$
d) $5x^2 \cdot (-6x - 3)$
e) $(6x + 10) - (17x + 10) - 10x \cdot (4x + 2)$
f) $(-11x + 6) \cdot \left[(11x^2 + 16x + 9) + (14x^2 + 8x + 12)\right]$

Sol.: a) $-9x^7 + 17x^5 + 19x^2 + 11x + 32$; b) $27x^6 - 20x^5 + 20x^3 + 4x^2$; c) $-22x^5 + 20x^4 - 8x^3 - 12x^2$; d) $-30x^3 - 15x^2$; e) $-40x^2 - 31x$; f) $-275x^3 - 114x^2 - 87x + 126$

18. ★★☆ Sean los polinomios: $P(x) = -x^2 + 3x + 1$, $Q(x) = x^3 - 3x^2 + 4$ y $R(x) = x^2 - 3x$. Calcula: a) $P(x) + Q(x)$; b) $P(x) \cdot Q(x)$; c) $P(x) + R(x)$; d) $P(x) \cdot R(x)$.

Para realizar los cálculos, puedes utilizar el Wolfram Alpha en: http://www.wolframalpha.com

Sol.: a) $x^3 - 4x^2 + 3x + 5$; b) $-x^5 + 6x^4 - 8x^3 - 7x^2 + 12x + 4$; c) 1; d) $-x^4 + 6x^3 - 8x^2 - 3x$

19. ★★☆ Dados los polinomios: $P(x) = 3x^2 + x - 7$, $Q(x) = x^2 - x$ y $R(x) = -2x - 2$, efectúa las siguientes operaciones: a) $P(x) \cdot Q(x)$; b) $P(x) \cdot R(x)$; c) $Q(x) \cdot R(x)$; d) $P(x) \cdot 2Q(x) \cdot 2xR(x)$; e) $P(x) + 3Q(x) + 3R(x)$.

Sol.: a) $3x^4 - 2x^3 - 8x^2 + 7x$; b) $-6x^3 - 8x^2 + 12x + 14$; c) $-2x^3 + 2x$; d) $-24x^6 - 8x^5 + 80x^4 + 8x^3 - 56x^2$; e) $6x^2 - 8x - 13$

20. ★★☆ Determina el polinomio $P(x)$ de primer grado que cumple $(x^2 + 2) \cdot P(x) + 5x^2 = 2x^3 + x^2 + 4x - 8$.

Sol.: $P(x) = 2x - 4$

21. ★★☆ Efectúa las siguientes divisiones polinómicas:

a) $(x^4 - 2x^3 - 11x^2 + 30x - 20) : (x^2 + 3x - 2)$
b) $(7x^2 - 5x + 3) : (x^2 - 2x + 1)$
c) $(2x^3 - 7x^2 + 5x - 3) : (x^2 - 2x)$
d) $(x^3 - 5x^2 + 2x + 4) : (x^2 - x + 1)$

Sol.: a) $C(x) = x^2 - 5x + 6$, $R(x) = 2x - 8$; b) $C(x) = 7$, $R(x) = 9x - 4$; c) $C(x) = 2x - 3$, $R(x) = -x - 3$; d) $C(x) = (x - 4)$, $R(x) = -3x + 8$

22. ★★☆ Comprueba si $x + 3$ es un divisor de $x^4 - x^3 - 14x^2 + x + 16$.

23. ★★☆ Dados los polinomios $P(x) = 6x^3 + 3x - 12$ y $Q(x) = 2x^2 + 4x + 10$, calcula $\frac{1}{3}P(x) : \frac{1}{2}Q(x)$.

Sol.: $C(x) = 2x - 4$, $R(x) = -x + 16$

24. ★★☆ Divide $P(x) = 3x^3 - 2x^2 - 6x - 4$ entre estos polinomios y muestra el resultado usando la siguiente forma: Divisor · Cociente + Resto: a) $x - 1$; b) $x - 2$; c) $x - 3$.

Sol.: a) $(x-1)\cdot(3x^2+x-5)+(-9)$; b) $(x-2)\cdot(3x^2+4x+2)+0$; c) $(x-3)\cdot(3x^2+7x+15)+41$

25. ★★☆ Calcula las operaciones indicadas y simplifica.

a) $(x^5 - x^3 + x) + (3x^5 - 4x^4) + (x^3 + 2x + 5)$

b) $(8x^2 - 5x) - (3x^2 - 3) + (3x - 5)$

c) $(4x - 1)\cdot(7x + 2)$

d) $(6x - 5)\cdot(6x + 5)$

e) $(2x + 1)\cdot(4x^2 + 2x + 1)$

f) $\dfrac{15x^4 + 30x^3 + 12x^2 - 9x}{3x}$

— Con la ayuda de la calculadora de polinomios que encontrarás en el siguiente enlace, realiza nuevamente las operaciones anteriores: http://links.edebe.com/vspjim

@

Sol.: a) $4x^5 - 4x^4 + 3x + 5$; b) $5x^2 - 2x - 2$; c) $28x^2 + x - 2$; d) $36x^2 - 25$; e) $8x^3 + 8x^2 + 4x + 1$; f) $5x^3 + 10x^2 + 4x - 3$

26. ★★☆ Halla el cociente y el resto de las siguientes divisiones aplicando la regla de Ruffini:

a) $(4x^5 - 6x^4 + 8x^3 - 10x^2 + 6x + 2) : (x + 4)$

b) $(-2x^4 + 3x^3 - 5) : (x - 3)$

c) $(x^5 + 4x^2) : (x + 3)$

d) $(ax^3 + 3x - a) : (x - a)$

Sol.: a) $C(x) = 4x^4 - 22x^3 + 96x^2 - 394x + 1582$, $R = -6326$; b) $C(x) = -2x^3 - 3x^2 - 9x - 27$, $R = -86$; c) $C(x) = x^4 - 3x^3 + 9x^2 - 23x + 69$, $R = -207$; d) $C(x) = ax^2 + a^2x + a^3 + 3$, $R(x) = a^4 + 2a$

27. ★★☆ Calcula el valor del parámetro *p*, para que la división $(2x^3 - 5x - p) : (x + 3)$ tenga como resto -30.

Sol.: $p = -9$

28. ★★☆ Determina el valor del parámetro *m*, para que el polinomio $P(x)$ sea divisible entre $Q(x)$.

a) $P(x) = x^4 + m$, $Q(x) = x - 1$

b) $P(x) = 6x^3 + x^2 + 4x + m$, $Q(x) = x + 1$

Sol.: a) $m = -1$; b) $m = 9$

29. ★★★ Calcula y simplifica las siguientes operaciones:

a) $(3x + 4)^2$ b) $(s + 3)^2 - (s - 3)^2$

Sol.: a) $9x^2 + 24x + 16$; b) $12s$

30. ★★★ Dados los polinomios $P(x) = x^4 - 3x^2 + 2x - 9$, $Q(x) = -x^2 + x - \dfrac{1}{2}$, calcula $P(x) - [Q(x)]^2$.

Sol.: $2x^3 - 5x^2 + x - 37/4$

31. ★★★ Efectúa las siguientes operaciones con polinomios:

a) $[(x^3 - 2x^2) + (3x^2 - 3)]\cdot(2x + 3)$

b) $[(x^3 - 2x^2) - (3x^2 - 3)]\cdot(2x + 3)$

c) $[(3x^2 - 3) - (x^3 - 2x^2)]\cdot(2x + 3)$

— Teniendo en cuenta las propiedades de la suma, la resta y la multiplicación de polinomios, ¿podrías haber predicho el resultado del apartado c) a partir de los resultados de los apartados a) y b)? ¿Cómo?

Sol.: a) $2x^4 + 5x^3 + 3x^2 - 6x - 9$; b) $2x^4 - 7x^3 - 15x^2 + 6x + 9$; c) $-2x^4 + 7x^3 + 15x^2 - 6x - 9$

32. ★★★ Halla un polinomio de primer grado que al dividirlo por $(x - a)$ tenga de resto *R*, y al dividirlo por $(x - 2)$ dé exacto.

Sol.: $R\dfrac{x-2}{a-2}$

3 FACTORIZACIÓN DE POLINOMIOS

33. ★☆☆ Determina, sin realizar la división, si el polinomio $P(x) = x^4 + 5x^3 - 4x - 159$ es divisible por $Q(x) = x + 3$. Justifica tu respuesta.

34. ★☆☆ Encuentra un polinomio de grado 3 cuyas raíces sean 3, 3 y −5.

Sol.: $x^3 - x^2 - 21x + 45$

35. ★☆☆ Factoriza el polinomio $P(x) = 2x^3 - 6x^2 + 4x$.

Sol.: $2x(x - 2)(x - 1)$

36. ★☆☆ Factoriza el polinomio $P(x) = 9x^2 - 30x + 25$.

Sol.: $(3x - 5)^2$

37. ★★☆ Utiliza el teorema del resto para calcular el resto de las siguientes divisiones: a) $(x^{11} - 2x^2) : (x - 1)$; b) $(x^{12} - 81) : (x + 1)$; c) $(x^7 - 1) : (x - 1)$.

Sol.: a) −1; b) −80; c) 0

38. ★★☆ Encuentra el resto de las siguientes divisiones algebraicas, sin realizarlas: a) $(3x^2 - 5x + 1) : (x + 2)$; b) $(x^{25} - 3x^2 - 4) : (x - 1)$; c) $(x^{10} - 1) : (x + 1)$.

Sol.: a) 23; b) −6; c) 0

39. ★★☆ Calcula las raíces enteras de los siguientes polinomios de dos formas distintas:

a) $A(x) = 2x^3 + 9x^2 + 12x + 4$

b) $B(x) = x^4 - 8x^2 - 9$

Sol.: a) $x = -2$, b) $x = -3$, $x = +3$

40. ★★☆ Utilizando la regla de Ruffini, averigua si el polinomio $P(x) = x^4 + 3x^3 - x^2 - 4x - 1$ es múltiplo de:

a) $A(x) = x + 3$ b) $B(x) = x + 1$

41. ★★☆ Aplica el teorema del factor para: a) comprobar si $(x + 1)$ es un factor de: $P(x) = 3x^4 - 2x^2 + x$; b) identificar los factores del polinomio $P(x) = x^3 - 3x^2 - 6x + 8$, de entre los siguientes: $(x - 1)$, $(x - 3)$, $(x + 1)$, $(x + 2)$.

42. ★★☆ Encuentra el valor de *m*, sabiendo que $(x + 2)$ es un factor del polinomio $mx^3 - 3x^2 + 5x + 9m$.

Sol.: $m = 22$

43. ★★☆ Escribe un polinomio de grado 3 cuyas raíces sean 1, 2 y 3, y que el coeficiente del término de mayor grado sea 4.

44. ★★☆ Factoriza el polinomio $x^3 + 2x^2 - 16x - 32$.

Sol.: $(x - 4)(x + 2)(x + 4)$

45. ★★☆ Factoriza los siguientes polinomios: a) $(x+1)^2-4$; b) x^3-1; c) x^2+5x+6; d) $x^3-x^2-25x+25$.

Sol.: a) $(x-1)(x+3)$; b) $(x-1)(x^2+x+1)$; c) $(x+2)(x+3)$; d) $(x-5)(x-1)(x+5)$

46. ★★☆ Factoriza los siguientes polinomios: a) $-2x^3+17x-3$; b) $4x^3-20x^2+25x-3$; c) x^4-5x^2+4.

Sol.: a) $-(x+3)(2x^2-6x+1)$; b) $(x-3)(4x^2-8x+1)$; c) $(x-2)(x-1)(x+1)(x+2)$

47. ★★☆ Factoriza los siguientes polinomios: a) $12x^2(x-1)-4x(x-1)-5(x-1)$; b) $6x^4+35x^2-6$.

Sol.: a) $(x-1)(2x+1)(6x-5)$; b) $(x^2+6)(6x^2-1)$

48. ★★☆ Factoriza los siguientes polinomios y escribe sus raíces: a) $3x^3-12$; b) $4x^3-24x^2+36x$; c) $x^4+2x^3+x^2$; d) x^6-16x^2.

Sol.: a) $3(x^3-4)$; b) $4x(x-3)^2$; c) $x^2(x+1)^2$; d) $x^2(x-2)(x+2)(x^2+4)$

49. ★★☆ Factoriza los siguientes polinomios, sacando factor común: a) $2x(x-3)+5(x-3)$; b) $7t(s+9)-6(s+9)$; c) $5y(y^2+1)-4(y^2+1)$.

Sol.: a) $(x-3)(2x+5)$; b) $(s+9)(7t-6)$; c) $(y^2+1)(5y-4)$

50. ★★★ Razona cuáles de estas afirmaciones son ciertas:

a) $x^2-9=(x-3)^2$ para cualquier número real x.

b) El polinomio $4x^2+100$ es una suma de cuadrados; por lo tanto, no puede ser factorizado.

c) Al sacar factor común en el polinomio $3xy^3+9xy^2+21xy$, el trinomio resultante no puede ser factorizado.

4 FRACCIONES ALGEBRAICAS

51. ★☆☆ Propón una fracción equivalente a la fracción:

$$\frac{2x-1}{4x^2+3}$$

52. ★☆☆ Simplifica la siguiente fracción algebraica:

$$\frac{2(x-3)(x+3)}{4x(x+3)(x-1)}$$

Sol.: $\dfrac{x-3}{2x(x-1)}$

53. ★★☆ Comprueba si los siguientes pares de fracciones algebraicas son equivalentes:

a) $\dfrac{x-4}{3x-12}$ y $\dfrac{1}{2}$

b) $\dfrac{x^2+x}{2x}$ y $\dfrac{x}{2}$

c) $\dfrac{x}{x^2-x}$ y $\dfrac{2}{2x-2}$

54. ★★☆ Completa las siguientes equivalencias:

a) $\dfrac{x+1}{x^2-2x-3}=\dfrac{2x-4}{\dots}$ b) $\dfrac{x^2-x-2}{x^2-6x+8}=\dfrac{\dots}{x-4}$

Sol.: a) $2x^2-10x+12$; b) $x+1$

55. ★★☆ Calcula el M.C.D. y m.c.m. de los polinomios $A(x)=x^3-2x^2-x+2$ y $B(x)=x^4+2x^3-3x^2-8x-4$.

Sol.: M.C.D.$[A(x),B(x)]=(x+1)(x-2)$, m.c.m.$[A(x),B(x)]=(x+1)^2(x+2)(x-2)(x-1)$

56. ★★☆ Simplifica las siguientes fracciones algebraicas:

a) $\dfrac{x^2-9}{x^2+6x+9}$ b) $\dfrac{2-x}{x^2-4}$ c) $\dfrac{x^2+25-10x}{x^2+25}$

Sol.: a) $\dfrac{x-3}{x+3}$; b) $\dfrac{-1}{x+2}$; c) $1-\dfrac{10x}{x^2+25}$

57. ★★☆ Expresa las siguientes fracciones en su forma más simple:

a) $\dfrac{3(x+2)+5(x-4)}{4x-7}$ c) $\dfrac{x+2}{3x+6}$

b) $\dfrac{2x+4}{12}$ d) $\dfrac{5x^2+25x}{100x^3}$

Sol.: a) 2; b) $\dfrac{x+2}{6}$; c) $\dfrac{1}{3}$; d) $\dfrac{x+5}{20x^2}$

58. ★★☆ Factoriza mentalmente el numerador y el denominador de las siguientes fracciones algebraicas y luego simplifícalas, si es posible:

a) $\dfrac{x^2-x}{3x-3}$ c) $\dfrac{x^2-4x+4}{x^2-4}$

b) $\dfrac{(x+2)^2}{x^2-4}$ d) $\dfrac{x^2}{x^2-x}$

Sol.: a) $\dfrac{x}{3}$; b) $\dfrac{x+2}{x-2}$; c) $\dfrac{x-2}{x+2}$; d) $\dfrac{x}{x-1}$

5 OPERACIONES CON FRACCIONES ALGEBRAICAS

59. ★☆☆ Reduce a común denominador $\dfrac{-1}{x^2-1^2}$ y $\dfrac{x}{(x-1)^2}$.

Sol.: $\dfrac{-1(x-1)}{(x+1)(x-1)^2}$, $\dfrac{x(x+1)}{(x+1)(x-1)^2}$

60. ★★☆ Reduce a común denominador y simplifica las siguientes fracciones algebraicas:

a) $\dfrac{x-2}{x^2}+\dfrac{x+2}{x^2-x}-\dfrac{1}{x^2-1}$

b) $\dfrac{2x}{x^2+x-2}-\dfrac{5}{x+2}-\dfrac{x-4}{3x+6}$

— Efectúa las operaciones con fracciones algebraicas del ejercicio anterior, utilizando, *on line*, el programa Derive u otro similar. @

Sol.: a) $\dfrac{2x^3+x+2}{x^2(x^2-1)}$; b) $-\dfrac{x^2+4x-11}{3(x-1)(x+2)}$

61. ★★☆ Realiza las siguientes operaciones y simplifica:

a) $3x-\dfrac{3x^2-2}{x}+\dfrac{x-1}{2x^2}$ b) $(x+1)+\dfrac{x^2-3x+1}{x-1}$

Sol.: a) $\dfrac{5x-1}{2x^2}$; b) $\dfrac{x(2x-3)}{x-1}$

62. ★★☆ Calcula y expresa en su forma más simple:

$$\frac{m-1}{n}\cdot\frac{n^2+3n}{m^2-7m+6}$$

Sol.: $\frac{n+3}{m-6}$

63. ★★☆ Calcula y simplifica estas fracciones algebraicas:

a) $\frac{2x^2}{5}:\frac{4x}{10}$

b) $\frac{4x-8}{6}:\frac{x-2}{3}$

c) $\frac{x^2+4x+4}{x-7}:\frac{3x+6}{5}$

Sol.: a) x; b) 2; c) $\frac{5(x+2)}{3(x-7)}$

64. ★★☆ Calcula:

a) $\frac{x+2}{x+1}\cdot\frac{x^2+x}{x^2-4}$ b) $\frac{2x^2+x}{x^2-1}:\frac{2x+1}{3x^2-4}$

Sol.: a) $\frac{x}{x-2}$; b) $\frac{x(3x^2-4)}{(x-1)(x+1)}$

65. ★★☆ Realiza las siguientes operaciones con fracciones algebraicas:

a) $\frac{x^2-2x-8}{3x^2}\cdot\frac{6x}{3x-12}$

b) $\frac{3x-15}{6x^2}\cdot\frac{2x}{x^2-25}$

c) $\frac{x^2-x-6}{2x-6}:\frac{x^2-4}{4x^2}$

Sol.: a) $\frac{2(x+2)}{3x}$; b) $\frac{1}{x(x+5)}$; c) $\frac{2x^2}{x-2}$

66. ★★☆ Multiplica y divide las siguientes fracciones algebraicas:

a) $\frac{4x^2}{x-2}\cdot\frac{x^2-4}{12}$

b) $\frac{z^2+3z}{6z^2}:\frac{5z+15}{4}$

c) $\frac{13x+26}{39}:\frac{x^2+3x+2}{2}$

Sol.: a) $\frac{x^2(x+2)}{3}$; b) $\frac{2}{15z}$; c) $\frac{2}{3(x+1)}$

67. ★★☆ Calcula y simplifica:

a) $\left(x+\frac{4x-1}{x-4}\right)\cdot\frac{2}{x-1}$

b) $\left(\frac{1}{x^2-4}+\frac{1}{x-2}\right):\left(1+\frac{2}{x-2}\right)$

c) $\left(\frac{1}{x}+\frac{2}{x^2}\right)\cdot\frac{3x^2}{x+2}$

Sol.: a) $\frac{2(x+1)}{x-4}$; b) $\frac{x+3}{x(x+2)}$; c) 3

68. ★★☆ Escribe la siguiente fracción como suma de fracciones más simples $\frac{4x-1}{x^2+3x-10}$.

Sol.: $\frac{1}{x-2}+\frac{3}{x+5}$

69. ★★☆ Descompón las siguientes fracciones algebraicas en fracciones más simples:

a) $\frac{x^3-2x^2+5x-1}{x^2-x+2}$ b) $\frac{x^2+3x}{x+4}$

Sol.: a) $x-1+\frac{2x+1}{x^2-x+2}$; b) $x-\frac{x}{x+4}$

SÍNTESIS

70. ★★☆ Dado $Q(x) = 3x^3 - px^2 - 6x + 8$:

a) Sabiendo que 4 es una raíz del polinomio, encuentra p y los factores de $Q(x)$.

b) Expresa las raíces del polinomio dado.

c) Calcula su valor numérico para $x = -1$ y $x = 5$.

Sol.: a) $p = 11$, $(x-4)$, $(x+1)$ y $(3x-2)$; b) Raíces: 4, –1 y 2/3; c) $Q(-1) = 0$, $Q(5) = 78$

71. ★★☆ Efectúa las siguientes operaciones con fracciones algebraicas:

a) $4-\frac{1}{2x-1}\cdot\left(\frac{2}{x}-\frac{1}{x^2}\right)$

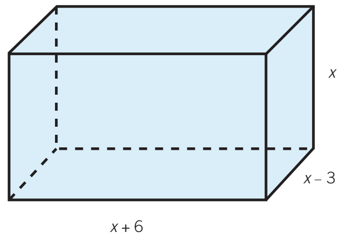
b) $\left(1-\frac{x-1}{x}\right)\cdot\frac{x^2}{x+3}-1$

c) $\left(\frac{1}{x}-\frac{1}{x+3}\right):\frac{3}{x^2}$

— Calcula el M.C.D. y el m.c.m. de los denominadores de los resultados.

Sol.: a) $\frac{4x^2-1}{x^2}$; b) $-\frac{3}{x+3}$; c) $\frac{x}{x+3}$

72. ★★★ Expresa el área $A(x)$ y el volumen $V(x)$ de esta caja usando polinomios:



— Calcula $V(x) + A(x)$, $V(x) - A(x)$, $V(x)\cdot A(x)$, $V(x) : A(x)$.

— Determina cuáles son las raíces de $V(x)$.

Sol.: $A(x) = 6x^2 + 12x - 36$, $V(x) = x^3 + 3x^2 - 18x$;
$V(x) + A(x) = x^3 + 9x^2 - 6x - 36$,
$V(x) - A(x) = x^3 - 3x^2 - 30x + 36$,
$V(x)\cdot A(x) = 6x^5 + 30x^4 - 108x^3 - 324x^2 + 648x$,
$V(x) : A(x) = \frac{x+1}{6}+\frac{-14x+6}{6x^2+12x-36}$;
Raíces: 0, 3, –6

Síntesis

1. Polinomios
2. Operaciones con polinomios
3. Factorización de polinomios
4. Fracciones algebraicas
5. Operaciones con fracciones algebraicas

POLINOMIOS

Un **polinomio en la indeterminada** *x* es una expresión algebraica del tipo:

$$P(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0$$

El **valor numérico** de un polinomio $P(x)$ para un valor dado $x = a$, $P(a)$, es el número real que se obtiene sustituyendo la variable *x* por su valor *a* y operando el polinomio.

Las **raíces** de un polinomio son los valores de la variable indeterminada que hacen que su valor numérico sea 0.

Operaciones con polinomios

- Suma
- Resta
- Multiplicación
- División

Propiedades de la suma: asociativa, conmutativa, elemento neutro, elemento opuesto.

Propiedades de la multiplicación: asociativa, conmutativa, elemento neutro, distributiva de la multiplicación respecto de la suma.

Regla de Ruffini

Factorización de polinomios

Teorema del resto: El resto $R(x)$ de la división de un polinomio $P(x)$ entre $(x - a)$ es igual al valor numérico de dicho polinomio para $x = a$; $P(a) = R(x)$.

Teorema del factor: Un polinomio $P(x)$ es divisible por $(x - a)$ si y solo si el valor numérico de dicho polinomio para $x = a$ es 0.

Factorización

Métodos: Sacar factor común, identificar las igualdades notables, determinar las raíces enteras (Ruffini, teoremas del resto y del factor), calcular las raíces resolviendo la ecuación.

FRACCIONES ALGEBRAICAS

Se llama **fracción algebraica** al cociente de dos polinomios con coeficientes reales $P(x)$ y $Q(x)$ de la forma: $\dfrac{P(x)}{Q(x)}$ con $Q(x) \neq 0$

Dos fracciones algebraicas son **equivalentes** si se cumple que: $\dfrac{P(x)}{Q(x)} = \dfrac{R(x)}{S(x)} \Leftrightarrow P(x) \cdot S(x) = R(x) \cdot Q(x)$

El **máximo común divisor (M.C.D.)** de dos o más polinomios es el polinomio de mayor grado que es divisor de todos ellos.

El **mínimo común múltiplo (m.c.m.)** de dos o más polinomios es el polinomio de menor grado que es múltiplo de todos ellos.

Simplificar una fracción algebraica es transformarla en otra más sencilla y equivalente.

Se llama **fracción algebraica irreducible** a aquella en la que entre numerador y denominador no existen más factores comunes que la unidad.

Operaciones con fracciones algebraicas

Suma, resta, multiplicación, división.
Descomposición en fracciones simples.

1 Calcula las siguientes operaciones con polinomios:

a) $[(3x^3 - 2x^2 + 5x - 15) + (2x^3 + 3x^2 + 12x - 3)] \cdot$
$\cdot (x^2 + 3)$

b) $(x^3 + x)(x - 7) + (5x - 15) + (2x^3 + 3x^2 + 12x - 3) \cdot$
$\cdot (x^2 + 3)$

Sol.: a) $5x^5 + x^4 + 32x^3 - 15x^2 + 51x - 54$;
b) $2x^5 + 4x^4 + 11x^3 + 7x^2 + 34x - 24$

2 Justifica si son correctas o no estas afirmaciones:

a) Si se divide $2x^3 + 4x^2 - 2x - 1$ entre $x - 2$, el resto es 3.

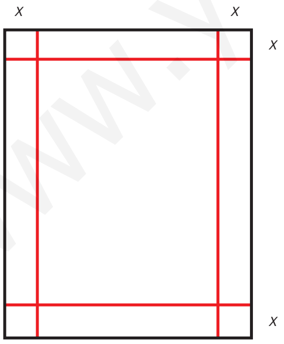
b) El binomio $x + 1$ es un factor de $4x^4 - x^3 - 3x + 2$.

c) Si se divide $2x^4 - 7x^3 + 6x^2 - 14x + 20$ entre $x - 3$, el resto es -5.

d) El binomio $x + 2$ es un factor de $5x^3 + 7x^2 + 12$.

3 Uno de los clientes de Industrias Cartoneras S. L. ha pedido una caja de cartón sin tapa. La caja se construye cortando los cuadrados de las esquinas de una hoja de cartón que mide un total de 24 × 18 cm, y levantando los laterales. El volumen de la caja viene dado por la fórmula $V(x) = 4x^3 - 84x^2 + 432x$, donde x representa la medida del cuadrado cortado.

Utiliza la división polinómica y el teorema del resto para calcular si un volumen de 640 cm^3 corresponde a cuadrados de esquina de 2, 3, 4 o 5 cm, e indica las dimensiones de la caja para este volumen.



Sol.: $x = 4$ cm, 16 × 10 × 4 (en cm)

4 Durante las 12 semanas de los meses de verano, el número de turistas que llegan hasta la isla de Tavira se puede modelizar teniendo en cuenta la función polinómica $N(x) = -0{,}1x^4 + 2x^3 - 14x^2 + 52x + 5$, donde $N(x)$ es el número (en miles) de turistas durante la semana x. Responde:

a) ¿Cuándo habrá más turistas en la isla de Tavira, en la semana 5 ($x = 5$) o en la semana 10?

b) ¿Cuándo habrá más turistas, en la primera semana o en la penúltima?

c) El número de turistas crece rápidamente entre las semanas 7 y 10. Usa el teorema del resto para determinar la semana de máxima afluencia a la isla.

5 Señala qué estrategia utilizarías para factorizar cada uno de los siguientes polinomios; después, factorízalos:

a) $x^2 - 3x - 4$

b) $24b^2 - 4b - 8$

c) $m^2 + 100 - 20m$

d) $2x^3 - 5x^2 - 2x + 5$

e) $x^6 - 1$

f) $6t^2 + 6t + 12$

Sol.: a) $(x - 4)(x + 1)$; b) $24(x - 2/3)(x + 1/2)$;
c) $(m - 10)^2$; d) $2(x - 1)(x + 1)(x - 5/2)$;
e) $(x + 1)(x^2 - x + 1)(x - 1)(x^2 + x + 1)$; f) $6t^2 + 6t + 12$

6 Juan ha factorizado un polinomio como $(a - b)(x - y)$, mientras que Pablo ha factorizado el mismo polinomio y ha obtenido como solución $(b - a)(y - x)$. ¿Pueden ser correctos ambos resultados? Justifica tu respuesta.

7 En el siguiente ejercicio te proponemos un polinomio y una de sus raíces. Factorízalos completamente e indica cuál es su valor numérico para la raíz.

a) $P(x) = -5x^2 + 2x + 24$, $x = -2$

b) $Q(x) = x^3 - 7x^2 + 7x + 15$, $x = 3$

c) $R(x) = x^4 + 2x^3 - 12x^2 - 18x + 27$, $x = -3$

d) $S(x) = x^4 + 4x^3 - 6x^2 - 4x + 5$, $x = 1$

e) $T(x) = 2x^3 + 11x^2 - x - 30$, $x = 3/2$

Sol.: a) $P(x) = -5(x + 2)(x - 12/5)$; b) $Q(x) = (x - 3)(x - 5)(x + 1)$;
c) $R(x) = (x - 1)(x - 3)(x + 3)^2$; d) $S(x) = (x - 1)^2(x + 1)(x + 5)$;
e) $T(x) = 2(x - 3/2)(x + 2)(x + 5)$

8 La empresa en la que trabajas, MVM Music S. L., está desarrollando un nuevo lector de MP3. Tus estudios de mercado han determinado que para x unidades vendidas, los beneficios se calculan mediante el polinomio $B(x) = 280x - 0{,}4x^2$ euros. El presidente de la empresa te pide que le aclares la fórmula. Halla una nueva expresión para los beneficios, donde la x no tenga exponentes.

9 Resuelve:

$$\left(\frac{x - 1}{x + 1}\right) : \left(\frac{2x - 1}{x^2 + 2x + 1}\right)$$

Sol.: $\dfrac{x^2 - 1}{2x - 1}$

BLOG

Gaussianos

En este blog encontrarás un interesante artículo, http://links.edebe.com/ur, en el que se habla de polinomios generadores de números primos.

– Describe algunos de ellos teniendo en cuenta, en cada caso, sus limitaciones.

SOCIETY

¿Para qué sirven los polinomios en la vida real?

Para resolver ecuaciones, para extraer raíces, para operar algebraicamente... ¿Solo para eso?

Además de todas las aplicaciones estrictamente matemáticas ya conocidas, los polinomios son útiles en diversos campos de la ciencia: telecomunicaciones, biología y medicina, para realizar pronósticos en economía y meteorología, etc.

Por ejemplo, en pediatría suelen utilizarse fórmulas en forma de fracciones algebraicas para deducir la dosis de medicación que debe tomar un menor, tomando como referencia la de un adulto. Para menores de entre 2 y 12 años se suele utilizar la **fórmula de Young:**

$$N = \frac{x\,y}{y + 12},$$

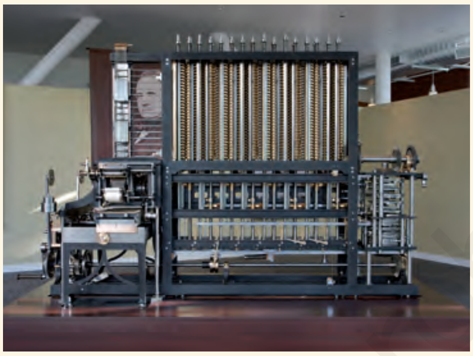
donde N es la fracción resultante, x es la dosis estándar para un adulto e y es la edad del menor.

– Busca en Internet algunas aplicaciones concretas de los polinomios en los campos antes mencionados.

SOCIETY

El padre de la computación

Charles Babbage *(1791-1871) fue un matemático británico que es considerado el padre de la computación debido a su afán por inventar máquinas de calcular. Entre ellas destaca la* ***máquina diferencial*** *(1822), cuya función debía ser la* ***tabulación de polinomios*** *usando el método numérico de las diferencias. Aunque empezó a construirla, nunca consiguió terminarla debido a diversas dificultades técnicas; no obstante, en 1991 el Museo de Ciencias de Londres construyó una réplica de ella basándose en el proyecto de Babbage y utilizando la tecnología de aquella época. La máquina funcionó sin problemas...*



CRITICAL SENSE

EL CÁLCULO DEL IPC

El **IPC** (Índice de Precios al Consumo) indica la variación de los precios de diversos artículos y servicios entre dos períodos de tiempo. En España se calcula mediante la **fórmula de Laspeyres,** de la que forma parte un determinado polinomio con coeficientes porcentuales.

PROBLEM-BASED PBL LEARNING

– Formad grupos de tres componentes y distribuid los roles y las tareas con el fin de investigar qué es el IPC.

– Buscad información en distintas fuentes para averiguar qué tipo de artículos y servicios se utilizan para calcular el IPC en España y de dónde se obtienen estos datos.

– ¿Crees que es ajustada la distribución porcentual de dichos artículos y servicios teniendo en cuenta el uso real que se hace de cada uno de ellos?

– Efectuad un cálculo simplificado del IPC en vuestro barrio o población. Para ello, definid una cesta de la compra básica y en el supermercado más próximo determinad la evolución semanal del precio de vuestra cesta a lo largo de un par meses. Comparad el resultado obtenido con la variación real del IPC en el mismo período.

– Exponed en clase el método que habéis seguido y vuestras conclusiones.