EXAMEN DERIVADAS

1.- Definición de función derivada de una función.
Utilizando la definición, calcula las derivadas de las siguientes funciones y halla la pendiente de las tangentes a estas curvas en el punto x=1, indica también el crecimiento en dicho punto. (4 puntos)

a) $f(x) = \dfrac{1}{2x}$

b) $g(x) = x^2 - 5$

2.- Halla las derivadas de las siguientes funciones: (5 puntos)

a) $y = \dfrac{2x^2 - 3x + 2}{5x}$

b) $y = \sqrt{\cos x}$

c) $y = \ln\left[\dfrac{x-2}{x+2}\right]$

d) $y = (x^2 + 3x) \cdot e^{x^2}$

e) $y = 2^x \cdot \operatorname{sen}(x^2 - 3)$

3.- Pon ejemplos de funciones cuya derivada sea $f'(x) = 3x^2$ ¿Cuántas existen?¿Por qué? (1 punto)

SOLUCIONES

1.- a) $f(x)=\frac{1}{2x}$ La función derivada es $f'(x)=\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}$, de donde:

$$f'(x)=\lim_{h\to 0}\frac{\frac{1}{2(x+h)}-\frac{1}{2x}}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{\frac{x-(x+h)}{2x(x+h)}}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{-h}{2xh(x+h)}=\lim_{h\to 0}\frac{-1}{2x(x+h)}=-\frac{1}{2x^2}$$

La pendiente de la tangente en x=1 será $f'(1)=-\frac{1}{2\cdot 1^2}=-\frac{1}{2}$ y, como es negativa, esto significa que en el punto 1 la función f es decreciente.

b) $g(x)=x^2-5$ La función derivada es $f'(x)=\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}$, de donde:

$$f'(x)=\lim_{h\to 0}\frac{(x+h)^2-5-(x^2-5)}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{x^2+h^2+2xh-5-x^2+5}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{h^2+2xh}{h}=$$

$$=\lim_{h\to 0}\frac{h(h+2x)}{h}=\lim_{h\to 0}(h+2x)=2x$$

La pendiente de la tangente en x=1 será $f'(1)=2\cdot 1=2$ y, como es positiva, esto significa que en el punto 1 la función f es creciente.

2.- a) $y=\frac{2x^2-3x+2}{5x}$

$$y'=\frac{(2x-3)\cdot 5x-(2x^2-3x+2)\cdot 5}{(5x)^2}=\frac{10x^2-15x-10x^2+15x-10}{25x^2}=\frac{-10}{25x^2}=-\frac{2}{5x^2}$$

b) $y=\sqrt{\cos x}$ $\quad y'=\frac{1}{2\sqrt{\cos x}}\cdot(-\text{sen } x)=-\frac{\text{sen } x}{2\sqrt{\cos x}}$

c) $y=\ln\left[\frac{x-2}{x+2}\right]$ $\quad y'=\frac{1}{\frac{x-2}{x+2}}\cdot\frac{1\cdot(x+2)-(x-2)\cdot 1}{(x+2)^2}=\frac{x+2-x+2}{\frac{x-2}{x+2}\cdot(x+2)^2}$

$$y'=\frac{4}{(x-2)(x+2)}=\frac{4}{x^2-4}$$

d) $y=(x^2+3x)\cdot e^{x^2}$ $\quad y'=(2x+3)\cdot e^{x^2}+(x^2+3x)\cdot e^{x^2}\cdot 2x$

$$y'=(2x+3)\cdot e^{x^2}+(2x^3+6x^2)\cdot e^{x^2}=e^{x^2}(2x^3+6x^2+2x+3)$$

e) $y=2^x\cdot\text{sen}(x^2-3)$ $\quad y'=2^x\cdot\ln 2\cdot\text{sen}(x^2-3)+2^x\cdot\cos(x^2-3)\cdot 2x$

$$y'=2^x\left[\ln 2\cdot\text{sen}(x^2-3)+2x\cos(x^2-3)\right]$$

3.- $f'(x)=3x^2$, para que la derivada sea ésta, tendremos que tener $f(x)=x^3$, pero no es la única, ya que la derivada de cualquier número es cero, luego también me valdrían: $f(x)=x^3-7;\quad f(x)=x^3+2;\quad f(x)=x^3+\frac{1}{3}$, etc

Es decir, hay infinitas funciones cuya derivada es $f'(x)=3x^2$