Inecuaciones: Actividades de recuperación.

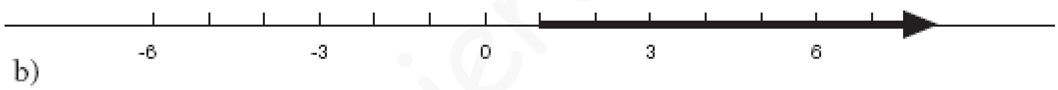
1.- Escribe la inecuación que corresponde a los siguientes enunciados:

a) El perímetro de un triángulo equilátero es menor que 24. (x = lado del triángulo)
b) Con 30 euros que tienes en la cartera tienes que comprar cuadernos que cuestan, cada uno, 1,80 euros y reservar 10 euros para comprar un libro. (x = número de cuadernos que puedes comprar)
c) La tercera parte de un número menos 15 es menor que 24. (x = número desconocido).
d) Los números x tales que su quinta parte es menor que 8.
e) Los números x tales que al reatarles su cuarta parte dan un valor menor o igual que 12.
d) Relación existente entre área de un cuadrado de lado x cm cuyo perímetro es menor o igual que el de un rectángulo de lados 6 cm y 2 cm y el área de éste.

2.- Indica si las siguientes afirmaciones son verdaderas o falsas:
a) Si x – 3 es positivo, entonces x > 3.
b) Si 3x < 3y, entonces x < y.
c) Si -5x > 5y, entonces x > y.

3.- Indica a qué inecuación corresponde cada una de los conjuntos solución siguientes.

a)



b)

Actividad resuelta:

Resolver la inecuación: $5x + 12 < 8x - 3$

Solución: Pasamos los términos de grado 1 al primer miembro y los términos constantes al segundo, y se obtiene: $5x - 8x < -12 - 3$

Simplificando, queda: $-3x < -15$. Dividiendo ambos miembros por -3: $\frac{-3x}{-3} > \frac{-15}{-3}$, de donde: $x > 5$. Solución: $(5, +\infty)$.

Ejercicios propuestos:

1.- Escribe una inecuación de primer grado cuya solución sea [2, +4).

2.- ¿Qué ocurre al multiplicar o dividir los dos miembros de una inecuación por un mismo número?. Explica la respuesta detallando los casos que pueden presentarse.

3.- Resuelve las siguientes inecuaciones. Expresa la solución en forma de intervalo y represéntala gráficamente en la recta real:

a) $-2x-4\leq 0$

b) 3x – 2 < 8x – 1

c) 2 (x – 3) > 5 (3x – 2) + 3x

d) 3(2 – x) – 4(2x – 1) ≥ 2x – 1 + 3(4 – x)

e) $\frac{1}{2}x+\frac{3}{4}\geq 0$

f) $\frac{6x-2}{3}>\frac{3}{2}$

g) $\frac{x}{3}-\frac{2x+1}{8}-\frac{8-10x}{45}>0$

h) $\frac{x}{3}-\frac{2x+1}{8}-\frac{8-10x}{45}>0$

i) $\frac{x-1}{2}-x<\frac{1-x}{4}-3$

j) $\frac{1-2x}{9}>1-\frac{x-4}{6}$

k) $\frac{x}{2}+\frac{x}{6}>2-\frac{x}{3}$

l) $\frac{x}{2}+\frac{x+1}{7}>x-2$

m) $\frac{2x-4}{6}-\frac{3x+1}{3}\leq\frac{2x-5}{12}-3x$

n) $\frac{1-3x}{2}-\frac{2(x-3)}{8}\leq\frac{2(x-3)}{4}$

o) $\frac{3x-3}{5}-\frac{4x+8}{2}\leq\frac{x}{4}-3x$

p) $\frac{x-1}{2}-x\leq\frac{1-x}{4}-3$

q) $4x-\frac{3-2x}{4}<\frac{3x-1}{3}+\frac{37}{12}$

r) $x(x-1)>x^2+3x+1$

s) $(x+2)(x-3)<(x-1)(x+5)$

t) $2(x+3)+3(x-1)>2(x+2)$

Actividad resuelta:

Resolver el siguiente sistema de inecuaciones de primer grado con una incógnita:

$$\left.\begin{array}{rcl} 3x+1 & \leq & 4 \\ 2x+3 & > & 7 \\ x-1 & > & 3 \end{array}\right\}$$

Solución: Seguiremos las siguientes etapas:

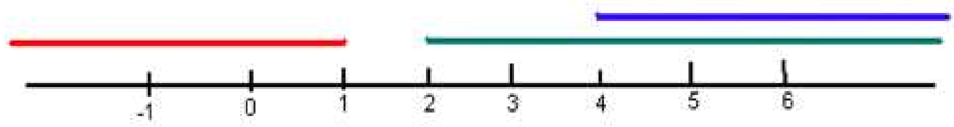
1º.- De la primera inecuación se obtiene que: $x\leq\frac{4-1}{3}\Rightarrow x\leq 1\Rightarrow x\in(-\infty,1]$

2º.- De la segunda: $x>\frac{7-3}{2}\Rightarrow x>2\Rightarrow x\in(2,+\infty)$

3º.- De la tercera: $x>3+1\Rightarrow x>4\Rightarrow x\in(4,+\infty)$

La solución del sistema será entonces la intersección de los tres intervalos obtenidos: $(-\infty,1]\cap(2,+\infty)\cap(4,+\infty)=\varnothing$ ya que no existe ningún número real que pueda ser al mismo tiempo menor o igual que 1, mayor que 2 y mayor que 4.

Para ver esto de forma más clara, se pueden representar gráficamente los soluciones parciales a cada inecuación, como se muestra en la siguiente gráfica (pintado en rojo la solución de la 1*, en verde la de la 2* y en azul la de la 3*:



Ejercicios propuestos:

1.- Resuelve los siguientes sistemas de inecuaciones:

a) $\begin{cases} 3x-4 & > & 5 \\ 2x+1 & < & 11 \end{cases}$ b) $\begin{cases} 2x-3 & < & 7 \\ x+1 & > & 8 \end{cases}$

c) $\begin{cases} 3x-5 & \leq & 0 \\ 2x+8 & \geq & 0 \end{cases}$ d) $\begin{cases} 3x-5 & \leq & 0 \\ 2x+8 & \geq & 0 \end{cases}$

e) $\left.\begin{array}{r} 2x-10 \geq 3-x \\ 6-x \leq 2 \end{array}\right\}$ f) $\left.\begin{array}{r} 5x-3 \leq 6+2x \\ 3-2x > 4 \end{array}\right\}$

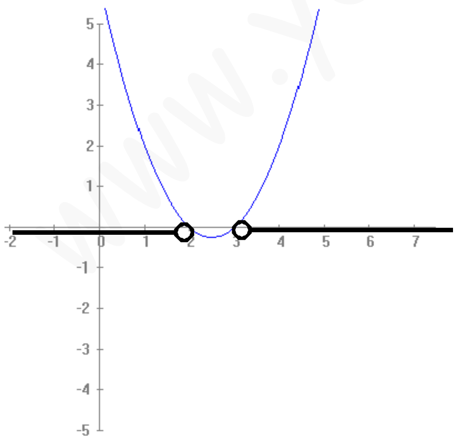
g) $\left.\begin{array}{r} 3x-15 \leq x-5 \\ -x+12 \geq 6 \end{array}\right\}$ h) $\begin{cases} 2(x-1)+x & > & 7 \\ 2x-7 & > & 9 \end{cases}$

i) $\begin{cases} x-2 & < & \dfrac{2(x-1)}{3} \\ \dfrac{x}{2} & \geq & \dfrac{2-x}{3} \end{cases}$

Actividad resuelta:

Resolver la inecuación $x^2 - 5x + 6 > 0$

Solución:



1º) Método gráfico:
Consideramos la ecuación cuadrática asociada:
$x^2 - 5x + 6 = 0$ cuyo discriminante es positivo
$(-5)^2 - 4 \cdot 6 = 1 > 0$
por lo que tiene dos raíces reales que son 3 y 2. En consecuencia, la parábola de ecuación $y = x^2 - 5x + 6$, asociada a ella, cortará al eje de abscisas en (2, 0) y (3, 0) y al ser el coeficiente de x^2 positivo ($a = 1 > 0$) abrirá sus ramas hacia las ordenadas positivas, como se indica en la figura. Por lo tanto la solución de la inecuación dada será

S = (-4, 2) χ (3, + 4). Cuya representación gráfica aparece en la figura.

No es preciso trazar la gráfica de la parábola para conocer el signo ya que basta asignar a *x* un valor fuera (o dentro) del intervalo (2, 3) y sustituir en la ecuación. Así en el ejemplo, si tomamos $x = 0$ (exterior al intervalo) y sustituimos en y = $x^2 - 5x + 6$, obtenemos el valor $y = 6 > 0$, de donde deducimos que tomará valores negativos cuando x pertenezca al intervalo (2, 3) y positivos cuando sea exterior a éste.

2º) Método de factorización

Como las soluciones de la ecuación cuadrática asociada son 2 y 3, factorizamos el trinomio: $x^2 - 5x + 6 = (x-2)(x-3)$ de donde la inecuación a resolver podemos escribirla como $(x-2)(x-3) > 0$ que puede resolverse a partir de la siguiente tabla:

	2 3		
x - 2	-	+	+
x - 3	-	-	+
$x^2 - 5x + 6$	+	-	+

De donde obtenemos S = (-4, 2)∪(3, + 4).

Ejercicios propuestos:

1.- Escribe una inecuación de segundo grado cuya solución sea el intervalo que se indica en cada caso. ¿Puede haber inecuaciones diferentes que tengan la misma solución?. Razona la respuesta.

a) (-3, 3) b) [- 2, 3] c) (-1, 4) d) (-4, 1) ∪ (2, + 4) e) R - [-4, -1]

2.- Resuelve y representa gráficamente la solución de las siguientes inecuaciones:

a) $x^2 < 25$ b) $9x^2 - 16 < 0$ c) $(x-1)^2 > x^2 + 1$

d) $x^2 + 5x + 6 \geq 0$ e) $x^2 + 3x + 3 \geq 0$ f) $x^2 + 3x + 3 \leq 0$

g) $3x^2 - 6x < 0$ h) $\dfrac{x-4}{3} < \dfrac{x^2}{x+42}$ i) $- 2x^2 + 3x - 1 < 0$

j) $2x^2 - 16x + 24 > 0$ k) $-5x^2 + 17x - 6 > 0$

l) $x^2 + 2x + 8 < 0$ m) $x^2 - 6 \leq 0$

n) $2x^2 - 4x + 2 < 0$ o) $3x^2 - 7x + 2 \leq 0$

p) $3 + 5x - 2x^2 \geq 0$ q) $x^2 + 3x + 4 < 0$

r) $\dfrac{1-x}{2} + \dfrac{1}{3} \geq \dfrac{x+2}{6}$ s) $8 - \dfrac{1}{3}(x+1) \leq 2x + 3$

t) $x^2 + 3x + 2 \leq 0$ u) $(2x-3)^2 \leq 1$

v) $(x-1)^2 - (x+2)^2 + 3x^2 \leq -7x + 1$

3.- Resuelve:

a) $x(x+3) - 2x > 4x + 4$

b) $4x(x+3) + 9 \geq 0$

c) $-x(x+2)+3 \geq 0$

4.- Resuelve:

a) $\dfrac{3x-6}{x-1} > 0$ b) $\dfrac{3x-6}{x+1} > 0$ c) $\dfrac{x}{x+1} > 0$

d) $\dfrac{x-2}{x+2} > 0$ e) $\dfrac{x-1}{x-2} \geq 0$ f) $\dfrac{(x+1)(x+2)}{x^2+4} > 0$

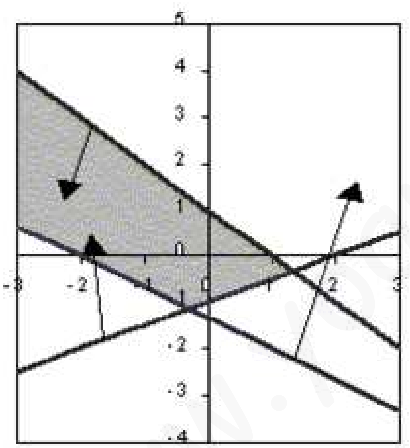
g) $\dfrac{(2x+5)(2x-3)}{x^2+1} \geq 0$ h) $\dfrac{(x+1)(x-1)}{x^2+1} \geq 0$

i) $\dfrac{(2x+3)(2x-1)}{4x^2+1} > 0$ j) $\dfrac{x^2-1}{x^2+1} \geq 0$

Actividad resuelta:

Resolver el siguiente sistema de inecuaciones con dos incógnitas $\left.\begin{array}{rcl} x+y-1 & \leq & 0 \\ 2x+3y+4 & > & 0 \\ x-2y-2 & < & 0 \end{array}\right\}$

Solución:
Seguiremos los siguientes pasos:



1.- En el mismo sistema de coordenadas, representamos cada una de las rectas cuya ecuación aparece al considerar las anteriores desigualdades como ecuaciones.
2.- Mediante una flecha se indica el semiplano solución de cada una de las inecuaciones.
3.- La solución será la región del plano sombreada en la figura que es la intersección de los semiplanos solución de cada inecuación.
Para la representación rápida de las rectas, basta con encontrar los puntos donde cortan a los ejes de coordenadas y unirlos entres sí.

La recta: x+y-1=0 corta al eje X (hacemos y=0) en (1, 0) y al eje Y (hacemos x=0) en (0, 1).
La recta: 2x+3y+4=0 corta a X en (-2, 0) y a Y en (0,-4/3)

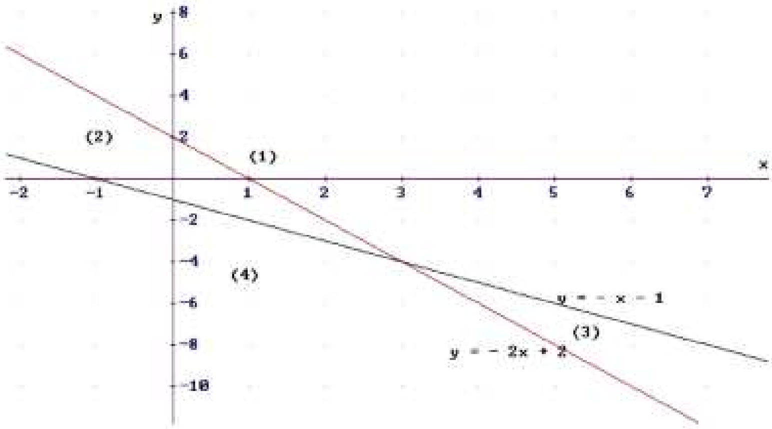
La recta: x-2y-2=0 corta a X en (2, 0) y a Y en (0, -1).

Ejercicios propuestos

1.- La solución de la inecuación $3x + y > 5$ es (rodea con una circunferencia la respuesta correcta)

a) Los puntos de la recta de ecuación $y = -3x + 5$.
b) El semiplano que está a la derecha de la recta de ecuación $y + 3x - 5 = 0$.
c) El semiplano que está a la izquierda de la recta de ecuación $y = 5 - 3x$.

2.- Dado el sistema $\begin{cases} x+y & > & -1 \\ 2x+y & \leq & 2 \end{cases}$ su solución es (sombrea con lápiz la región del plano correspondiente):



3.- Resuelve los siguientes sistemas de inecuaciones lineales con dos incógnitas y representa gráficamente la solución:

a) $\begin{cases} 6x-5y & \leq & 5 \\ 2x+4y & \leq & 30 \end{cases}$ b) $\begin{cases} 5x-4y & \geq & 0 \\ 2x+4y & \geq & 28 \end{cases}$ c) $\begin{cases} 6x-5y & \leq & 10 \\ 6x+4y & \leq & 46 \end{cases}$

d) $\begin{cases} 2x-5y & \leq & -5 \\ 3x+5y & \geq & 30 \end{cases}$ e) $\begin{cases} 5x-3y & \geq & 3 \\ 2x+6y & \leq & 30 \end{cases}$ f) $\begin{cases} 2x-3y & \leq & -3 \\ 4x+6y & \leq & 30 \end{cases}$

g) $\left.\begin{array}{c} x+y \geq 3-x \\ 6x-y \leq 2 \end{array}\right\}$ h) $\left.\begin{array}{c} 2x-y \leq 4 \\ -x+3y \geq -1 \end{array}\right\}$ i) $\left.\begin{array}{ccc} x+2y & \leq & 4 \\ x & \geq & 0 \\ y & \geq & 0 \end{array}\right\}$

j) $\begin{cases} 3x-2y & \geq & 4 \\ -x-3y & < & 5 \end{cases}$ k) $\begin{cases} x+y & \geq & 0 \\ 2x+y & \leq & 2y+3 \end{cases}$ l) $\left.\begin{array}{c} 5x-y \geq 3+2x \\ 6y-3x \leq 2 \end{array}\right\}$

m) $\left.\begin{array}{ccc} x-3y & \leq & -6 \\ x & \leq & -2 \\ y & \geq & -1 \end{array}\right\}$ n) $\left.\begin{array}{ccc} x-4y & \leq & 8 \\ x & \geq & -2 \\ y & \leq & 2 \end{array}\right\}$

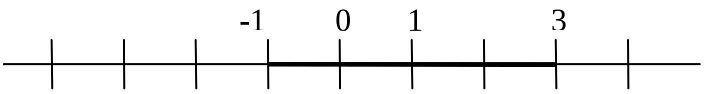
Actividad resuelta:

Resolver la inecuación: $|x-1| < 2$.

Solución. Podemos seguir tres procedimientos para resolverla.

1^er^ procedimiento. Esta basado en que, para cualquier función $f(x)$, se cumple que $|f(x)| > 0$, de donde: $|f(x)|^2 = (f(x))^2$. Aplicando esto a nuestro caso tendremos que, elevando al cuadrado los dos miembros de la inecuación dada, se obtiene la inecuación equivalente: $|x-1|^2 = (x-1)^2 < 4$, o bien: $x^2 - 2x - 3 < 0$, cuya solución es S = (-1,3).

2º procedimiento. Aplicamos el significado geométrico del valor absoluto. $|x|$ equivale a la distancia en el eje real del punto de abscisa x al origen. De forma análoga, $|x-a|$ puede interpretarse como la distancia entre los puntos de abscisas *x* e *a* respectivamente. En nuestro caso, para resolver la inecuación $|x-1| < 2$ deberemos buscar los puntos del eje real que estén a una distancia de 1 menor que 2, lo que corresponde al intervalo S = (-1,3).



3^er^ procedimiento. Nos basamos en este caso en la definición de valor absoluto. Si utilizamos la definición de la función valor absoluto, tendremos: $|x| = \begin{cases} x & si \quad x \geq 0 \\ -x & si \quad x < 0 \end{cases}$.

De forma análoga, podemos escribir $|x-a| = \begin{cases} x-a & si \quad x-a \geq 0 \\ -x+a & si \quad x-a < 0 \end{cases}$, lo que equivale a:

$|x-a| = \begin{cases} x-a & si \quad x \geq a \\ -x+a & si \quad x < a \end{cases}$.

Aplicando esto a nuestro ejercicio, tendremos: $|x-1| = \begin{cases} x-1 & si \quad x \geq 1 \\ -x+1 & si \quad x < 1 \end{cases}$. Con ello la inecuación original se transforma en los dos siguientes sistemas de dos inecuaciones con una incógnita: $\begin{cases} x \geq 1 \\ x-1 < 2 \end{cases}$, $\begin{cases} x < 1 \\ -x+1 < 2 \end{cases}$.

Del primero obtenemos la solución: S_1 = [1, 3) y de segundo sistema: S_2 = (-1, 1). Uniendo ambas soluciones se tendrá S = (-1, 3).

Ejercicios propuestos

1.- Resuelve las siguientes inecuaciones:

a) $|x| < 3$	b) $|x+1| < 5$
c) $|2x-3| < 4$	d) $|3x| > 7$
e) $|x-3| < 8$	f) $|x-1| + |x-2| > 1$

2.- Se ha medido un campo rectangular con un error menor que un metro. Los valores de los lados, x e y, cumplen $70 < x < 71$ y $47 < y < 48$. Determina entre qué valores está el perímetro y el área.

3.- Un alumno ha realizado dos exámenes de Matemáticas obteniendo calificaciones respectivas de 4,5 y 5,7 puntos. ¿Cuánto ha de sacar como mínimo en el tercero para aprobar, si la nota final es la media aritmética de las tres notas? ¿Y si el primer examen cuenta un 15%, el segundo un 35% y el tercero un 50%?

4.- Entre los triángulos isósceles de lado desigual igual a 20 cm., ¿cuáles tienen perímetro inferior a 200 cm.?

5.- Un padre tiene 33 años más que su hijo y el abuelo 33 años más que el padre. Hace tres años, sus edades sumaban menos de un siglo. ¿Qué edad puede tener cada uno?

6.- Una compañía de autobuses ofrece las siguientes modalidades de pago a sus viajeros:
Modalidad 1ª.- El viajero paga en cada viaje el precio del billete que es de 1,20 €.
Modalidad 2ª.- El viajero adquiere un bono de transporte al precio de 40 € válido para realizar 50 viajes.

Modalidad 3ª.- El viajero adquiere una tarjeta de transporte al precio de 20 € cuya presentación reduce el precio de cada viaje a 0,65 €.

Determinar:

a) Para qué número de viajes x es más rentable utilizar la modalidad 1ª
b) ¿Y la modalidad 2ª?
c) ¿Hay algún número de viajes para el que resulte más rentable la modalidad 3ª?.

Justificar las respuestas.

7.- Hallar los valores de m para que las ecuaciones indicadas en cada caso tengan dos raíces reales:

a) $x^2 - 6x + m = 0$

b) $8x^2 - (m-1)x + m - 7 = 0$

c) $mx^2 - 2(m+2)x - (m-10) = 0$

8.- ¿Qué número natural hay que añadir al denominador y numerador de $\frac{2}{5}$ si se quiere que la nueva fracción esté entre $\frac{1}{2}$ y $\frac{3}{4}$.