1 Matrices

1. Dadas las matrices $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ e $I = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$:

a) Calcula A^2, A^3 y A^4.

b) Escribe, en función de n, la n-ésima potencia de A.

c) Calcula el valor de la matriz $T = I + A + A^2 + A^3 + ... + A^n$.

2. Realizando las transformaciones que consideres adecuadas al aplicar el método de Gauss, calcula la matriz inversa de

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ -2 & 1 & 0 \\ 3 & -4 & 2 \end{pmatrix}$$

3. Dadas las matrices $X = \begin{pmatrix} 1+\lambda & 1-\lambda \\ 1-\lambda & 1+\lambda \end{pmatrix}$, $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$:

a) Demuestra que A y B son conmutables, es decir, que $A \cdot B = B \cdot A$.

b) Calcula las potencias n-ésimas de A y de B.

c) Escribe X en función de A y de B.

d) Aplica la fórmula del binomio de Newton para calcular X^n. Ten en cuenta que puedes aplicar dicha fórmula ya que A y B son conmutables.

4. Se dice que una matriz cuadrada es **idempotente** cuando verifica que su segunda potencia es igual a ella misma.

a) Escribe algún ejemplo de matriz cuadrada de orden 3, distinta de la matriz unidad y de la matriz nula, y que sea idempotente.

b) Calcula el valor de λ que hace que la segunda potencia de la matriz $A = \begin{pmatrix} 4 & 2 \\ \lambda & -3 \end{pmatrix}$ sea igual a la misma matriz A y que, por lo tanto, hace que la matriz A sea idempotente.

c) Encuentra todas las matrices del tipo $\begin{pmatrix} 1 & a \\ b & 0 \end{pmatrix}$ que sean idempotentes.

5. Se dice que una matriz cuadrada es **nilpotente** cuando alguna de sus potencias es igual a la matriz nula. En el caso de que n sea el menor entero positivo tal que $A^n = O$, se dice que A es una matriz nilpotente de **grado** n.

a) Demuestra que la matriz $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 5 & 2 & 6 \\ -2 & -1 & -3 \end{pmatrix}$ verifica que $A^3 = O$ y que, por tanto, es nilpotente de grado 3.

b) Encuentra todas las matrices del tipo $\begin{pmatrix} 0 & a \\ b & 0 \end{pmatrix}$ que verifiquen que su segunda potencia sea igual a la matriz nula y que, por tanto, sean nilpotentes de grado 2.

6. Ciertos animales de cierta especie se clasifican de la siguiente forma según que posean los siguientes tipos de genes:

TIPO 1: *GG* dominante TIPO 2: *Gg* híbrido TIPO 3: *gg* recesivo

La reproducción de estos animales siempre se realiza mediante el cruce de un animal del tipo 1 con otro de cualquier tipo. Los hijos heredan un gen de cada padre con probabilidad 0,5.

a) Escribe los valores de la matriz A de forma que:

i) A sea una matriz cuadrada de orden 3.

ii) a_{ij} representa la probabilidad de que sabiendo que la madre es un animal del tipo i el hijo resulta ser un animal del tipo j.

b) Escribe los valores de la matriz B de forma que:

i) B sea una matriz cuadrada de orden 3.

ii) b_{ij} representa la probabilidad de que, sabiendo que la abuela materna es un animal del tipo i, el nieto resulta ser un animal del tipo j.

SOLUCIONES

1. a) $A^2 = A \cdot A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

$A^3 = A^2 \cdot A = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -3 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

$A^4 = A^2 \cdot A^2 = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -4 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

b) Observando las potencias, se obtiene:

Si $A^{n-1} = \begin{pmatrix} 1 & -n+1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

$A^n = A^{n-1} \cdot A = \begin{pmatrix} 1 & 1-n \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -n \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

c) $T = I + A + A^2 + A^3 + \ldots + A^n = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} +$
$+ \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + \ldots + \begin{pmatrix} 1 & -n \\ 0 & 1 \end{pmatrix} =$

$$= \begin{pmatrix} -n+1 & \dfrac{-n(n+1)}{2} \\ 0 & n+1 \end{pmatrix}$$

b) $A^2 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}$

$A^3 = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 2 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 4 \\ 4 & 4 \end{pmatrix} \Rightarrow$

$\Rightarrow A^n = \begin{pmatrix} 2^{n-1} & 2^{n-1} \\ 2^{n-1} & 2^{n-1} \end{pmatrix}$

$B^2 = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & -2 \\ -2 & 2 \end{pmatrix}$

$B^3 = \begin{pmatrix} 2 & -2 \\ -2 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & -4 \\ -4 & 4 \end{pmatrix} \Rightarrow$

$\Rightarrow B^n = \begin{pmatrix} 2^{n-1} & -2^{n-1} \\ -2^{n-1} & 2^{n-1} \end{pmatrix}$

c) $X = \begin{pmatrix} 1+\lambda & 1-\lambda \\ 1-\lambda & 1+\lambda \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} =$
$= A + \lambda B$

d) $X^n = (A + \lambda B)^n = A^n + n\lambda A^{n-1} \cdot B +$
$+ \binom{n}{2} \lambda^2 A^{n-2} \cdot B^2 + \ldots + \binom{n}{n} \lambda^n B^n =$
$= A^n + \lambda^n B^n = 2^{n-1} \begin{pmatrix} 1+\lambda^n & 1-\lambda^n \\ 1-\lambda^n & 1+\lambda^n \end{pmatrix}$

2. $\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 3 & -4 & 2 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow[F_3-3F_1]{F_2+2F_1} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & -2 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & -7 & 5 & -3 & 0 & 1 \end{array}\right)$

$\xrightarrow[3F_3]{} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & -2 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & -21 & 15 & -9 & 0 & 3 \end{array}\right) \xrightarrow[F_3+7F_2]{}$

$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & -2 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 5 & 7 & 3 \end{array}\right) \xrightarrow[F_1+F_3]{F_2+2F_3} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 0 & 6 & 7 & 3 \\ 0 & 3 & 0 & 12 & 15 & 6 \\ 0 & 0 & 1 & 5 & 7 & 3 \end{array}\right) \xrightarrow[\frac{1}{3}F_2]{}$

$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 0 & 6 & 7 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & 4 & 5 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 5 & 7 & 3 \end{array}\right) \xrightarrow[F_1-F_2]{} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 2 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 4 & 5 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 5 & 7 & 3 \end{array}\right)$

3. a) $A \cdot B = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$

$B \cdot A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow$
$\Rightarrow A \cdot B = B \cdot A$

4. a) $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ $\quad A^2 = A \Rightarrow A$ es idempotente.

b) $A^2 = \begin{pmatrix} 4 & 2 \\ \lambda & -3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 4 & 2 \\ \lambda & -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 16 + 2\lambda & 2 \\ \lambda & 9 + 2\lambda \end{pmatrix} =$
$= \begin{pmatrix} 4 & 2 \\ \lambda & -3 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} 16 + 2\lambda = 4 \\ 9 + 2\lambda = -3 \end{cases} \Rightarrow \lambda = -6$

c) $A^2 = \begin{pmatrix} 1 & a \\ b & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & a \\ b & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 + ab & a \\ b & ab \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & a \\ b & 0 \end{pmatrix}$
$\Rightarrow \begin{cases} 1 + ab = 1 \\ ab = 0 \end{cases} \Rightarrow ab = 0 \Rightarrow a = 0$ o $b = 0$

5. a) $A^2 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 5 & 2 & 6 \\ -2 & -1 & -3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 5 & 2 & 6 \\ -2 & -1 & -3 \end{pmatrix} =$

$= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 3 & 3 & 9 \\ -1 & -1 & -3 \end{pmatrix}$ $\quad A^3 = 0$

b) $A^2 = \begin{pmatrix} 0 & a \\ b & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & a \\ b & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ab & 0 \\ 0 & ab \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow$
$\Rightarrow \begin{cases} ab = 0 \\ ab = 0 \end{cases} \Rightarrow ab = 0 \Rightarrow a = 0$ o $b = 0$

6. a) $A = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ $\quad$ b) $B = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \end{pmatrix}$

B se puede calcular elevando la matriz A al cuadrado.

2 Determinantes

1. Se considera el determinante de tercer orden $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a & b & c \\ a^2 & b^2 & c^2 \end{vmatrix}$

a) Sustituye la tercera fila por la diferencia entre ella misma y la segunda multiplicada por un cierto número de manera que el primer elemento de la nueva tercera fila sea nulo. ¿Es este nuevo determinante equivalente al primero? Factoriza todos los elementos que puedas en el determinante hallado.

b) De la misma forma, y considerando el nuevo determinante obtenido en el apartado anterior, sustituye la segunda fila por la diferencia entre ella misma y la primera multiplicada por un cierto número de manera que el primer elemento de la nueva segunda fila sea también nulo.

c) Desarrolla el determinante por los elementos de la primera columna, extrayendo los factores comunes de las columnas que se pueda y factorizando el resultado.

d) Aplica lo anterior para obtener el valor de $|A| = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 4 \\ 4 & 9 & 16 \end{vmatrix}$

2. Se considera el determinante de cuarto orden $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ a & b & c & d \\ a^2 & b^2 & c^2 & d^2 \\ a^3 & b^3 & c^3 & d^3 \end{vmatrix}$

a) Aplicando un procedimiento análogo al utilizado en la anterior actividad, reduce el valor del determinante propuesto al producto de un número por el valor de un determinante de tercer orden. ¿Hace falta calcular el valor de este nuevo determinante o lo puedes deducir de la actividad anterior?

b) Calcula el valor del determinante para el caso en que $a = \log 2$, $b = \log 3$, $c = \log 4$ y $d = \log 5$

3. Calcula el valor del determinante $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 1 & 4 & 9 & 16 & 25 \\ 1 & 8 & 27 & 64 & 125 \\ 1 & 16 & 81 & 256 & 626 \end{vmatrix}$

4. Sabiendo que $\begin{vmatrix} x & y & z \\ a & b & c \\ r & s & t \end{vmatrix} = 5$, calcula el valor del determinante $\begin{vmatrix} x+y & y+z & z+x \\ a+b & b+c & c+a \\ r+s & s+t & t+r \end{vmatrix}$

5. a) Comprueba que los números 297, 351 y 405 son todos múltiplos de 27.

b) Demuestra, sin necesidad de desarrollarlo, que el determinante $\begin{vmatrix} 2 & 9 & 7 \\ 3 & 5 & 1 \\ 4 & 0 & 5 \end{vmatrix}$ es múltiplo de 27.

6. Calcula el valor del determinante de orden n: $\begin{vmatrix} x & x & x & x \\ -x & y & x & x \\ -x & -x & y & x \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ -x & -x & -x & y \end{vmatrix}$

7. Compara el valor de los siguientes determinantes: $|A| = \begin{vmatrix} 1 & x^2 & x^3 \\ 1 & y^2 & y^3 \\ 1 & z^2 & z^3 \end{vmatrix}$ y $|B| = \begin{vmatrix} yz & x & x^2 \\ xz & y & y^2 \\ xy & z & z^2 \end{vmatrix}$

SOLUCIONES

1. a) $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a & b & c \\ a^2 & b^2 & c^2 \end{vmatrix} \underset{F_3 - aF_2}{=} \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a & b & c \\ 0 & b^2 - ab & c^2 - ac \end{vmatrix} =$

$= \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a & b & c \\ 0 & b(b-a) & c(c-a) \end{vmatrix}$

b) $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a & b & c \\ 0 & b(b-a) & c(c-a) \end{vmatrix} \underset{F_2 - aF_1}{=}$

$= \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & b-a & c-a \\ 0 & b(b-a) & c(c-a) \end{vmatrix}$

c) $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & b-a & c-a \\ 0 & b(b-a) & c(c-a) \end{vmatrix} =$

$= \begin{vmatrix} b-a & c-a \\ b(b-a) & c(c-a) \end{vmatrix} =$

$= (b-a)\cdot(c-a)\cdot \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ b & c \end{vmatrix} =$

$= (b-a)\cdot(c-a)\cdot(c-b)$

d) $|A| = (3-2)\cdot(4-2)\cdot(4-3) = 2$

2. a) Restándole, a cada fila, la anterior multiplicada por a, se obtiene un determinante equivalente:

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & b-a & c-a & d-a \\ 0 & b^2-ab & c^2-ac & d^2-ad \\ 0 & b^3-ab^2 & c^3-ac^2 & d^3-ad^2 \end{vmatrix} =$$

$= (b-a)\cdot(c-a)\cdot(d-a)\cdot(c-b)\cdot$
$\cdot(d-b)\cdot(d-c)$

b) $|A| = (\log 3 - \log 2)\cdot(\log 4 - \log 2)\cdot$
$\cdot(\log 5 - \log 2)\cdot(\log 4 - \log 3)\cdot$
$\cdot(\log 5 - \log 3)\cdot(\log 5 - \log 4) =$

$= \log\frac{3}{2}\cdot\log 2\cdot\log\frac{5}{2}\cdot\log\frac{4}{3}\cdot\log\frac{5}{3}\cdot$

$\cdot\log\frac{5}{4} = 0{,}000057$

3. $|A| = (2-1)\cdot(3-1)\cdot(4-1)\cdot(5-1)\cdot$
$\cdot(3-2)\cdot(4-2)\cdot(5-2)\cdot(4-3)\cdot(5-3)\cdot$
$\cdot(5-4) = 288$

4. $\begin{vmatrix} x+y & y+z & z+x \\ a+b & b+c & c+a \\ r+s & s+t & t+r \end{vmatrix} \underset{C_1 + C_2 + C_3}{=}$

$= \begin{vmatrix} 2(x+y+z) & y+z & z+x \\ 2(a+b+c) & b+c & c+a \\ 2(r+s+t) & s+t & t+r \end{vmatrix} =$

$= 2\cdot\begin{vmatrix} x+y+z & y+z & z+x \\ a+b+c & b+c & c+a \\ r+s+t & s+t & t+r \end{vmatrix} \underset{C_2 - C_3}{=}$

$= 2\cdot\begin{vmatrix} x & y+z & z+x \\ a & b+c & c+a \\ r & s+t & t+r \end{vmatrix} \underset{C_3 - C_1}{=}$

$= 2\cdot\begin{vmatrix} x & y+z & z \\ a & b+c & c \\ r & s+t & t \end{vmatrix} \underset{C_2 + C_3}{=}$

$= 2\cdot\begin{vmatrix} x & y & z \\ a & b & c \\ r & s & t \end{vmatrix} = 2\cdot 5 = 10$

5. a) $27\cdot 11 = 297 \quad 27\cdot 13 = 315 \quad 27\cdot 15 = 405$

b) $\begin{vmatrix} 2 & 9 & 7 \\ 3 & 5 & 1 \\ 4 & 0 & 5 \end{vmatrix} \underset{C_3 + 10C_2 + 100C_1}{=} \begin{vmatrix} 2 & 9 & 297 \\ 3 & 5 & 351 \\ 4 & 0 & 405 \end{vmatrix}$

Como todos los elementos de la última columna son múltiplos de 27, se puede extraer este número como factor común y, por tanto, el valor del determinante es múltiplo de 27.

6. Sumando, a cada fila, la fila 1, se obtiene un determinante equivalente:

$$\begin{vmatrix} x & x & \dots & x \\ 0 & y+x & \dots & 2x \\ 0 & 0 & \dots & 2x \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & y+x \end{vmatrix} = x\cdot(y+x)^{n-1}$$

7. $|B| = \begin{vmatrix} yz & x & x^2 \\ xz & y & y^2 \\ xy & z & z^2 \end{vmatrix} = \frac{xyz}{xyz}\begin{vmatrix} yz & x & x^2 \\ xz & y & y^2 \\ xy & z & z^2 \end{vmatrix} =$

$= \frac{1}{xyz}\begin{vmatrix} xyz & x^2 & x^3 \\ xyz & y^2 & y^3 \\ xyz & z^2 & z^3 \end{vmatrix} = \frac{xyz}{xyz}\begin{vmatrix} 1 & x^2 & x^3 \\ 1 & y^2 & y^3 \\ 1 & z^2 & z^3 \end{vmatrix} = |A|$

El valor de los dos determinantes coincide.

3 Resolución de sistemas de ecuaciones lineales

1. Estudia, según los diferentes valores del parámetro a, la compatibilidad o incompatibilidad del siguiente sistema y resuélvelo en los casos en que sea posible: $\begin{cases} 2x + 2y - 3z = 6 + a \\ y + z = 6 \\ 3x + y - z = 17 \\ 2y - z = a \end{cases}$

2. Estudia, según los diferentes valores del parámetro a, el tipo de compatibilidad del siguiente sistema homogéneo y escribe todas sus soluciones en cada caso: $\begin{cases} 2x - 3y = 0 \\ 2x + ay - z = 0 \\ y - z = 0 \\ 2x + 2ay + z = 0 \end{cases}$

3. Estudia para qué valores de a y de b el siguiente sistema es compatible determinado:

$$\begin{cases} abx - ay + a^2z = 1 \\ -bx + 2y - az = 2 \\ b^2x - by + 3abz = 3 \end{cases}$$

4. Dado el siguiente sistema de ecuaciones lineales: $\begin{cases} ax - 3y + z = -10 \\ -x + ay + z = 3 \\ -3x + y + 2z = 1 \\ -y - 2z = 2 \end{cases}$

a) Discute el sistema según los diferentes valores del parámetro a.

b) Resuélvelo para el valor $a = 2$.

5. Dada la matriz $A = \begin{pmatrix} -4 & 11 & 5 \\ -3 & 8 & 3 \\ 3 & -7 & -2 \end{pmatrix}$

a) Calcula los valores de λ tales que $|A - \lambda I| = 0$ siendo I la matriz identidad.

b) Resuelve el sistema de ecuaciones lineales $A \cdot X = 2X$ siendo $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$.

6. Tres caños diferentes surten de agua a un estanque. El primero y el segundo juntos tardan 63 horas en llenarlo; el primero y el tercero juntos tardan 70 horas en realizar la misma operación, mientras que el segundo y el tercero tardan 90 horas.

a) Calcula el tiempo que tardarán en llenar el estanque cada uno de los caños por separado.

b) Calcula el tiempo que se tardaría en llenar el estanque si funcionan los tres caños a la vez.

7. Se considera el polinomio $P(x) = x^3 + ax^2 + bx + c$, del cual sabemos que cumple las siguientes condiciones:

i) Es divisible por $x - 1$.

ii) Si se divide dicho polinomio entre $x + 2$, se obtiene de resto -9.

iii) Si se divide dicho polinomio entre $x - 2$, se obtiene de resto 11.

Calcula el valor de los coeficientes indeterminados a, b y c.

SOLUCIONES

1. $M = \begin{pmatrix} 2 & 2 & -3 \\ 0 & 1 & 1 \\ 3 & 1 & -1 \\ 0 & 2 & -1 \end{pmatrix}$ $\quad M^* = \begin{pmatrix} 2 & 2 & -3 & 6+a \\ 0 & 1 & 1 & 6 \\ 3 & 1 & -1 & 17 \\ 0 & 2 & -1 & a \end{pmatrix}$

$$|M^*| = \begin{vmatrix} 2 & 2 & -3 & 6+a \\ 0 & 1 & 1 & 6 \\ 3 & 1 & -1 & 17 \\ 0 & 2 & -1 & a \end{vmatrix} = 2 \cdot (a-6)$$

- $a \neq 6 \Rightarrow \text{rango}(M^*) = 4 \Rightarrow \text{rango}(M) \neq \text{rango}(M^*) \Rightarrow$ $\Rightarrow$ El sistema es incompatible.
- $a = 6 \Rightarrow \text{rango}(M) = \text{rango}(M^*) = 3 \Rightarrow$ $\Rightarrow$ El sistema es compatible determinado.

Resolviéndolo se obtiene la única solución:
$x = 5$, $y = 4$, $z = 2$

2.

$$M = \begin{pmatrix} 2 & -3 & 0 \\ 2 & a & -1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 2 & 2a & 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{vmatrix} 2 & -3 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 2 \neq 0 \text{ y } \begin{vmatrix} 2 & -3 & 0 \\ 2 & a & -1 \\ 0 & 1 & -1 \end{vmatrix} = -2a - 4$$

$$\begin{vmatrix} 2 & -3 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 2 & 2a & 1 \end{vmatrix} = 4a + 8$$

- $a \neq -2 \Rightarrow \text{rango}(M) = 3 \Rightarrow$ Sistema compatible determinado.
  La única solución es $x = 0$, $y = 0$, $z = 0$
- $a = -2 \Rightarrow \text{rango}(M) = 2 \Rightarrow$ Sistema compatible indeterminado, equivalente a $\begin{cases} 2x - 3y = 0 \\ y - z = 0 \end{cases}$

Resolviéndolo, se obtienen las infinitas soluciones: $x = 3t$, $y = 2t$, $z = 2t$, siendo t cualquier número real.

3. $\begin{vmatrix} ab & -a & a^2 \\ -b & 2 & -a \\ b^2 & -b & 3ab \end{vmatrix} = ab \begin{vmatrix} a & -a & a \\ -1 & 2 & -1 \\ b & -b & 3b \end{vmatrix} =$

$$= a^2b^2 \begin{vmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -1 & 2 & -1 \\ 1 & -1 & 3 \end{vmatrix} = 2a^2b^2$$

El sistema tiene una única solución, excepto para $a = 0$ o $b = 0$.

4. a) $\begin{vmatrix} a & -3 & 1 & -10 \\ -1 & a & 1 & 3 \\ -3 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & -1 & -2 & 2 \end{vmatrix} = 3 \cdot (a-2) \cdot (2a-15)$

- $a = 2$; $\text{rango}(M) = \text{rango}(M^*) = 3 \Rightarrow$ Compatible determinado.
- $a = 7{,}5$; $\text{rango}(M) = \text{rango}(M^*) = 3 \Rightarrow$ Compatible determinado.
- $a \neq 2$ y $a \neq 7{,}5$; $\text{rango}(M) = 3$, $\text{rango}(M^*) = 4$ $\Rightarrow$ Incompatible.

b) Si $a = 2$
$x = -1$, $y = 2$, $z = -2$

5.
a) $|A - \lambda I| = \begin{vmatrix} -4-\lambda & 11 & 5 \\ -3 & 8-\lambda & 3 \\ 3 & -7 & -2-\lambda \end{vmatrix} =$

$= (\lambda + 1) \cdot (1 - \lambda) \cdot (\lambda - 2) = 0 \Rightarrow$
$\Rightarrow \lambda = -1, \lambda = 1, \lambda = 2$

b) Sistema compatible indeterminado, las infinitas soluciones son:
$x = t$, $y = t$, $z = -t$

6. a) Si el primero tarda x horas, el segundo y horas y el tercero z horas, en una sola hora cada uno de ellos llenaría $\frac{1}{x}$, $\frac{1}{y}$ y $\frac{1}{z}$ del estanque, respectivamente. Se plantea el sistema:

$$\begin{cases} \frac{1}{x} + \frac{1}{y} = \frac{1}{63} \\ \frac{1}{x} + \frac{1}{z} = \frac{1}{70} \\ \frac{1}{y} + \frac{1}{z} = \frac{1}{90} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 105 \text{ horas} \\ y = 147{,}5 \text{ horas} \\ z = 210 \text{ horas} \end{cases}$$

b) $\dfrac{1}{\frac{1}{105} + \frac{1}{157{,}5} + \frac{1}{210}} \approx 48$ horas y 28 minutos

7. $\begin{cases} P(1) = 0 \\ P(-2) = -9 \\ P(2) = 11 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a + b + c = -1 \\ 4a - 2b + c = -1 \\ 4a + 2b + c = 3 \end{cases} \Rightarrow$

$\Rightarrow a = 1$, $b = 1$ y $c = -3$

4 Curvas en el plano: lugares geométricos

1. a) Se consideran los puntos P y Q cuyas coordenadas polares son $P(r_p, \alpha_p)$ y $Q(r_q, \alpha_q)$. Deduce una fórmula que permita calcular la distancia que separa dichos puntos en función de dichas coordenadas.

b) Calcula la distancia que separa los puntos P y Q cuyas coordenadas polares son: $P\left(5, \frac{\pi}{9}\right)$ y $Q\left(4, \frac{4\pi}{9}\right)$.

2. a) Se considera el triángulo de vértices OAB cuyas coordenadas polares son $O(0, 0)$, $A(r_A, \alpha_A)$ y $B(r_B, \alpha_B)$, y tales que A y B son puntos del primer cuadrante y $\alpha_B > \alpha_A$. Deduce una fórmula que permita calcular la medida de la altura relativa al lado OA en función de dichas coordenadas.

b) Deduce una fórmula que permita calcular el área del triángulo en función de dichas coordenadas.

c) Calcula el área del triángulo determinado por los vértices OAB cuyas coordenadas polares son:
$O(0, 0)$, $A\left(2, \frac{\pi}{9}\right)$ y $B\left(3, \frac{5\pi}{18}\right)$

3. Eliminando t en la ecuaciones paramétricas $\begin{cases} x = 2\cos t - 3 \\ y = 3\,\text{sen}\, t + 2 \end{cases}$, escribe la correspondiente ecuación implícita. Indica la figura geométrica que representa.

4. Eliminando t en la ecuaciones paramétricas $\begin{cases} x = \dfrac{2t}{1 + t^3} \\ y = \dfrac{2t^2}{1 + t^3} \end{cases}$, escribe la correspondiente ecuación implícita.

5. Un objeto se lanza con una velocidad inicial v_0 y formando ésta un ángulo α con la horizontal.

La posición del objeto, con respecto al tiempo t, viene dada por las ecuaciones paramétricas:

$$\begin{cases} x = v_0 \cos\alpha \cdot t \\ y = v_0\,\text{sen}\,\alpha \cdot t - \dfrac{1}{2} g \cdot t^2 \end{cases}$$

siendo g el valor de la aceleración de la gravedad.

a) Determina la ecuación implícita de la trayectoria del móvil.

b) Interpreta la forma de dicha trayectoria.

c) Suponiendo que $\alpha = 30°$, $v_0 = 500$ m/s y $g = 9{,}8$ m/s^2, calcula la distancia horizontal recorrida por el objeto y la duración del movimiento.

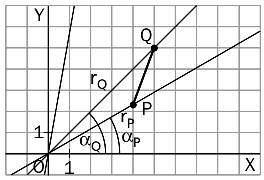
6. Determina la ecuación en coordenadas polares de la hipérbola $\frac{x^2}{4} - \frac{y^2}{4} = 1$

7. Halla la ecuación en coordenadas polares de la elipse $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{3} = 1$

8. Halla la ecuación en coordenadas polares de la parábola $x^2 = 2y$

SOLUCIONES

1.



a) Aplicando el teorema del coseno:

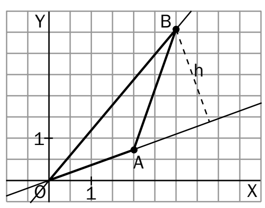
$$d(Q,\ P) = \sqrt{r_q^2 + r_p^2 - 2 \cdot r_q \cdot r_p \cdot \cos(\alpha_q - \alpha_p)}$$

b) Aplicando la fórmula anterior:

$$d(Q,\ P) = \sqrt{4^2 + 5^2 - 2 \cdot 4 \cdot 5 \cdot \cos\left(\frac{4\pi - \pi}{9}\right)} =$$

$$= \sqrt{16 + 25 - 40 \cdot \frac{1}{2}} = \sqrt{21}$$

2.



a) $\text{sen}\,(\alpha_B - \alpha_A) = \dfrac{h}{r_B} \Rightarrow h = r_B \cdot \text{sen}\,(\alpha_B - \alpha_A)$

b) $\text{Superficie} = \dfrac{r_A \cdot h}{2} = \dfrac{1}{2} \cdot r_A \cdot r_B \cdot \text{sen}\,(\alpha_B - \alpha_A)$

c) $\text{Superficie} = \dfrac{1}{2} \cdot 2 \cdot 3 \cdot \text{sen}\left(\dfrac{5\pi}{18} - \dfrac{\pi}{9}\right) =$

$= 3 \cdot \text{sen}\,\dfrac{\pi}{6} = \dfrac{3}{2}$ uc

3.

$$\cos^2 t + \text{sen}^2\, t = \left(\frac{x+3}{2}\right)^2 + \left(\frac{y-2}{3}\right)^2 = 1 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{(x+3)^2}{2^2} + \frac{(y-2)^2}{3^2} = 1$$

Elipse centrada en el punto $(-3,\ 2)$ y de ejes paralelos a los ejes de coordenadas.

La medida de los ejes es: $2a = 4$, $2b = 6$

4. Despejando $1 + t^3$ en las dos ecuaciones:

$$1 + t^3 = \frac{2t}{x} = \frac{2t^2}{y} \Rightarrow t = \frac{y}{x}$$

Sustituyendo en la primera ecuación:

$$x = \frac{2y}{x} : \left(1 + \frac{y^3}{x^3}\right) = \frac{2yx^2}{x^3 + y^3} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x^3 + y^3 - 2xy = 0$$

5. a) $t = \dfrac{x}{v_0 \cos\alpha} \Rightarrow$

$$\Rightarrow y = v_0\ \text{sen}\,\alpha \cdot \frac{x}{v_0 \cos\alpha} - \frac{1}{2}\, g \left(\frac{x}{v_0 \cos\alpha}\right)^2 =$$

$$\Rightarrow = \text{tg}\,\alpha \cdot x - \frac{g}{2v_0^2 \cos^2\alpha}\, x^2$$

b) $y = \text{tg}\,\alpha x - \dfrac{g}{2v_0^2 \cos^2\alpha}\, x^2$ es una parábola de eje paralelo al eje de ordenadas y abierta hacia abajo.

c) $\begin{cases} x = (500 \cos 30°)\, t = 250\sqrt{3}\, t \\ y = (500\ \text{sen}\ 30°)\, t - 4{,}9t^2 = 250t - 4{,}9t^2 \end{cases}$

$$\text{Para } y = 0: \begin{cases} \text{momento inicial } t = 0 \\ \text{momento final } t = \dfrac{250}{4{,}9} \approx 51 \text{ s} \end{cases}$$

$$x = 250\sqrt{3} \cdot 51 = 22\,083{,}6 \text{ m}$$

El alcance es de aproximadamente 22 083 metros, y la duración del movimiento es de aproximadamente 51 segundos.

6. Haciendo $x = r\cos\alpha$, $y = r\ \text{sen}\,\alpha$, se obtiene:

$$\frac{r^2 \cos^2\alpha}{4} - \frac{r^2\ \text{sen}^2\,\alpha}{4} = 1 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow r^2(\cos^2\alpha - \text{sen}^2\,\alpha) = 4 \Rightarrow r^2 \cos 2\alpha = 4$$

7. Haciendo $x = r\cos\alpha$, $y = r\ \text{sen}\,\alpha$, se obtiene:

$$\frac{r^2 \cos^2\alpha}{4} + \frac{r^2\ \text{sen}^2\,\alpha}{3} = 1 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 3r^2 \cos^2\alpha + 4r^2\ \text{sen}^2\,\alpha = 12$$

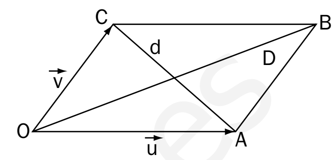
8. Haciendo $x = r\cos\alpha$, $y = r\ \text{sen}\,\alpha$, se obtiene:

$$r^2 \cos^2\alpha = 2r\ \text{sen}\,\alpha \Rightarrow r\cos^2\alpha - 2\ \text{sen}\,\alpha = 0$$

5 | Los vectores en el espacio

1. Consideramos tres vectores $\vec{u}$, $\vec{v}$ y $\vec{w}$ tales que $\vec{u} + 2\vec{v} - 3\vec{w} = 0$. Demuestra que si se toman representantes de esos tres vectores con un mismo origen entonces sus extremos están alineados.

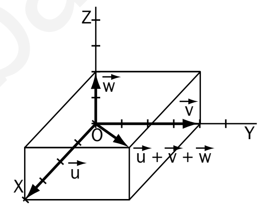
2. Dado el paralelogramo de la figura:



a) Escribe los vectores $\vec{D}$ y $\vec{d}$, correspondientes a sus diagonales, en función de los vectores $\vec{u}$ y $\vec{v}$, correspondientes a sus lados.

b) Con ayuda del cálculo vectorial, demuestra que la suma de los cuadrados de las medidas de las diagonales es igual al doble de la suma de los cuadrados de las medidas de dos de sus lados concurrentes.

3. Los módulos de tres vectores $\vec{u}$, $\vec{v}$ y $\vec{w}$ son 4, 4 y 2, respectivamente. Se sabe, además, que dichos vectores son perpendiculares dos a dos:

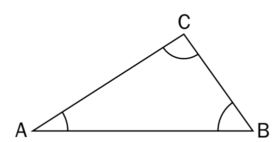


a) Determina el vector suma de $\vec{u}$, $\vec{v}$ y $\vec{w}$.

b) Determina el módulo del vector suma.

c) Calcula el valor de los ángulos que el vector suma forma con cada uno de los vectores considerados.

4. Consideramos el triángulo de vértices A, B y C:



a) Considerando los vectores $\vec{u} = \overrightarrow{AB}$, $\vec{v} = \overrightarrow{BC}$ y $\vec{w} = \overrightarrow{CA}$. Con ayuda del producto vectorial, escribe el área del triángulo ABC en función de los vectores $\vec{u}$ y $\vec{v}$, en función de los vectores $\vec{u}$ y $\vec{w}$ y en función de los vectores $\vec{v}$ y $\vec{w}$.

b) Con ayuda del apartado anterior, demuestra el teorema de los senos.

5. Se consideran los vectores $a = 2\vec{i} + x\vec{j} + 3\vec{k}$, $\vec{b} = \vec{i} + x\vec{j}$ y $\vec{c} = \vec{i} + 2\vec{j} + x\vec{k}$:

a) Calcula los posibles valores de x que hacen que el volumen del paralelepípedo determinado por los tres vectores sea igual a 10.

b) Estudia si existe algún valor de x que haga que los tres vectores sean coplanarios.

6. Se considera el vector de coordenadas $\vec{u} = (-1, 1, 1)$:

a) Halla, con ayuda de los parámetros necesarios, la expresión de todos los vectores ortogonales a $\vec{u}$.

b) Escribe el vector $\vec{a} = (-3, 0, 3)$ como suma de dos vectores, uno de los cuales sea paralelo a $\vec{u}$ y el otro ortogonal a $\vec{u}$.

7. Se consideran los vectores de coordenadas $\vec{u} = (-1, 1, 1)$ y $\vec{v} = (4, 2, x)$:

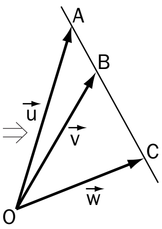
a) Calcula el valor de x que hace que los vectores $\vec{u}$ y $\vec{v}$ sean perpendiculares.

b) Para el valor de x calculado en el apartado anterior, expresa el vector $\vec{u} \times \vec{v} \times \vec{u}$ como producto de un número real por el vector $\vec{v}$.

SOLUCIONES

1. Se considera $\vec{u} = [\overrightarrow{OA}]$, $\vec{v} = [\overrightarrow{OB}]$ y $\vec{w} = [\overrightarrow{OC}]$. Hay que demostrar que A, B y C están alineados:

$$\left.\begin{array}{l} \vec{u} + \overrightarrow{AB} = \vec{v} \\ \vec{u} + \overrightarrow{AC} = \vec{w} \end{array}\right\}$$



Como $\vec{u} = -2\vec{v} + 3\vec{w} \Rightarrow$

$\Rightarrow\ -2(\vec{u} + \overrightarrow{AB}) + 3(\vec{u} + \overrightarrow{AC}) = \vec{u} \Rightarrow$

$\Rightarrow\ -2\overrightarrow{AB} + 3\overrightarrow{AC} = 0 \Rightarrow$

$\Rightarrow\ \overrightarrow{AB}$ y $\overrightarrow{AC}$ son proporcionales $\Rightarrow$

$\Rightarrow\ A$, B y C están alineados.

2. a) $\vec{u} = \overrightarrow{OA}$, $\vec{v} = \overrightarrow{OC}$, $\vec{D} = \overrightarrow{OB}$ y $\vec{d} = \overrightarrow{CA} \Rightarrow$

$\Rightarrow\ \vec{D} = \vec{u} + \vec{v};\ \vec{d} = \vec{u} - \vec{v}$

b) $\left\{\begin{array}{l} \vec{D} \cdot \vec{D} = |\vec{D}|^2 = (\vec{u} + \vec{v}) \cdot (\vec{u} + \vec{v}) = \\ \vec{d} \cdot \vec{d} = |\vec{d}|^2 = (\vec{u} - \vec{v}) \cdot (\vec{u} - \vec{v}) = \end{array}\right.$

$\left.\begin{array}{l} = |\vec{u}|^2 + |\vec{v}|^2 + 2\vec{u} \cdot \vec{v} \\ = |\vec{u}|^2 + |\vec{v}|^2 - 2\vec{u} \cdot \vec{v} \end{array}\right\} \Rightarrow$

$\Rightarrow\ |\vec{D}|^2 + |\vec{d}|^2 = 2(|\vec{u}|^2 + |\vec{v}|^2)$

3. a) Se pueden tomar como direcciones de los tres vectores dados las de los ejes coordenados.

Entonces: $\vec{u} = 4\vec{i}$, $\vec{v} = 4\vec{j}$, $\vec{w} = 2\vec{k}$, y el vector suma viene determinado por las coordenadas $\vec{s} = \vec{u} + \vec{v} + \vec{w} = (4, 4, 2)$

b) $|\vec{u} + \vec{v} + \vec{w}| = \sqrt{4^2 + 4^2 + 2^2} = \sqrt{36} = 6$

c) $\cos(\vec{s}, \vec{u}) = \dfrac{\vec{s} \cdot \vec{u}}{|\vec{s}| \cdot |\vec{u}|} = \dfrac{16}{6 \cdot 4} = \dfrac{2}{3} \Rightarrow$

$\Rightarrow\ \widehat{(\vec{s}, \vec{u})} = \arccos\dfrac{2}{3} \approx 48°\ 11'\ 23''$

$\cos(\vec{s}, \vec{v}) = \dfrac{\vec{s} \cdot \vec{v}}{|\vec{s}| \cdot |\vec{v}|} = \dfrac{16}{6 \cdot 4} = \dfrac{2}{3} \Rightarrow$

$\Rightarrow\ \widehat{(\vec{s}, \vec{v})} \approx 48°\ 11'\ 23''$

$\cos(\vec{s}, \vec{w}) = \dfrac{\vec{s} \cdot \vec{w}}{|\vec{s}| \cdot |\vec{w}|} = \dfrac{4}{6 \cdot 2} = \dfrac{1}{3} \Rightarrow$

$\Rightarrow\ \widehat{(\vec{s}, \vec{w})} \approx 70°\ 31'\ 44''$

4. a) $S = \dfrac{1}{2}|\vec{u} \times \vec{v}| = \dfrac{1}{2}|\vec{u} \times \vec{w}| = \dfrac{1}{2}|\vec{v} \times \vec{w}|$

b) $\dfrac{1}{2}|\vec{u} \times \vec{v}| = \dfrac{1}{2}|\vec{u} \times \vec{w}| \Rightarrow$

$\Rightarrow\ |\vec{u} \times \vec{v}| = |\vec{u} \times \vec{w}| \Rightarrow$

$\Rightarrow \left\{\begin{array}{l} |\vec{u} \times \vec{v}| = |\vec{u}| \cdot |\vec{v}| \cdot \text{sen}\,(180° - B) = \\ |\vec{u} \times \vec{w}| = |\vec{u}| \cdot |\vec{w}| \cdot \text{sen}\,(180° - A) = \end{array}\right.$

$\left.\begin{array}{l} = |\vec{u}| \cdot |\vec{v}| \cdot \text{sen}\,B \\ = |\vec{u}| \cdot |\vec{w}| \cdot \text{sen}\,A \end{array}\right\} \Rightarrow \dfrac{|\vec{v}|}{\text{sen}\,A} = \dfrac{|\vec{w}|}{\text{sen}\,B}$

De la misma manera: $\dfrac{|\vec{v}|}{\text{sen}\,A} = \dfrac{|\vec{u}|}{\text{sen}\,C}$

De estas dos igualdades se deduce:

$\dfrac{a}{\text{sen}\,A} = \dfrac{b}{\text{sen}\,B} = \dfrac{c}{\text{sen}\,C}$

5. a) $\begin{vmatrix} 2 & x & 3 \\ 1 & x & 0 \\ 1 & 2 & x \end{vmatrix} = 10 \Rightarrow 2x^2 + 6 - 3x - x^2 = 10 \Rightarrow$

$\Rightarrow\ x^2 - 3x - 4 = 0 \Rightarrow x = 4,\ x = -1.$

b) Para que los vectores sean coplanarios, su producto mixto debe ser nulo:

$\begin{vmatrix} 2 & x & 3 \\ 1 & x & 0 \\ 1 & 2 & x \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow 2x^2 + 6 - 3x - x^2 = 0 \Rightarrow$

$\Rightarrow\ x^2 - 3x + 6 = 0$

Esta ecuación no tiene soluciones reales.

6. a) $(a, b, c) \cdot (-1, 1, 1) = 0 \Rightarrow$

$\Rightarrow\ -a + b + c = 0 \Rightarrow \left\{\begin{array}{l} a = \lambda + \mu \\ b = \lambda \\ c = \mu \end{array}\right.$

Los vectores pedidos son de la forma $(\lambda + \mu, \lambda, \mu)$.

b) $(-3, 0, 3) = (-x, x, x) + (\lambda + \mu, \lambda, \mu) \Rightarrow$

$\Rightarrow \left\{\begin{array}{rcl} -x + \lambda + \mu & = & -3 \\ x + \lambda \quad\quad & = & 0 \\ x \quad\quad + \mu & = & 3 \end{array}\right. \Rightarrow$

$\Rightarrow\ -x - x + 3 - x = -3 \Rightarrow$

$\Rightarrow\ x = 2,\ \lambda = -2,\ \mu = 1 \Rightarrow$

$\Rightarrow\ (-3, 0, 3) = (-2, 2, 2) + (-1, -2, 1)$

7. a) $\vec{u} \cdot \vec{v} = 0 \Rightarrow (-1, 1, 1) \cdot (4, 2, x) = 0 \Rightarrow$

$\Rightarrow\ -4 + 2 + x = 0 \Rightarrow x = 2$

b) $\vec{u} \times \vec{v} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ -1 & 1 & 1 \\ 4 & 2 & 2 \end{vmatrix} = 6\vec{j} - 6\vec{k}$

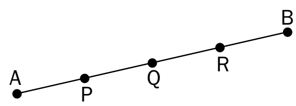
$\vec{u} \times \vec{v} \times \vec{u} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 0 & 6 & -6 \\ -1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 12\vec{i} + 6\vec{j} + 6\vec{k}$

Por tanto: $\vec{u} \times \vec{v} \times \vec{u} = 3\vec{v}$

6 Ecuaciones de rectas y planos

1. Un plano contiene el punto $P(2, 0, -2)$ y la recta r: $x - 1 = y = z$. Calcula el valor de m que hace que el vector $\vec{n}\ (m, -m - 2, 2)$ sea un vector normal a dicho plano.

2. Dado el segmento de extremos $A(-3, 4, 4)$ y $B(1, 12, 0)$, calcula las coordenadas de tres puntos P, Q y R tales que dividan al segmento en cuatro partes iguales.



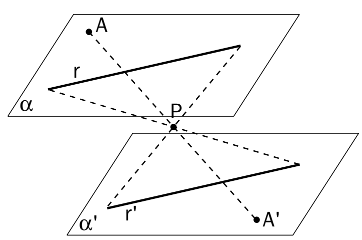
3. Dado el segmento de extremos $A(1, 2, -3)$ y $B(-4, 12, 2)$, calcula las coordenadas de un punto interior a dicho segmento de manera que las distancias que lo separan de los extremos A y B estén en la relación de 2 a 5.

4. Se considera el punto P de coordenadas $P(-2, 1, 0)$:

a) Calcula las coordenadas del punto simétrico de $A(2, 1, 3)$ respecto de P.

b) Escribe las ecuaciones de la recta simétrica de r: $\begin{cases} x = 1 + 2t \\ y = 0 \\ z = -2 - t \end{cases}$ respecto de P.

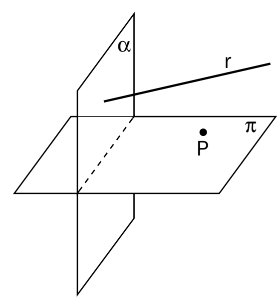
c) Escribe la ecuación del plano simétrico de α: $x - 11y + 2z + 3 = 0$ respecto de P.



5. Se considera el punto $P(-1, 3, 0)$, la recta r: $\dfrac{x - 1}{2} = y = z$ y el plano α: $x + y - z + 3 = 0$:

a) Calcula un vector de dirección de r y un vector normal a α.

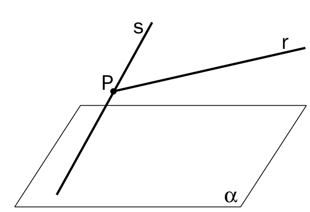
b) Halla la ecuación del plano π que contiene a P, es paralelo a r y perpendicular a α.



6. Halla unas ecuaciones paramétricas para el plano α: $x - y + 1 = 0$.

7. Determina la ecuación en forma continua de la recta que es paralela al plano α: $2x - y - z - 4 = 0$ y que corta perpendicularmente a la recta

s: $\begin{cases} x = 2 - t \\ y = t + 1 \\ z = -t \end{cases}$ en el punto $P(0, 3, -2)$.



8. Tres vértices de una de las caras de un paralelepípedo son los puntos $A(1, 2, -1)$, $B(0, 2, 1)$ y $C(3, 2, -5)$.

a) Calcula las coordenadas del cuarto vértice D de la cara considerada sabiendo que A y C son vértices opuestos.

b) Sabiendo que todas las diagonales de paralelepípedo se cortan en el punto $M(1, 4, 1)$, calcula las coordenadas de los otros cuatro vértices de la figura.

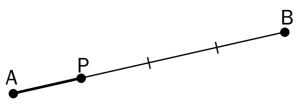
SOLUCIONES

1. Como se ve, el punto P no pertenece a la recta r. Por tanto, si se toman dos puntos de r, $A(0, -1, -1)$ y $B(1, 0, 0)$, se consideran los vectores $\overrightarrow{PA}$ y $\overrightarrow{PB}$ y se calcula su producto vectorial, se obtiene un vector normal al plano.

$$\overrightarrow{PA} \times \overrightarrow{PB} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ -2 & -1 & 1 \\ -1 & 0 & 2 \end{vmatrix} = 2\vec{i} + 3\vec{j} - \vec{k} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{m}{-2} = \frac{-m-2}{3} = \frac{2}{-1} \Rightarrow m = 4$$

2. $\overrightarrow{AP} = \dfrac{1}{4}\overrightarrow{AB} = \dfrac{1}{4}(4, 8, -4) = (1, 2, -1)$



$\vec{p} = \vec{a} + \overrightarrow{AP} = (-3, 4, 4) + (1, 2, -1) =$
$= (-2, 6, 3)$

$\vec{q} = \vec{a} + 2 \cdot \overrightarrow{AP} = (-3, 4, 4) + (2, 4, -2) =$
$= (-1, 8, 2)$

$\vec{r} = \vec{a} + 3 \cdot \overrightarrow{AP} = (-3, 4, 4) + (3, 6, -3) =$
$= (0, 10, 1)$

3. $\overrightarrow{AP} = \dfrac{2}{5}\overrightarrow{AB} = \dfrac{2}{5}(-5, 10, 5) = (-2, 4, 2)$

$\vec{p} = \vec{a} + \overrightarrow{AP} = (1, 2, -3) + (-2, 4, 2) =$
$= (-1, 6, -1)$

4. a) Sea $A'(x, y, z)$ el punto simétrico de A. P es el punto medio del segmento de extremos A y A'. Por tanto:

$$\frac{x+2}{2} = -2, \quad \frac{y+1}{2} = 1, \quad \frac{z+3}{2} = 0 \Rightarrow$$
$$\Rightarrow A'(-6, 1, -3)$$

b) Se toman dos puntos $A(1, 0, -2)$ y $B(-1, 0, -1)$ de la recta r y se calculan sus simétricos A' y B'. La recta buscada pasa por A' y B'.

$A'(-5, 2, 2)$, $B'(-3, 2, 1)$, ya que P es el punto medio de los segmentos AA' y BB'.

$$r': \begin{cases} x = -5 + 2t \\ y = 2 \\ z = 2 - t \end{cases}$$

c) Se toman tres puntos A, B y C del plano y se calculan sus simétricos A', B' y C'. El plano que pasa por A', B' y C' es el plano buscado.

$A(1, 0, -2)$, $B(-1, 0, -1)$ y $C(2, 1, 3)$,

$A'(-5, 2, 2)$, $B'(-3, 2, 1)$ y $C'(-6, 1, -3)$, ya que P es el punto medio de los segmentos AA', BB' y CC'.

$$\alpha: \begin{vmatrix} x+5 & y-2 & z-2 \\ 2 & 0 & -1 \\ -1 & -1 & -5 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow$$
$$\Rightarrow x - 11y + 2z + 23 = 0$$

5. a) Vector director de r: $\vec{u}(2, 1, 1)$

Vector normal a α: $\vec{v}(1, 1, -1)$

b) $$\pi(P, \vec{u}, \vec{v}) \Rightarrow \begin{vmatrix} x+1 & y-3 & z \\ 2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow$$
$$\Rightarrow \pi: 2x - 3y - z + 11 = 0$$

6. Los puntos $A(1, 2, -1)$, $B(0, 1, 1)$ y $C(-1, 0, 2)$ son puntos del plano.

Por tanto: $\alpha(A, \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}) \Rightarrow$

$$\Rightarrow \alpha: \begin{cases} x = 1 - t - 2s \\ y = 2 - t - 2s \\ z = -1 + 2t + 3s \end{cases}$$

7. Los vectores de dirección de r deberán ser perpendiculares al vector $\vec{v}(-1, 1, -1)$, vector de dirección de s, y al vector $\vec{w}(2, -1, -1)$, vector normal de α. Por tanto, un vector de dirección de r es:

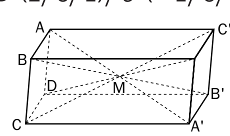
$$\vec{u} = \vec{v} \times \vec{w} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ -1 & 1 & -1 \\ 2 & -1 & -1 \end{vmatrix} = (-2, -3, -1)$$

$\vec{u}$ es paralelo al vector $(2, 3, 1) \Rightarrow$

$$\Rightarrow r: \frac{x}{2} = \frac{y-3}{3} = \frac{z+2}{1}$$

8. a) El punto $N(2, 2, -3)$, punto medio del segmento AC, deberá ser también punto medio del segmento BD. Por tanto, las coordenadas del vértice D son $D(4, 2, -7)$.

b) M es el punto medio de las diagonales AA', BB', CC' y DD'. Por tanto:
$A'(2, 6, 3)$, $B'(2, 6, 1)$, $C'(-1, 6, 7)$ y $D'(-2, 6, 9)$



7 Posiciones de rectas y planos

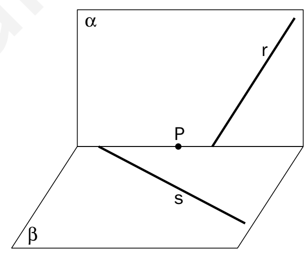
1. Estudia la posición relativa de los planos α, β y γ según los diferentes valores del parámetro a:

$$\begin{cases} \alpha: & (a-1)x + z = 0 \\ \beta: & ax + y + (a-1)z = a \\ \gamma: & x + y = 1 \end{cases}$$

2. Estudia la posición relativa de la recta r y del plano α según los diferentes valores del parámetro a:

$$r: \begin{cases} ax + 3y = 1 \\ x - 2y - az = -1 \end{cases} \qquad \alpha: \ 3x - ay - 2z = -1$$

3. Dadas las rectas $r: \dfrac{x}{-1} = \dfrac{y+1}{3} = \dfrac{z-1}{-1}$ y $s: \begin{cases} x = 4 + 5t \\ y = -3 + 4t \\ z = t \end{cases}$:



a) Demuestra que r y s se cruzan.

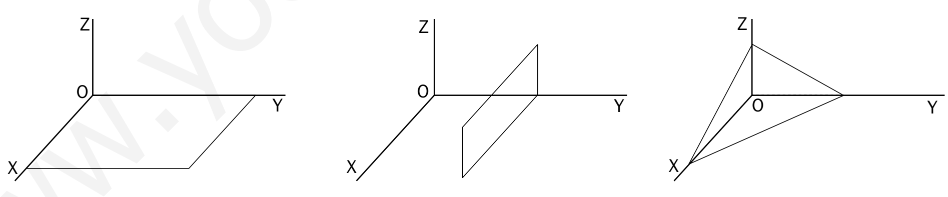
b) Halla la ecuación del plano α que contiene a r y a $P(0, 0, 0)$.

c) Determina la ecuación del plano β que contiene a s y a $P(0, 0, 0)$.

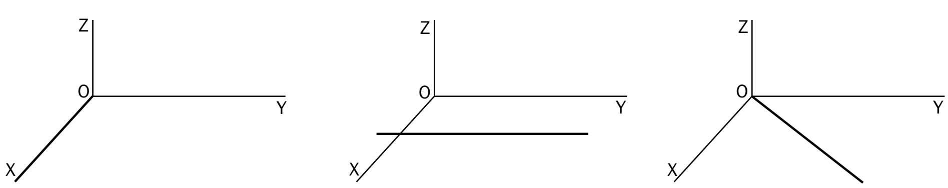
d) Halla la ecuación de la recta que pasa por P y se apoya en r y en s.

4. Determina la ecuación del plano que contiene a la recta $r: \dfrac{2x}{-1} = \dfrac{y-2}{1} = \dfrac{z}{3}$ y es paralelo a la recta $s: \dfrac{x-2}{1} = \dfrac{3-y}{2} = \dfrac{1-2z}{2}$

5. Escribe las ecuaciones de cada uno de los siguientes planos e indica su posición relativa con respecto al sistema de referencia:



6. Escribe las ecuaciones de cada una de las siguientes rectas e indica su posición relativa con respecto al sistema de referencia:



7. a) Escribe todos los planos que pasan por los puntos $A(-1, 2, 1)$ y $B(0, -1, 3)$.

b) De todos los planos hallados en el apartado a, calcula cuál de ellos pasa por el punto $P(5, -6, 5)$.

c) De todos los planos hallados en el apartado a, calcula el que es paralelo a la recta $r: \begin{cases} 5x + 3y = 0 \\ 3x + z = -3 \end{cases}$

SOLUCIONES

1. $M = \begin{pmatrix} a-1 & 0 & 1 \\ a & 1 & a-1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$

$M^* = \begin{pmatrix} a-1 & 0 & 1 & 0 \\ a & 1 & a-1 & a \\ 1 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

$|M| = (a-2)(1-a) = 0 \iff a = 2$ o $a = 1$

- $a \neq 2$ y $a \neq 1 \Rightarrow$ rango $(M) = 3$, rango $(M^*) = 3$

  Los tres planos se cortan en un punto.
- $a = 1 \Rightarrow$ rango $(M) = 2$, rango $(M^*) = 2$

  Dos planos coincidentes y otro que los corta.
- $a = 2 \Rightarrow$ rango $(M) = 2$, rango $(M^*) = 3$

  Planos en posición de superficie prismática.

2. $M = \begin{pmatrix} a & 3 & 0 \\ 1 & -2 & -a \\ 3 & -a & -2 \end{pmatrix}$

$M^* = \begin{pmatrix} a & 3 & 0 & 1 \\ 1 & -2 & -a & -1 \\ 3 & -a & -2 & -1 \end{pmatrix}$

$|M| = (1-a)(a^2+a+6) = 0 \iff a = 1$

- $a \neq 1 \Rightarrow$ rango $(M) =$ rango $(M^*) = 3 \Rightarrow$ La recta corta al plano.
- $a = 1 \Rightarrow$ rango $(M) =$ rango $(M^*) = 2 \Rightarrow$ La recta está contenida en el plano.

3. a) $\vec{u}_r = (-1, 3, -1)$, $\vec{u}_s = (5, 4, 1)$, $A_r(0, -1, 1)$ $A_s(4, -3, 0)$, $\overrightarrow{A_rA_s} = (4, -2, -1)$

Como rango $(\vec{u}_r, \vec{u}_s) = 2$ y rango $(\overrightarrow{A_rA_s}, \vec{u}_r, \vec{u}_s) = 3 \Rightarrow$
$\Rightarrow$ Las rectas r y s se cruzan.

b) $\alpha(P, \overrightarrow{PA_r}, \vec{u}_r) \Rightarrow \begin{vmatrix} x & y & z \\ 0 & -1 & 1 \\ -1 & 3 & -1 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow$

$\Rightarrow \alpha: 2x + y + z = 0$

c) $\beta(P, \overrightarrow{PA_s}, \vec{u}_s) \Rightarrow \begin{vmatrix} x & y & z \\ 4 & -3 & 0 \\ 5 & 4 & 1 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow$

$\Rightarrow \beta: 3x + 4y - 31z = 0$

d) $t: \begin{cases} \alpha: 2x + y + z = 0 \\ \beta: 3x + 4y - 31z = 0 \end{cases}$

4. $r: \dfrac{x}{-\frac{1}{2}} = \dfrac{y-2}{1} = \dfrac{z}{3}$

$s: \dfrac{x-2}{1} = \dfrac{y-3}{-2} = \dfrac{z-\frac{1}{2}}{-1} \Rightarrow$

$\Rightarrow \alpha[A(0, 2, 0), \vec{u}(-1, 2, 6), \vec{v}(1, -2, -1)] \Rightarrow$

$\Rightarrow \begin{vmatrix} x & y-2 & z \\ -1 & 2 & 6 \\ 1 & -2 & 1 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow$

$\Rightarrow \alpha: 2x + y - 2 = 0$

5. El primer plano es el plano coordenado XOY. Su ecuación es $z = 0$.

El segundo plano es paralelo al plano coordenado XOZ. Su ecuación es $y = a$.

El tercer plano corta a los ejes según los segmentos de longitud a, b y c.

Su ecuación es: $\dfrac{x}{a} + \dfrac{y}{b} + \dfrac{z}{c} = 1$.

6. La primera recta es el eje OX.

Sus ecuaciones son: $\begin{cases} y = 0 \\ z = 0 \end{cases}$

La segunda recta es paralela al eje OY.

Sus ecuaciones son: $\begin{cases} x = a \\ z = 0 \end{cases}$

La tercera recta está contenida en el plano coordenado XOY y pasa por el origen de coordenadas.

Sus ecuaciones son: $\begin{cases} x = at \\ y = bt \\ z = 0 \end{cases}$

7. a) La recta que pasa por A y B tiene por ecuaciones:

$\dfrac{x+1}{1} = \dfrac{y-2}{-3} = \dfrac{z-1}{2} \Rightarrow$

$\Rightarrow \begin{cases} 3x + y + 1 = 0 \\ 2y + 3z - 7 = 0 \end{cases}$

El haz de planos cuya arista es la recta AB es:
$t \cdot (3x + y + 1) + s \cdot (2y + 3z - 7) = 0$

b) $t \cdot (15 - 6 + 1) + s \cdot (-12 + 15 - 7) = 9$

$\Rightarrow s = \dfrac{5}{2}t \Rightarrow 3x + y + 1 + \dfrac{5}{2}(2y + 3z - 7) = 0$

$\Rightarrow 2x + 4y + 5z - 11 = 0.$

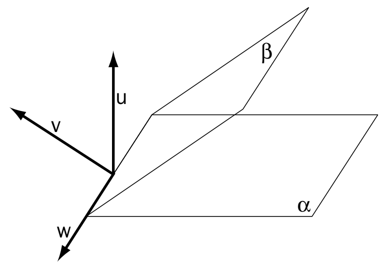
c) $(0, 0, -3)$ y $(-3, 5, 6)$ son puntos de r. Por tanto, $\vec{u}_r = (3, -5, -9)$ es un vector director de r. Se debe cumplir que el vector normal del plano y el de dirección de r sean perpendiculares:

$(3t, t + 2s, 3s) \cdot (3, -5, -9) = 0 \Rightarrow$

$\Rightarrow t = \dfrac{37}{4}s \Rightarrow \dfrac{37}{4}s \cdot (3x + y + 1) +$
$+ s \cdot (2y + 3z - 7) = 0 \Rightarrow$
$\Rightarrow 37x + 15y + 4z + 3 = 0$

8 Propiedades métricas

1. Dados los planos no paralelos α: $Ax + By + Cz + D = 0$ y β: $A'x + B'y + C'z + D' = 0$, calcula las coordenadas de un vector de dirección de la recta r determinada por la intersección de dichos planos.

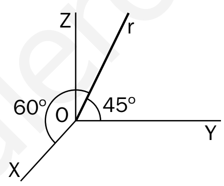


2. a) Demuestra que la distancia que separa a los planos paralelos α: $Ax + By + Cz + D = 0$ y β: $Ax + By + Cz + D' = 0$ se puede calcular mediante la fórmula: $d(\alpha, \beta) = \dfrac{|D - D'|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}$

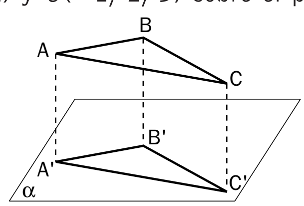
b) Aplica la fórmula anterior para calcular la distancia entre los planos paralelos α: $2x - y + z - 3 = 0$ y β: $4x - 2y + 2z - 3 = 0$.

3. a) Escribe las ecuaciones de la recta r de la figura sabiendo que pasa por el origen de coordenadas y que forma con los ejes coordenados OX y OY ángulos de 60° y 45°, respectivamente. ¿Existe una sola recta que verifique estas condiciones?

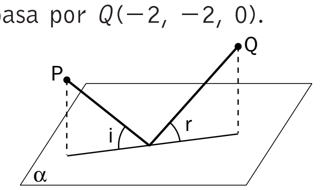
b) Calcula el ángulo que forma dicha recta con el eje OZ.



4. Calcula las coordenadas de los vértices del triángulo $A'B'C'$ que se obtiene al proyectar ortogonalmente el triángulo de vértices $A(1, 2, 1)$, $B(-1, 2, -2)$ y $C(-1, 2, 3)$ sobre el plano α: $2x + y - z - 4 = 0$. Calcula las áreas de ambos triángulos.



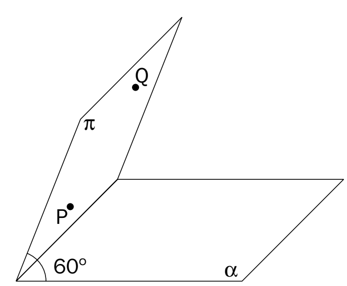
5. Un rayo parte del punto $P(1, 0, -2)$ y se refleja en el plano α: $x + y = 2$. Calcula el punto donde el rayo toca al plano sabiendo que el rayo reflejado pasa por $Q(-2, -2, 0)$.



6. a) Escribe la ecuación del plano α que pasa por el punto $A(1, 5, 4)$ y contiene a la recta de ecuaciones:

$$r: \begin{cases} y + z = 9 \\ z = 0 \end{cases}$$

b) Escribe la ecuación de un plano π que pase por los puntos $P(1, 0, 1)$ y $Q(1, 1, 0)$ y forme con el plano α un ángulo de 60°.



SOLUCIONES

1. El vector director de la recta determinada por α y β se puede calcular mediante el producto vectorial de los vectores normales de los dos planos:

$$\vec{u}_r = \vec{n}_\alpha \times \vec{n}_\beta = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ A & B & C \\ A' & B' & C' \end{vmatrix}$$

2. a) Sea $P(a, b, c) \in \alpha$ y $Q(q, r, s) \in \beta$:

$$d(\alpha, \beta) = d(P, \beta) = \frac{|\overrightarrow{QP} \cdot \vec{n}_\beta|}{|\vec{n}_\beta|} =$$

$$= \frac{|A(q-a) + B(r-b) + C(s-c)|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}} =$$

$$= \frac{|Aq + Br + Cs - (Aa + Bb + Cc)|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}} =$$

$$= \frac{|D - D'|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}$$

b) Los planos son α: $2x - y + z - 3 = 0$

y β: $2x - y + z - \frac{3}{2} = 0 \Rightarrow$

$$\Rightarrow d(\alpha, \beta) = \frac{\left|-3 + \frac{3}{2}\right|}{\sqrt{4 + 1 + 1}} = \frac{3}{2\sqrt{6}} = \frac{\sqrt{6}}{4}$$

3. a) La recta buscada es: r: $\frac{x}{1} = \frac{y}{a} = \frac{z}{b}$. Para que cumpla las condiciones indicadas:

$$\begin{cases} \cos 60° = \dfrac{1}{2} = \dfrac{|(1, a, b) \cdot (1, 0, 0)|}{|(1, a, b)| \cdot |(1, 0, 0)|} = \\[2ex] \cos 45° = \dfrac{\sqrt{2}}{2} = \dfrac{|(1, a, b) \cdot (0, 1, 0)|}{|(1, a, b)| \cdot |(0, 1, 0)|} = \end{cases}$$

$$\begin{cases} = \dfrac{1}{\sqrt{1 + a^2 + b^2}} \\[2ex] = \dfrac{a}{\sqrt{1 + a^2 + b^2}} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a^2 + b^2 = 3 \\ a^2 - b^2 = 1 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow a = \pm\sqrt{2},\ b = \pm 1$$

Una de las cuatro soluciones es la recta:

$$r: \frac{x}{1} = \frac{y}{\sqrt{2}} = \frac{z}{1}$$

b) $(\widehat{r, OZ}) = \arccos \dfrac{|(1, \sqrt{2}, 1) \cdot (0, 0, 1)|}{|(1, \sqrt{2}, 1)| \cdot |(0, 0, 1)|} =$

$$= \arccos \frac{1}{2} = 60°$$

4.

$$AA': \begin{cases} x = 1 + 2t \\ y = 2 + t \\ z = 1 - t \end{cases} \Rightarrow A' = \left(\frac{8}{6}, \frac{13}{6}, \frac{5}{6}\right)$$

$$BB': \begin{cases} x = -1 + 2t \\ y = 2 + t \\ z = -2 - t \end{cases} \Rightarrow B' = \left(-\frac{1}{3}, \frac{7}{3}, -\frac{7}{3}\right)$$

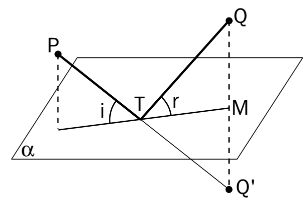
$$CC': \begin{cases} x = -1 + 2t \\ y = 2 + t \\ z = 3 - t \end{cases} \Rightarrow C' = \left(\frac{8}{6}, \frac{19}{6}, \frac{11}{6}\right)$$

$$S(A, B, C) = \frac{1}{2}|\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC}| = \frac{1}{2}|(0, 10, 0)| = 5$$

$$S(A', B', C') = \frac{1}{2}|\overrightarrow{A'B'} \times \overrightarrow{A'C'}| =$$

$$= \frac{1}{2}\left|\left(\frac{20}{6}, \frac{10}{6}, -\frac{10}{6}\right)\right| = \frac{5\sqrt{6}}{6}$$

5. Sea Q' el simétrico de Q respecto del plano α. La recta que pasa por P y Q' corta al plano α en el punto T buscado:



$$QQ': \begin{cases} x = -1 + t \\ y = -2 + t \\ z = 0 \end{cases} \Rightarrow$$

$$M = \left(\frac{3}{2}, \frac{1}{2}, 0\right)$$

M es el punto medio de $QQ' \Rightarrow Q' = (4, 3, 0)$

$$PQ': \begin{cases} x = 1 + 3t \\ y = 3t \\ z = -2 + 2t \end{cases} \Rightarrow T = \left(\frac{3}{2}, \frac{1}{2}, -\frac{5}{3}\right)$$

6. a) Haz de planos cuya arista es la recta r:
$t \cdot (y + z - 9) + s \cdot z = 0$

Como el plano debe pasar por el punto $A \Rightarrow$
$\Rightarrow 0 \cdot t + 4s = 0 \Rightarrow s = 0 \Rightarrow$
$\Rightarrow \alpha$: $y + z - 9 = 0$

b) Recta que pasa por P y por Q:

$$\frac{x - 1}{0} = \frac{y}{1} = \frac{z - 1}{-1} \Rightarrow \begin{cases} x = 1 \\ y + z = 1 \end{cases}$$

Haz de planos cuya arista es la recta PQ:

$t \cdot (x - 1) + s \cdot (y + z - 1) = 0 \Rightarrow$
$\Rightarrow tx + sy + sz - t - s = 0$

$$\cos(\vec{n}_\pi, \vec{n}_\alpha) = \frac{1}{2} \Rightarrow \frac{1}{2} = \frac{|2s|}{\sqrt{2} \cdot \sqrt{t^2 + 2s^2}}$$

Ya que solo se pide una solución se toma por ejemplo: $2t^2 + 4s^2 = 16s^2 \Rightarrow t = \sqrt{6} \cdot s$ y entonces: π: $\sqrt{6}x + y + z - 1 - \sqrt{6} = 0$

9 Curvas y superficies

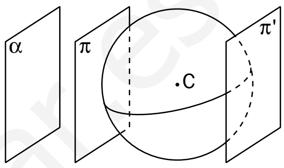
1. Dados los puntos $A(1, 2, 1)$, $B(1, -2, 1)$, $C(3, 0, 1)$ y $D(1, 0, 3)$:

a) Demuestra que no son coplanarios.

b) Escribe la ecuación de la esfera que pasa por los cuatro puntos.

c) Indica las coordenadas del centro y la medida del radio de la esfera anterior.

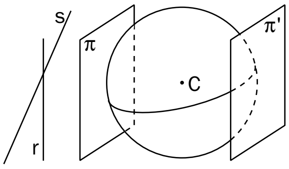
2. Dada la esfera de ecuación $x^2 + y^2 + z^2 - 2x + 4y - 4 = 0$ y el plano α: $x + 2y - 2z + 18 = 0$:



a) Determina el haz de planos paralelos a α.

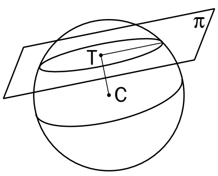
b) Escribe las ecuaciones de los planos tangentes a la esfera y que son paralelos a α.

3. Dadas las rectas r: $\begin{cases} y + z = 7 \\ x = 0 \end{cases}$ y s: $\begin{cases} x = 2t \\ y = 0 \\ z = 7 - t \end{cases}$ y la esfera $x^2 + y^2 + z^2 - 2x - 6y + 2z + 2 = 0$, halla las ecuaciones de los planos tangentes a la esfera y que sean paralelos a las rectas r y s.



4. Escribe la ecuación de la superficie formada por todos los puntos pertenecientes a las rectas que se apoyan en el eje OZ y en la recta de ecuaciones r: $\begin{cases} x = 4 + t \\ y = 12 + 3t \\ z = t \end{cases}$ y cuya dirección es perpendicular al vector $\vec{u} = (0, 0, 1)$.

5. La circunferencia de la figura está determinada por la intersección de la esfera de ecuación $x^2 + y^2 + z^2 - 4z - 6 = 0$ con el plano de ecuación π: $2x - y - 2z + 13 = 0$.



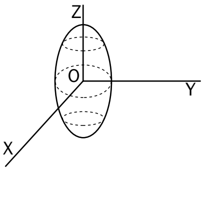
a) Calcula el centro C y el radio R de la esfera.

b) Determina las ecuaciones paramétricas de la recta que pasa por C y por el centro T de la circunferencia.

c) Calcula las coordenadas de T.

d) Calcula la medida del radio r de la circunferencia.

6. Consideramos la curva C: $\begin{cases} 4y^2 + z^2 = 4 \\ x = 0 \end{cases}$



a) Di qué tipo de curva es e indica sus elementos más importantes.

b) Escribe unas ecuaciones paramétricas de dicha curva.

c) Escribe la ecuación implícita de la superficie que se genera al girar la curva alrededor del eje OZ.

SOLUCIONES

1. a) $\overrightarrow{AB} = (0, -4, 0)$, $\overrightarrow{AC} = (2, -2, 0)$, $\overrightarrow{AD} = (0, -2, 2) \Rightarrow$ rango $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AD}) = 3 \Rightarrow$
$\Rightarrow$ A, B, C y D no son coplanarios.

b) Sea $x^2 + y^2 + z^2 + Ex + Fy + Gz + H = 0$
Los puntos han de verificar la ecuación:

$$\begin{cases} E + 2F + G + H = -6 \\ E - 2F + G + H = -6 \\ 3E + G + H = -10 \\ E + 3G + H = -10 \end{cases} \Rightarrow$$

$\Rightarrow E = -2,\ F = 0,\ G = -2,\ H = -2 \Rightarrow$
$\Rightarrow x^2 + y^2 + z^2 - 2x - 2z - 2 = 0$

c) Centro de la esfera:

$$C\left(-\frac{-2}{2}, -\frac{0}{2}, -\frac{-2}{2}\right) \Rightarrow C(1, 0, 1)$$

Radio de la esfera:

$$R = \sqrt{1^2 + 0^2 + 1^2 - (-2)} = 2$$

2. a) Haz de planos paralelos a α:
$x + 2y - 2z + D = 0$

b) Los planos buscados deben pertenecer al haz anterior y además deben verificar que la distancia del centro de la esfera a ellos coincida con la medida del radio.

La esfera es: $(x - 1)^2 + (y + 2)^2 + z^2 = 9$

Centro: $C(1, -2, 0)$

Radio: $r = \sqrt{1 + 4 + 4} = 3$

$$d(C, \text{plano}) = \frac{|1 - 4 + D|}{\sqrt{1 + 4 + 4}} = 3 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} D = 12 \Rightarrow \pi: x + 2y - 2z + 12 = 0 \\ D = -6 \Rightarrow \pi': x + 2y - 2z - 6 = 0 \end{cases}$$

3. El vector $\vec{n}$ normal de los planos buscados debe ser perpendicular a los vectores $\vec{u}_r = (0, 1, -1)$ y $\vec{u}_s = (2, 0, -1)$ de dirección de las rectas r y s; por tanto, $\vec{n} = \vec{u}_r \times \vec{u}_s = (-1, -2, -2)$. Los planos tienen por ecuación $x + 2y + 2z + D = 0$.

Centro de la esfera: $C(1, 3, -1)$

Radio: $r = \sqrt{1 + 9 + 1 - 2} = 3$

$$d(C, \text{plano}) = \frac{|1 + 6 - 2 + D|}{\sqrt{1 + 4 + 4}} = 3 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} D = 4 \Rightarrow \pi: x + 2y + 2z + 4 = 0 \\ D = -14 \Rightarrow \pi': x + 2y + 2z - 14 = 0 \end{cases}$$

4. Se toma un punto genérico A del eje OZ y otro B de la recta r: $A(0, 0, s)$, $B(4 + t, 12 + 3t, t)$.

Para que el vector $\overrightarrow{AB}$ sea perpendicular al vector $\vec{u} = (0, 0, 1)$: $(t - s) \cdot 1 = 0 \Rightarrow t = s$.

La superficie está formada por las rectas que pasan por $A(0, 0, t)$, $B(4 + t, 12 + 3t, t)$:

$$S: \begin{cases} x = s(4 + t) \\ y = s(12 + 3t) \\ z = t \end{cases}$$

Eliminando los parámetros:

$$s = \frac{x}{4 + t} = \frac{y}{12 + 3t} \qquad t = z \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{x}{4 + z} = \frac{y}{12 + 3z} \Rightarrow$$

$\Rightarrow 12x - 4y + 3zx - zy = 0$

5. a) Centro: $C\left(-\frac{0}{2}, -\frac{0}{2}, -\frac{-4}{2}\right) \Rightarrow C(0, 0, 2)$

Radio: $R = \sqrt{0^2 + 0^2 + 2^2 - (-6)} = \sqrt{10}$

b) El vector normal al plano tiene la misma dirección que la recta buscada. Entonces:

CT: $(x = 2t, y = -t, z = 2 - 2t)$

c) T es la intersección de CT con π.

$2(2t) - (-t) - 2(2 - 2t) + 13 = 0 \Rightarrow$
$\Rightarrow t = -1 \Rightarrow T(-2, 1, 4)$

d) Sea r el radio de la circunferencia:

$(d(C, T))^2 + r^2 = R^2 \Rightarrow$

$$\Rightarrow r = \sqrt{10 - (\sqrt{(-2)^2 + 1^2 + 2^2})^2} = \sqrt{10 - 9} = 1$$

6.

a) $$C: \begin{cases} y^2 + \dfrac{z^2}{2^2} = 1 \\ x = 0 \end{cases}$$

La curva es una elipse contenida en el plano YOZ y de semiejes 1 y 2.

b) $$C: \begin{cases} x = 0 \\ y = \cos t \\ z = 2 \operatorname{sen} t \end{cases}$$

c) $$\begin{cases} x = -\cos t \operatorname{sen} s \\ y = \cos t \cos s \\ z = 2 \operatorname{sen} t \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \operatorname{sen}^2 s + \cos^2 s = \frac{x^2 + y^2}{\cos^2 t} = \frac{x^2 + y^2}{1 - \dfrac{z^2}{4}} = 1 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x^2 + y^2 + \frac{z^2}{4} = 1$$

10 Sucesiones y límites

1. Se considera la siguiente sucesión definida por recurrencia: $a_1 = -2 \quad a_{n+1} = a_n + 2$.

a) Calcula sus cuatro primeros términos.

b) Demuestra que se trata de una progresión aritmética y halla su término general.

c) Demuestra que es monótona creciente.

d) Demuestra que no está acotada.

2. Se considera la siguiente sucesión definida por recurrencia: $a_1 = 3 \quad a_{n+1} = 2 \cdot a_n$.

a) Calcula sus cuatro primeros términos.

b) Demuestra que se trata de una progresión geométrica y halla su término general.

c) Demuestra que es monótona creciente.

d) Demuestra que no está acotada.

3. Dada la sucesión definida por recurrencia $a_1 = 1 \quad a_n = \dfrac{1}{1 + a_{n-1}}$

a) Calcula sus primeros términos.

b) Sabiendo que es convergente, calcula su límite.

4. Dada la sucesión definida por recurrencia $a_1 = \sqrt{2} \; a_n = \sqrt{2 \cdot a_{n-1}}$

a) Calcula sus primeros términos.

b) Sabiendo que es convergente, calcula su límite.

5. Se depositan durante 5 años 10 000 euros en una entidad bancaria que ofrece un interés compuesto del 6 % anual. Escribe los primeros términos de la sucesión de los intereses que se abonan al final de cada período si dichos períodos son de:

a) un año;

b) un mes;

c) un día.

Se supone que los intereses de cada período se suman al capital depositado en cada momento.

Halla el total de intereses recibidos en cada caso.

6. Se forma un cubo de lado n con cubos de lado 1 y se pintan las caras del cubo grande. Finalmente, se cuentan los cubos pequeños que tienen tres caras pintadas, los que tienen dos y los que tienen una.

a) Forma la sucesión del número de cubos con tres caras pintadas según que el lado del cubo grande sea 2, 3, 4, etc. Escribe el término general.

b) Forma la sucesión del número de cubos con dos caras pintadas según que el lado del cubo grande sea 2, 3, 4, etc... Escribe el término general.

c) Forma la sucesión del número de cubos con una cara pintada según que el lado del cubo grande sea 2, 3, 4, etc... Escribe el término general.

7. En un cierto país, se supone que la población crece anualmente en un 2 %.

a) Escribe la sucesión del número de habitantes según el número de años transcurridos desde el 2002 sabiendo que en este año eran 3 500 000 habitantes.

b) Calcula en qué año se doblará la población inicial.

c) Indica si la sucesión es monótona y si es acotada.

8. Calcula los siguientes límites:

a) $\lim \dfrac{1 + 2 + 3 + ... + n}{2n^2}$

b) $\lim \dfrac{2 + 4 + 6 + 8 + ... + 2n}{n^2 + 1}$

SOLUCIONES

1. a) $a_1 = -2 \quad a_2 = 0 \quad a_3 = 2 \quad a_4 = 4$

b) Es una progresión aritmética, ya que la diferencia entre dos términos consecutivos es siempre constante.

$a_n = a_1 + (n-1) \cdot d = -2 + (n-1) \cdot 2 =$
$= 2n - 4 \Rightarrow a_n = 2n - 4$

c) $a_{n+1} - a_n = 2 > 0 \Rightarrow a_{n+1} > a_n \Rightarrow$ Es estrictamente creciente.

d) No está acotada superiormente, ya que $\lim (2n - 4) = +\infty$.

2. a) $a_1 = 3 \quad a_2 = 6 \quad a_3 = 12 \quad a_4 = 24$

b) Es una progresión geométrica ya que el cociente entre dos términos consecutivos es siempre constante.

$a_n = a_1 \cdot r^{n-1} = 3 \cdot 2^{n-1} \Rightarrow a_n = 3 \cdot 2^{n-1}$

c) $a_{n+1} - a_n = 3 \cdot 2^n - 3 \cdot 2^{n-1} =$
$= 3 \cdot (2 \cdot 2^{n-1} - 2^{n-1}) = 3 \cdot 2^{n-1} > 0 \Rightarrow$
$\Rightarrow a_{n+1} > a_n \Rightarrow$ Es estrictamente creciente.

d) No esta acotada superiormente ya que $\lim (3 \cdot 2^{n-1}) = +\infty$

3. a) $a_1 = 1 \qquad a_2 = \dfrac{1}{1+1} = \dfrac{1}{2}$

$a_3 = \dfrac{1}{1 + \frac{1}{2}} = \dfrac{2}{3} \qquad a_4 = \dfrac{1}{1 + \frac{2}{3}} = \dfrac{3}{5}$

b) Como se sabe que la sucesión es convergente: $\lim a_n = \lim a_{n-1} = L$. Por tanto:

$L = \dfrac{1}{1 + L} \Rightarrow L^2 + L - 1 = 0 \Rightarrow$

$\Rightarrow L = \dfrac{-1 + \sqrt{5}}{2}$

(La solución $L = \dfrac{-1 - \sqrt{5}}{2}$ no tiene sentido, ya que una sucesión de términos positivos debe converger siempre a un número nulo o positivo.)

4. a) $a_1 = \sqrt{2}$

$a_2 = \sqrt{2\sqrt{2}} = \sqrt{\sqrt{8}} = \sqrt[4]{8}$

$a_3 = \sqrt{2\sqrt[4]{8}} = \sqrt[8]{128}$

$a_4 = \sqrt{2\sqrt[8]{128}} = \sqrt[16]{32\,768}$

b) Como se sabe que la sucesión es convergente: $\lim a_n = \lim a_{n-1} = L$.
Por tanto:

$L = \sqrt{2L} \Rightarrow L^2 = 2L \Rightarrow L^2 - 2L = 0 \Rightarrow$
$\Rightarrow L \cdot (L - 2) = 0 \Rightarrow L = 2$

(La solución $L = 0$ no tiene sentido, ya que todos los términos son mayores que 1.)

5. Un capital C durante t años a un r % produce:

- $C_F = C \cdot \left(1 + \dfrac{r}{100}\right)^t$ cada año.
- $C_F = C \cdot \left(1 + \dfrac{r}{1\,200}\right)^{12t}$ cada mes.
- $C_F = C \cdot \left(1 + \dfrac{r}{36\,500}\right)^{365t}$ cada día.

Por tanto:

a) Intereses recibidos cada año:
1.º: 600, 2.º: 636, 3.º: 674,16 y 4.º: 714,61
Total de intereses:
$C_F - C = 10\,000 \cdot 1{,}06^5 - 10\,000 = 3\,382{,}26$

b) Intereses recibidos cada mes:
1.º: 50, 2.º: 50,25, 3.º: 50,50 y 4.º: 50,75
Total de intereses:
$C_F - C = 10\,000 \cdot 1{,}005^{60} - 10\,000 = 3\,488{,}5$

c) Intereses recibidos cada día:
1.º: 1,64, 2.º: 1,64, 3.º: 1,64, 4.º: 1,64 y 5.º: 1,65
Total de intereses:
$C_F - C = 10\,000 \cdot \left(1 + \dfrac{6}{36\,500}\right)^{1\,825} - 10\,000 =$
$= 3\,498{,}26$

6. Siendo n la medida del lado del cubo grande:

a) Tres caras pintadas: 8, 8, 8, 8, ... $a_n = 8$

b) Dos caras pintadas:
0, 12, 24, 36, ... $a_n = 12(n - 2)$

c) Una cara pintada:
0, 6, 24, 54, ... $a_n = 6 \cdot (n-2)^2$

7. a) $a_{2002} = 3\,500\,000$
$a_{2003} = 3\,570\,000$
$a_{2004} = 3\,641\,400$
$a_{2005} = 3\,714\,228$
$a_{2006} = 3\,788\,513$

b) $P_F = 3\,500\,000 \cdot 1{,}02^t = 7\,000\,000 \Rightarrow$
$\Rightarrow 1{,}02^t = 2 \Rightarrow t \cdot \log 1{,}02 = \log 2 \Rightarrow$
$\Rightarrow t = \dfrac{\log 2}{\log 1{,}02} = 35$ años

De forma aproximada, la población se doblará en el año 2037.

c) Es monótona creciente y acotada inferiormente pero no superiormente.

8. a) $\lim \dfrac{1 + 2 + 3 + \ldots + n}{2n^2} = \lim \dfrac{(1+n) \cdot n}{2 \cdot 2n^2} =$
$= \lim \dfrac{n^2 + n}{4n^2} = \dfrac{1}{4}$

b) $\lim \dfrac{2+4+6+8+\ldots+2n}{n^2+1} = \lim \dfrac{(2+2n) \cdot n}{2n^2+2} = \dfrac{2}{2} = 1$

11 Funciones. Límites y continuidad

1. Calcula el verdadero valor de la función $f(x) = \dfrac{\text{sen}^3 x}{\text{tg } x - \text{sen } x}$ en $x = 0$.

2. Calcula el verdadero valor de la función $f(x) = \dfrac{\sqrt{x+1} - 1}{\sqrt{x+9} - 3}$ en $x = 0$.

3. ¿Qué tipo de discontinuidad presenta la función $f(x) = \dfrac{|x^3 - x|}{x}$ en $x = 0$?

4. Clasifica las discontinuidades de la función $f(x) = (x+1) \cdot 2^{-\left(\frac{1}{|x|} + \frac{1}{x}\right)}$

5. Determina para qué valores de los parámetros a y b es continua en toda la recta real la función:

$$f(x) = \begin{cases} x + 2 & x \leqslant 0 \\ \sqrt{ax + b} & 0 < x \leqslant 2 \\ -\dfrac{x}{2\sqrt{2}} + \dfrac{3}{\sqrt{2}} & x > 2 \end{cases}$$

6. Demuestra que la función $f(x) = 2x^3 - 5x^2 + x + 2$ corta al eje de abscisas en el intervalo $[-1, 3]$. ¿Puede afirmarse lo mismo de la función $g(x) = \dfrac{2x+1}{x-2}$?

7. Demuestra que la ecuación $2^x - 4x = 0$ tiene, al menos, dos soluciones reales.

8. Demuestra que las gráficas de las funciones $f(x) = x^3 + x^2$ y $g(x) = 3 + \cos \pi x$ se cortan en un punto cuya abscisa pertenece al intervalo $[0, 2]$.

9. Calcula el valor de k para que la función $f(x) = \dfrac{x^2 + kx + 5}{x^2 - 3x + 2}$ tenga en $x = 2$ una discontinuidad evitable y escribe, en ese caso, el verdadero valor de la función en $x = 2$.

10. Construye una función adecuada para demostrar, por el teorema de Bolzano, que la función $f(x) = \sqrt{x^3 + 1}$ toma todos los valores del intervalo $[0, 3]$.

SOLUCIONES

1. El verdadero valor es $f(0) = 2$, ya que:

$$\lim_{x\to 0} \frac{\text{sen}^3\, x}{\text{tg}\, x - \text{sen}\, x} = \lim_{x\to 0} \frac{\text{sen}\, x \cdot \text{sen}^2\, x}{\frac{\text{sen}\, x}{\cos x} - \text{sen}\, x} =$$

$$= \lim_{x\to 0} \frac{\cos x \cdot (1 - \cos^2 x)}{1 - \cos x} =$$

$$= \lim_{x\to 0} [\cos x \cdot (1 + \cos x)] = 2$$

2. El verdadero valor es $f(0) = 3$, ya que:

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sqrt{x+1} - 1}{\sqrt{x+9} - 3} =$$

$$= \lim_{x\to 0} \frac{(\sqrt{x+1} - 1)\cdot(\sqrt{x+1} + 1)\cdot(\sqrt{x+9} + 3)}{(\sqrt{x+9} - 3)\cdot(\sqrt{x+9} + 3)\cdot(\sqrt{x+1} + 1)} =$$

$$= \lim_{x\to 0} \frac{x\cdot(\sqrt{x+9} + 3)}{x\cdot(\sqrt{x+1} + 1)} = \lim_{x\to 0} \frac{(\sqrt{x+9} + 3)}{(\sqrt{x+1} + 1)} = 3$$

3. $$\lim_{x\to 0^+} f(x) = \lim_{x\to 0^+} \frac{-(x^3 - x)}{x} = \lim_{x\to 0^+} (1 - x^2) = 1$$

$$\lim_{x\to 0^-} f(x) = \lim_{x\to 0^-} \frac{x^3 - x}{x} = \lim_{x\to 0^-} (x^2 - 1) = -1$$

La función tiene una discontinuidad inevitable de salto finito igual a 2.

4. La función es continua en el dominio $\mathbf{R} - \{0\}$; estudiamos el tipo de discontinuidad en $x = 0$.

$$f(x) = \begin{cases} (x+1) & \text{si } x < 0 \\ (x+1)\cdot 2^{-\frac{2}{x}} & \text{si } x > 0 \end{cases}; \ \lim_{x\to 0^-} f(x) = 1 \text{ y}$$

$\lim_{x\to 0^+} f(x) = \lim_{x\to 0^+} \frac{x+1}{2^{\frac{2}{x}}} = 0$, por lo que la función tiene una discontinuidad inevitable de salto finito igual a 1 en $x = 0$.

5. Para que la función sea continua en toda la recta real debe ser continua en $x = 0$ y en $x = 2$:

$$f(0) = \lim_{x\to 0^-} f(x) = \lim_{x\to 0^+} f(x)$$

$$\left\{\begin{array}{l} f(0) = \lim_{x\to 0^-} f(x) = 2 \\ \lim_{x\to 0^+} f(x) = \sqrt{b} \end{array}\right. \Rightarrow b = 4$$

$$f(2) = \lim_{x\to 2^-} f(x) = \lim_{x\to 2^+} f(x)$$

$$\left\{\begin{array}{l} f(2) = \lim_{x\to 2^-} f(x) = \sqrt{2a+4} \\ \lim_{x\to 2^+} f(x) = -\frac{2}{2\sqrt{2}} + \frac{3}{\sqrt{2}} \end{array}\right. \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \sqrt{2a+4} = \frac{2}{\sqrt{2}} \Rightarrow a = -1$$

6. La función $f(x) = 2x^3 - 5x^2 + x + 2$ es continua y toma valores de distinto signo en los extremos del intervalo $[-1, 3]$, $f(-1) = -6 < 0$ y $f(3) = 14 > 0$; por el teorema de Bolzano, $\exists c \in [-1, 3]$ que cumple $f(c) = 0$.

Este razonamiento no es válido para la función $g(x)$, ya que no es continua en el intervalo $[-1, 3]$ puesto que no está definida en $x = 2$; sin embargo, se puede observar directamente que la función corta al eje de abcisas en $x = -\frac{1}{2} \in [-1, 3]$.

7. Se considera la función $f(x) = 2^x - 4x$; esta función es continua y toma valores de distinto signo en los extremos del intervalo $[0, 1]$:

$$f(0) = 1 \qquad f(1) = -2$$

por el teorema de Bolzano, $\exists c \in [0, 1]$ tal que $2^c - 4c = 0$, es decir, $c \in [0, 1]$ es una solución de la ecuación.

Además, $f(4) = 2^4 - 4\cdot 4 = 0$, por lo que $x = 4$ es otra solución de la ecuación.

8. Sea la función $h(x) = f(x) - g(x) = x^3 + x^2 - 3 - \cos \pi x$ esta función es continua y toma valores de distinto signo en los extremos del intervalo $[0, 2]$:

$$h(0) < 0 \qquad h(2) > 0$$

Por el teorema de Bolzano, $\exists c \in [0, 2]$ que cumple $h(c) = 0$; es decir, $f(c) - g(c) = 0 \Rightarrow f(c) = g(c)$.

9. Para que exista una discontinuidad evitable:

$\lim_{x\to 2} \frac{x^2 + kx + 5}{x^2 - 3x + 2} \in \mathbf{R}$, y para ello debe anularse el numerador en $x = 2 \Rightarrow 2^2 + 2k + 5 = 0 \Rightarrow$

$\Rightarrow k = -\frac{9}{2}$. Para este valor:

$$\lim_{x\to 2} \frac{x^2 - \frac{9}{2}x + 5}{x^2 - 3x + 2} = \lim_{x\to 2} \frac{(x-2)\cdot\left(x - \frac{5}{2}\right)}{(x-2)\cdot(x-1)} =$$

$$= \lim_{x\to 2} \frac{x - \frac{5}{2}}{x - 1} = -\frac{1}{2}$$

que es el verdadero valor de $f(x)$ en $x = 2$.

10. La función $g(x) = \sqrt{x^3 + 1} - c$, $0 < c < 3$ es continua en el intervalo $[-1, 2]$ y toma valores de distinto signo en los extremos:

$$g(-1) = -c < 0 \qquad g(2) = 3 - c > 0$$

Por el teorema de Bolzano, $\exists\, x_0 \in [-1, 2]$ que cumple $g(x_0) = 0$; es decir, $f(x_0) - c = 0 \Rightarrow f(x_0) = c$.

12 Tasas de variación y derivadas

1. Estudia la continuidad y la derivabilidad de la función $f(x) = \begin{cases} |x+3| & \text{si} \quad x \leq -1 \\ x^2 & \text{si} \quad -1 < x \leq 2 \\ 2x & \text{si} \quad x > 2 \end{cases}$

2. Estudia la derivabilidad en $x = 0$ de la función $f(x) = \begin{cases} \dfrac{\sqrt{x^2 + x^3}}{x} & \text{si } -1 \leq x \text{ y } x \neq 0 \\ 1 & \text{si } x = 0 \end{cases}$

3. Estudia la derivabilidad de la función $f(x) = |(x-1) \cdot (x-2)^2 \cdot (x-3)^3|$

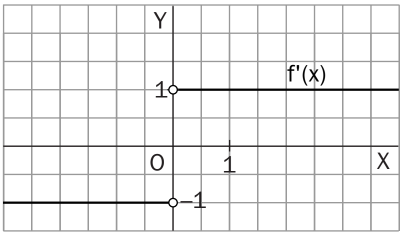
4. Dada la función $f(x) = \begin{cases} x & \text{si } 0 \leq x \leq 2 \\ 2x - 2 & \text{si } \quad x > 2 \end{cases}$, se considera la función $S(x)$ que expresa el área encerrada por la gráfica de la función $f(x)$, el eje de abscisas y la perpendicular a dicho eje trazada por el punto $(x, 0)$. Determina la expresión analítica de la funcion $S(x)$ y estudia su continuidad y su derivabilidad.

5. Demuestra que la derivada de una función derivable par es una función impar y que la derivada de una función derivable impar es una función par.

6. ¿Cómo deben elegirse los parámetros a y b de la función $F(x) = \begin{cases} f(x) & \text{si } x \leq x_0 \\ ax + b & \text{si } x > x_0 \end{cases}$ para que sea continua y derivable en el punto x_0, teniendo en cuenta que la función $f(x)$ es derivable por la izquierda en $x = x_0$?

7. ¿Cómo deben elegirse los parámetros a y b de la función $f(x) = \begin{cases} x^2 & \text{si } x \leq x_0 \\ ax + b & \text{si } x > x_0 \end{cases}$ para que sea continua y derivable en $x = x_0$?

8. De una función $f(x)$ continua en todo **R** se conoce la gráfica de su derivada, que es la que corresponde a la figura adjunta, y se sabe además que $f(0) = 1$. Dibuja la gráfica de $f(x)$ y encuentra su expresión analítica.



9. Calcula las derivadas laterales de la función $f(x) = \begin{cases} 2x^2 - 3x + 1 & \text{si } x < -1 \\ \dfrac{7x^2 + 5}{2} & \text{si } x \geq -1 \end{cases}$ en el punto $x = -1$. Indica si la función es o no derivable en ese punto.

10. Si la función $y = f(x)$ verifica que $\lim_{x \to a} f(x) = 0$ y la función $y = g(x)$ es acotada, es decir, existe un número real M tal que $|g(x)| \leq M$ para todos los valores de x, entonces se cumple que $\lim_{x \to a} (f(x) \cdot g(x)) = 0$. Con la ayuda de este resultado, estudia la continuidad y derivabilidad en el origen de coordenadas de la función $f(x) = x^2 \cdot \text{sen } x$.

11. Dada la función $f(x) = |x| + |x + 1|$:

a) Exprésala mediante una función definida a trozos.

b) Represéntala gráficamente.

c) Estudia la continuidad y derivabilidad en todo el dominio.

SOLUCIONES

1. $f(x)$ es discontinua en $x = -1$, ya que: $\lim_{x \to -1^-} f(x) = 2$ y $\lim_{x \to -1^+} f(x) = 1$. Tiene una discontinuidad inevitable de salto finito igual a 1. En el resto de los valores es continua.
$f(x)$ no es derivable en $x = -1$, por no ser continua, ni en $x = -3$ y $x = 2$, ya que en estos puntos las derivadas laterales son distintas:
$f'(-3^-) = -1$ y $f'(-3^+) = 1$, $f'(2^-) = 4$ y $f'(2^+) = 2$

2. $f(x) = \begin{cases} \text{signo}(x) \cdot \sqrt{1 + x} & \text{si } -1 \leqslant x \text{ y } x \neq 0 \\ 1 & \text{si } x = 0 \end{cases}$

No es derivable en $x = 0$, ya que no es continua en ese punto: $\lim_{x \to 0^-} f(x) = -1$ y $\lim_{x \to 0^+} f(x) = 1$.

3. $f(x) = \begin{cases} (x-1)(x-2)^2(x-3)^3 & \text{si } x \leqslant 1 \\ -(x-1)(x-2)^2(x-3)^3 & \text{si } 1 < x \leqslant 3 \\ (x-1)(x-2)^2(x-3)^3 & \text{si } x > 3 \end{cases}$

$\text{D} f(x) = \begin{cases} (x-2)(x-3)^2[6x^2-22x+18] & \text{si } x < 1 \\ -(x-2)(x-3)^2[6x^2-22x+18] & \text{si } 1 < x \leqslant 3 \\ (x-2)(x-3)^2[6x^2-22x+18] & \text{si } x > 3 \end{cases}$

No es derivable en $x = 1$, ya que las derivadas laterales son distintas: $f'(1^-) = -8$ y $f'(1^+) = 8$.

4. $S(x) = \begin{cases} \frac{1}{2}x^2 & \text{si } 0 \leqslant x \leqslant 2 \\ 2 + 2(x-2) + \frac{1}{2}(x-2)(2x-2) & \text{si } x > 2 \end{cases}$

$S(x) = \begin{cases} \frac{1}{2}x^2 & \text{si } 0 \leqslant x \leqslant 2 \\ x^2 - 2x + 2 & \text{si } x > 2 \end{cases}$

$S(x)$ es continua en $[0, \infty)$, ya que lo es en $x = 2$:
$f(2) = \lim_{x \to 2^-} f(x) = \lim_{x \to 2^+} f(x) = 2$

es derivable en $(0, \infty)$; $\text{D}S(x) = \begin{cases} x & \text{si } 0 < x \leqslant 2 \\ 2x - 2 & \text{si } x > 2 \end{cases}$

ya que $f'(2^-) = f'(2^+) = 2$

5. $f(x)$ función derivable par:

$$\text{D} f(-x) = \lim_{h \to 0} \frac{f(-x+h) - f(-x)}{h} =$$
$$= \lim_{h \to 0} \frac{f(-(x-h)) - f(-x)}{h} =$$
$$= -\lim_{h \to 0} \frac{f(x-h) - f(x)}{-h} = -\text{D} f(x)$$

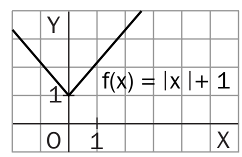
$f(x)$ función derivable impar:

$$\text{D} f(-x) = \lim_{h \to 0} \frac{f(-x+h) - f(-x)}{h} =$$
$$= -\lim_{h \to 0} \frac{f(-(x-h)) - f(-x)}{h} =$$
$$= -\lim_{h \to 0} \frac{f(x-h) - f(x)}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{f(x-h) - f(x)}{-h} =$$
$$= \text{D} f(x)$$

6. Para que sea continua:
$F(x_0) = \lim_{x \to x_0^-} F(x) = \lim_{x \to x_0^+} F(x) \Rightarrow f(x_0) = ax_0 + b$
Para que sea derivable: $F'(x_0^-) = F'(x_0^+) \Rightarrow f'(x_0^-) = a$.
Por lo tanto, $a = f'(x_0^-)$ y $b = f(x_0) - x_0 f'(x_0^-)$.

7. Para que sea continua
$f(x_0) = \lim_{x \to x_0^-} f(x_0) = \lim_{x \to x_0^+} f(x) \Rightarrow x_0^2 = ax_0 + b$
Para que sea derivable $f'(x_0^-) = f'(x_0^+) \Rightarrow 2x_0 = a$.
Por tanto, $a = 2x_0$ y $b = -x_0^2$

8. $f(x) = \begin{cases} x + a & \text{si } x > 0 \\ 1 & \text{si } x = 0 \\ -x + b & \text{si } x < 0 \end{cases}$



Como la función debe ser continua en 0:

$a = b = 1 \Rightarrow f(x) = \begin{cases} x + 1 & \text{si } x \geqslant 0 \\ -x + 1 & \text{si } x < 0 \end{cases}$

$f(x) = |x| + 1$

9. $f'(-1^+) = \lim_{h \to 0^+} \dfrac{\frac{7(-1+h)^2 + 5}{2} - 6}{h} = -7$

$f'(-1^-) = \lim_{h \to 0^-} \dfrac{2(-1+h)^2 - 3(-1+h) + 1 - 6}{h} = -7$

La función es derivable. La derivada es $f'(-1) = -7$.

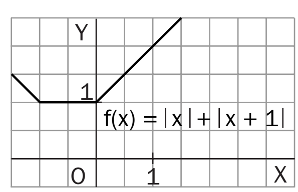
10. $f(x)$ cumple las condiciones del enunciado, entonces: $\lim_{x \to 0} x^2 \cdot \text{sen}\, x = 0$, ya que $\lim_{x \to 0} x^2 = 0$ y $|\text{sen}\, x| \leqslant 1$. Además:

$$f'(0) = \lim_{x \to 0} \frac{f(h) - f(0)}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{h^2 \cdot \text{sen}\, h}{h} =$$
$$= \lim_{h \to 0} h \cdot \text{sen}\, h = 0$$

La función es continua y derivable en $x = 0$.

11.
a) $f(x) = \begin{cases} -2x - 1 & \text{si } x \leqslant -1 \\ 1 & \text{si } -1 < x < 0 \\ 2x + 1 & \text{si } x \geqslant 0 \end{cases}$

b)



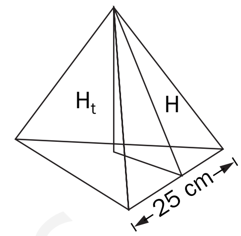
c) La función es continua en todo **R**.
La función es derivable en todo **R** excepto en los puntos $x = -1$ y $x = 0$.

13 Cálculo de derivadas

1. El lado de un tetraedro crece a razón de 5 cm cada minuto.

a) ¿A qué velocidad crece el área de la base cuando el lado mide 25 cm?

b) ¿A qué velocidad crece el volumen cuando el lado mide 25 cm?



2. a) Escribe una expresión para el logaritmo en base x de un número N, utilizando únicamente logaritmos neperianos.

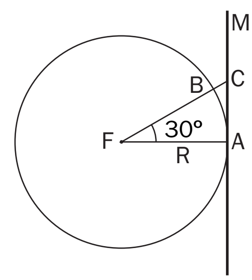
b) Calcula la derivada de la función $f(x) = \log_x \sqrt{x+1}$

3. Calcula la derivada de las funciones:

a) $f(x) = \sqrt{x \cdot \sqrt{x \cdot \sqrt{x \cdot \sqrt{x}}}}$ b) $f(x) = \text{sen}\,(\text{sen}\,(\text{sen}\,(x)))$

4. Las funciones f y g son continuas y derivables en todo el conjunto de los números reales. Se sabe que $f(3) = -4$, $f'(3) = -3$ y que $g'(-4) = 4$. Calcula el valor de $(g \circ f)'\,(3)$.

5. Un ciclista recorre, partiendo del punto A, la pista de forma circular que aparece en la figura. En el centro de la pista hay un foco luminoso F, por lo que el ciclista proyecta, en cada instante, una sombra sobre el muro AM. Calcula la velocidad de la sombra cuando el ciclista ha recorrido la doceava parte del circuito sabiendo que la velocidad a la que pedalea es constante e igual a 40 km/h.



6. Una escalera de 5 m de longitud está apoyada en la pared de forma que el pie de la escalera se va desplazando alejándose del muro a una razón de 10 cm por minuto. Calcula la velocidad a la que desciende la parte superior A de la escalera cuando el pie B está a 2 m de la pared.

7. Calcula las derivadas de las siguientes funciones:

a) $f(x) = e^{x^x}$ b) $f(x) = \sqrt[x]{x}$

8. Calcula la derivada de los cinco primeros órdenes de la función $f(x) = x \cdot [\text{sen}\,(\text{L}\,x) + \cos\,(\text{L}\,x)]$

9. Calcula la derivada de orden n de las siguientes funciones:

a) $f(x) = x^m,\ m > n$ b) $f(x) = x \cdot \text{L}x$

10. La **fórmula de Leibniz** nos facilita una expresión para hallar la derivada de orden n de un producto de funciones que sean n veces derivables:

$$D^n(f(x) \cdot g(x)) = \sum_{i=0}^{n} C_{n,i} \cdot D^i f(x) \cdot D^{n-i}\,g(x)$$

siendo $C_{n,i}$ el número de combinaciones de n elementos tomados de i en i, $D^0 f(x) = f(x)$ y $D^0 g(x) = g(x)$.

Aplicando la fórmula de Leibniz, halla la derivada de orden n de la función $f(x)$ y $x^n \cdot e^x$ y comprueba su validez calculando directamente las derivadas de orden n para los casos $n = 1$, $n = 2$ y $n = 3$.

SOLUCIONES

1. a) La medida de cada arista es $L = 5t$, donde L se mide en cm y t en minutos.

La altura del triángulo equilátero de la base es:

$$H = \sqrt{(5t)^2 - \left(\frac{5t}{2}\right)^2} = \sqrt{\frac{75t^2}{4}} = \frac{5t\sqrt{3}}{2}$$

El área de dicho triángulo es:

$$S = \frac{5t \cdot \dfrac{5t\sqrt{3}}{2}}{2} = \frac{25t^2\sqrt{3}}{4}$$

Cuando el lado mide 25 cm, han pasado 5 minutos. La velocidad de crecimiento del área es:

$$S'(5) = \frac{25 \cdot 25 \cdot \sqrt{3}}{4} = 270{,}6 \text{ cm}^2 \text{ por minuto.}$$

b) La altura del tetraedro es: $H_t = \dfrac{5t\sqrt{6}}{3}$

El volumen es: $V = \dfrac{S \cdot H_t}{3} = \dfrac{125t^3\sqrt{2}}{12}$

La velocidad de crecimiento del volumen es:

$V'(5) = 1\,104{,}8$ cm^2 por minuto.

2. a) Haciendo los siguientes cambios de variable:

$$\left.\begin{array}{r} LN = A \\ Lx = B \\ log_x N = C \end{array}\right\} \Rightarrow N = a^A\ x = e^B\ x^C = N$$

$$(e^B)^C = e^{BC} = e^A \Rightarrow BC = A$$

$$Lx \cdot \log_x N = LN \Rightarrow \log_x N = \frac{LN}{Lx}$$

b) $f(x) = \log_x \sqrt{x+1} = \dfrac{L\sqrt{x+1}}{Lx} \Rightarrow$

$$\Rightarrow f'(x) = \frac{Lx \cdot \dfrac{1}{2x+2} - L\sqrt{x+1} \cdot \dfrac{1}{x}}{(Lx)^2}$$

3. a) $f(x)\ \sqrt{x \cdot \sqrt{x \cdot \sqrt{x \cdot \sqrt{x}}}} = \sqrt[16]{x^{15}} = x^{\frac{15}{16}}$

$$f'(x) = \frac{15}{16}x^{\frac{15}{16}-1} = \frac{15}{16}x^{-\frac{1}{16}} = \frac{15}{16\sqrt[16]{x}}$$

b) $f'(x) = \cos(\operatorname{sen}(\operatorname{sen}(x)) \cdot \cos(\operatorname{sen}(x))) \cdot \cos x$

4. Aplicando la regla de la cadena para la composición de funciones derivables:

$(g \circ f)'(3) = g'(f(3)) \cdot f'(3) = g'(-4) \cdot f'(3) =$
$= 4 \cdot (-3) = -12$

5. Sea R el radio del círculo del circuito y α el ángulo recorrido en radianes.

La longitud del arco AB es $\alpha \cdot R = 40t$

Por otra parte

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{AC}{R} \Rightarrow AC = R \cdot \operatorname{tg}\alpha = R\operatorname{tg}\left(\frac{40t}{R}\right) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow AC' = R \cdot \frac{40}{R} \cdot \frac{1}{\cos^2\left(\dfrac{40t}{R}\right)} = \frac{40}{\cos^2\alpha}$$

En el momento en que $\alpha = 30° = \dfrac{\pi}{6}$ rad:

$$v = AC' = \frac{40}{\cos^2\dfrac{\pi}{6}} = 53{,}3 \text{ km/h}$$

6. El espacio, en metros, recorrido por el pie de la escalera es: $S_P(t) = 0{,}1t$ donde t se mide en minutos y $S_p(t)$ en metros.

El espacio recorrido por el extremo que se apoya en la pared es:

$S_E(t) = \sqrt{25 - 0{,}01t^2} \Rightarrow$

$$\Rightarrow v(t) = s_E'(t) = \frac{-0{,}02t}{2\sqrt{25-0{,}01t^2}} = -\frac{0{,}01t}{\sqrt{25-0{,}01t^2}}$$

Como:

$S_P(t) = 2 \Rightarrow t = 20$ minutos $\Rightarrow$

$$\Rightarrow S_E'(20) = -\frac{0{,}2}{\sqrt{21}} = -0{,}043 \text{ m/min} = -4{,}3 \text{ cm/min}$$

7. a) $D\ f(x) = e^{x^x} \cdot x^x \cdot [1 + Lx]$

b) $D\ f(x) = \sqrt[x]{x} \cdot \dfrac{1 - Lx}{x^2}$

8. $D\ f(x) = 2\cos(Lx)$, $D^2 f(x) = -\dfrac{2\operatorname{sen}(Lx)}{x}$

$$D^3 f(x) = \frac{2\operatorname{sen}(Lx) - 2\cos(Lx)}{x^2}$$

$$D^4 f(x) = \frac{6\cos(Lx) - 2\operatorname{sen}(Lx)}{x^3}$$

$$D^5 f(x) = -\frac{20\cos(Lx)}{x^4}$$

9. a) $D\ f(x) = mx^{m-1}$, $D^2 f(x) = m(m-1)\,x^{m-2}$,
$D^3 f(x) = m(m-1)(m-2)\,x^{m-3}$ ...,

$$D^n f(x) = \frac{m!}{(m-n)!}\,x^{(m-n)}$$

b) $D\ f(x) = 1 + Lx$, $D^2 f(x) = \dfrac{1}{x}$,

$D^3 f(x) = -\dfrac{1}{x^2}$, $D^4 f(x) = \dfrac{2}{x^3}$ ...,

$D^n f(x) = (-1)^{n-2}\dfrac{(n-2)!}{x^{n-1}}$ si $n \geq 2$

10. $D^n(x^n \cdot e^x) = \displaystyle\sum_{i=0}^{n} C_{n,i} \cdot D^i(x^n) \cdot D^{n-i}(e^x) =$

$$= \sum_{i=0}^{n} \frac{n!}{(n-i)!\cdot i!} \cdot n(n-1)\ldots(n-i+1)x^{n-i} \cdot e^x =$$

$$= e^x\left[x^n + n^2x^{n-1} + \frac{n^2(n-1)^2}{2!}x^{n-2} + \ldots + n!\right]$$

$n = 1$, $D(xe^x) = e^x[x + 1]$; $n = 2$, $D(x^2e^x) =$
$= e^x[x^2 + 2x]$, $D^2(x^2e^x) = e^x[x^2 + 4x + 2]$;
$n = 3$, $D(x^3e^x) = e^x[x^3 + 3x^2]$;
$D^2(x^3e^x) = e^x[x^3 + 6x^2 + 6x]$;
$D^3(x^3e^x) = e^x[x^3 + 9x^2 + 18x + 6]$

14 Funciones derivables: propiedades locales y globales

1. Halla la ecuación de la tangente a la gráfica de la función $f(x) = \text{sen}\, x + \text{L}(\text{tg}\, x)$ en el punto de abscisa $x = \dfrac{\pi}{4}$.

2. Halla los puntos de la curva $f(x) = x^2 + 2$ en los que la tangente a esta pasa por el punto $P(0, 1)$. Escribe las ecuaciones de dichas rectas tangentes.

3. Estudia para qué valores de a, b y c la recta que une los puntos $A(-1, 1)$ y $B(1, 3)$ es tangente en el punto B a la gráfica de la función $f(x) = a\text{L}(1 + x^2) - bx + c$.

4. Halla la ecuación de la recta que pasa por el punto (1, 0) y es paralela a la tangente a la curva $f(x) = \dfrac{x^3}{x^2 - 3}$ en su punto de intersección con la recta $x = 2$.

5. Calcula el valor de m, n y k para que la función $f(x) = \begin{cases} 3x^2 + 3 & \text{si } x \leqslant 0 \\ x^3 + mx + n & \text{si } x > 0 \end{cases}$ cumpla las hipótesis del teorema de Rolle en el intervalo $[k, 1]$ y determina el valor $x = c$ que predice este teorema.

6. Calcula el valor de a, b y k para que la función $f(x) = \begin{cases} 3x & \text{si } x \leqslant 1 \\ ax^2 + b(x - 1) + 4 & \text{si } x > 1 \end{cases}$ cumpla las hipótesis del teorema de Rolle en el intervalo $[-2, k]$ y determina el valor $x = c$ que predice este teorema.

7. Demuestra que para cualquier número real p, la ecuación $2x^5 + x + p = 0$ no tiene nunca dos soluciones reales.

8. Sin calcular la derivada de la función $f(x) = x \cdot (x^2 - 1) \cdot (x + 3)$, estudia cuántas raíces reales tiene la ecuación $f'(x) = 0$ y determina los intervalos a los que pertenecen.

9. Escribe la fórmula de los incrementos finitos para cada una de las siguientes funciones en los intervalos que se indican.

a) $f(x) = \cos x$ en $[\pi, \pi + h]$

b) $f(x) = \text{sen}\, 2x$ en $[2, 2 + h]$

10. Calcula el valor del siguiente límite: $\lim\limits_{x \to 0^+} x(e^{\frac{1}{x}} - 1)$

SOLUCIONES

1. $\mathrm{D}\, f(x) = \cos x + \dfrac{1 + \mathrm{tg}^2 x}{\mathrm{tg}\, x} \Rightarrow$

$\Rightarrow f'\left(\dfrac{\pi}{4}\right) = \cos\dfrac{\pi}{4} + \dfrac{1 + \mathrm{tg}^2 \dfrac{\pi}{4}}{\mathrm{tg}\dfrac{\pi}{4}} = \dfrac{\sqrt{2}}{2} + 2$

Además, $f\left(\dfrac{\pi}{4}\right) = \mathrm{sen}\dfrac{\pi}{4} + \mathrm{L}\ \mathrm{tg}\dfrac{\pi}{4} = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$: el punto de tangencia es $\left(\dfrac{\pi}{4}, \dfrac{\sqrt{2}}{2}\right)$. La ecuación de la tangente es $y - \dfrac{\sqrt{2}}{2} = \left(\dfrac{\sqrt{2}}{2} + 2\right) \cdot \left(x - \dfrac{\pi}{4}\right)$

2. Los puntos de tangencia son:
$A(a, f(a)) = A(a, a^2 + 2)$
Las ecuaciones de las tangentes son:
$y - 1 = mx$ con $m = f'(a) \Rightarrow m = 2a$
Como A pertenece a la tangente $a^2 + 2 - 1 = (2a) \cdot a$ y resolviendo la ecuación $a = \pm 1$. Los puntos de tangencia son $A_1(-1, 3)$ y $A_2(1, 3)$ y las tangentes t_1: $y - 3 = -(x + 1)$ y t_2: $y - 3 = (x - 1)$.

3. La gráfica pasa por B: $f(1) = 3 \Rightarrow a\mathrm{L}2 - b + c = 3$ la recta que pasa por A y B tiene pendiente $m = 1$ y es tangente en B, $f'(1) = 1$; como
$f'(x) = \dfrac{2ax}{1 + x^2} - b \Rightarrow 1 = a - b$. Por tanto,
$a = 1$, $c = 3 + b - (1 + b)\ \mathrm{L}2$ y b es un parámetro que se puede elegir de forma arbitraria.

4. La pendiente de la recta buscada es $f'(2)$:
$f'(x) = \dfrac{x^2(x^2 - 9)}{(x^2 - 3)^2} \Rightarrow f'(2) = -20$
Por lo tanto, la recta pedida es:
$y - 0 = -20(x - 1) \Rightarrow 20x + y - 20 = 0$

5. Para que sea continua en $x = 0$:
$f(0) = \lim\limits_{x \to 0^-} f(x) = \lim\limits_{x \to 0^+} f(x) \Rightarrow n = 3$

Para que sea derivable en $x = 0$, $f'(0^-) = f'(0^+) \Rightarrow$
$\Rightarrow m = 0$

Para que $f(x) = \begin{cases} 3x^2 + 3 & \text{si } x \leqslant 0 \\ x^3 + 3 & \text{si } x > 0 \end{cases}$
continua y derivable en $[k, 1]$, verifique las hipótesis del teorema de Rolle $f(1) = f(k) \Rightarrow f(k) = 4$.

Para $k < 0$: $3k^2 + 3 = 4 \Rightarrow k = -\dfrac{\sqrt{3}}{3}$

$\mathrm{D}\, f(x) = \begin{cases} 6x & \text{si } x \leqslant 0 \\ 3x^2 & \text{si } x > 0 \end{cases} \Rightarrow f'(c) = 0 \Rightarrow c = 0$

6. Para que sea continua en $x = 1$:
$f(1) = \lim\limits_{x \to 1^-} f(x) = \lim\limits_{x \to 1^+} f(x) \Rightarrow 3 = a + 4 \Rightarrow$
$\Rightarrow a = -1$

Para que la función:
$f(x) = \begin{cases} 3x & \text{si } x \leqslant 1 \\ -x^2 + 5x - 1 & \text{si } x > 1 \end{cases}$ sea continua y derivable en $[-2, k]$ y verifique las hipótesis del teorema de Rolle: $f(-2) = f(k) = -6$; si $k > 1$; $-k^2 + 5k - 1 = -5 \Rightarrow k = \dfrac{5 + 3\sqrt{5}}{2}$

$\mathrm{D}\, f(x) = \begin{cases} 3 & \text{si } x \leqslant 1 \\ -2x + 5 & \text{si } x > 1 \end{cases}$

$f'(c) = 0 \Rightarrow -2x + 5 = 0 \Rightarrow c = \dfrac{5}{2}$

7. Por reducción al absurdo: sean x_1 y x_2 soluciones reales distintas de la ecuación $x_1 < x_2$.

La función $f(x) = 2x^5 + x + p$ verifica las hipótesis del teorema de Rolle en $[x_1, x_2]$ y, por tanto, existe c, $x_1 < c < x_2$ tal que $f'(c) = 0$; es decir, $10c^4 + 1 = 0 \Rightarrow 10c^4 = -1$, imposible si c es real.

Por tanto, la ecuación no puede tener dos soluciones reales.

8. $f(x)$ es continua y derivable en $\mathbf{R}$ y, además, $f(-3) = f(-1) = f(0) = f(1) = 0$.

La función cumple las hipótesis del teorema de Rolle en los intervalos $[-3, -1]$, $[-1, 0]$ y $[0, 1]$ y, por tanto, $f'(x) = 0$ tiene al menos una solución en el interior de cada uno de ellos.

Como $f'(x)$ es de grado tres, tiene exactamente tres raíces, una en cada intervalo.

9. a) $\cos(\pi + h) - \cos\pi = -h\ \mathrm{sen}\, c$ con $\pi < c < \pi + h$

b) $\mathrm{sen}\,[2(2 + h)] - \mathrm{sen}\, 4 = 2h \cos 2c$ con $2 < c < 2 + h$

10. $\lim\limits_{x \to 0^+} x(e^{\frac{1}{x}} - 1) = \lim\limits_{x \to 0^+} \dfrac{e^{\frac{1}{x}} - 1}{\dfrac{1}{x}} = \lim\limits_{x \to 0^+} \dfrac{-\dfrac{1}{x^2} e^{\frac{1}{x}}}{-\dfrac{1}{x^2}} =$
$= \lim\limits_{x \to 0^+} e^{\frac{1}{x}} = \infty$

15 Monotonía y curvatura

1. Considera la función $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$:

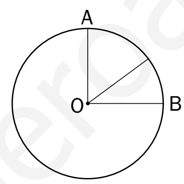
a) ¿Qué valores deben tomar a, b, c y d para que la función tenga un máximo en el punto $(1, 2)$ y un mínimo en el punto $(-1, -2)$?

b) Estudia la curvatura (concavidad, convexidad y puntos de inflexión) de la función para los valores obtenidos en el apartado anterior.

2. Estudia el crecimiento de la función $f(x) = e^{\operatorname{sen} x \cdot \cos x}$ y determina sus máximos y mínimos relativos para $x \in [0, 2\pi]$.

3. ¿Para qué valores de x es máximo el valor del determinante de la matriz $A = \begin{pmatrix} a & b & c \\ a & x & c \\ a & b & x \end{pmatrix}$? ¿Para qué valores es mínimo este determinante?

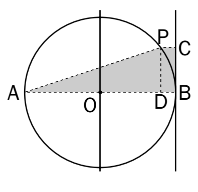
4. En una circunferencia de radio r se consideran dos arcos consecutivos cuya suma es un cuadrante y cuyos ángulos centrales respectivos miden α y $\frac{\pi}{2} - \alpha$ con $0 \leqslant \alpha \leqslant \frac{\pi}{2}$.



a) Calcula el valor de α que hace que la suma de los cuadrados de las longitudes de sus cuerdas sea máxima. ¿Cuánto vale ese máximo?

b) Calcula el valor de α que hace que el área del triángulo determinado por los extremos de dichos arcos sea máxima. ¿Cuál es esa superficie máxima?

5. Desde un punto P, que se mueve por una semicircunferencia de diámetro AB con $A(-4, 0)$ y $B(4, 0)$, se trazan las perpendiculares PC y PD a la tangente a la circunferencia en el punto B y al diámetro AB, respectivamente. Determina las coordenadas del punto P que hacen que el área del trapecio $APCB$ sea máxima.



SOLUCIONES

1. a) $f' = 3ax^2 + 2bx + c$. Si tiene un máximo en (1, 2): $f(1) = 2 \Rightarrow a + b + c + d = 2$ y $f'(1) = 0 \Rightarrow 3a + 2b + c = 0$. Si tiene un mínimo en $(-1, -2)$: $f(-1) = -2 \Rightarrow$
$\Rightarrow -a + b - c + d = -2$ y $f'(-1) = 0 \Rightarrow$
$\Rightarrow 3a - 2b + c = 0$.

La función es: $f(x) = -x^3 + 3x$.

b) $f'(x) = -3x^2 + 3$ y $f''(x) = -6x$. La función tiene un punto de inflexión en (0, 0); es convexa en $(-\infty, 0)$ y cóncava en $(0, \infty)$.

2. $f'(x) = (\cos^2 x - \operatorname{sen}^2 x) \cdot e^{\operatorname{sen} x \cdot \cos x}$; $f'(x) = 0 \Rightarrow$
$\Rightarrow \cos^2 x - \operatorname{sen}^2 x = 0 \Rightarrow \operatorname{tg}^2 x = 1$, que tiene como soluciones los valores de la forma:

$x = \dfrac{\pi}{4} + k\dfrac{\pi}{2}$ con $k = 0, 1, 2, 3$. Se discriminan los extremos mediante la derivada segunda

$f''(x) = [(\cos^2 x - \operatorname{sen}^2 x)^2 - 4 \operatorname{sen} x \cos x] \cdot e^{\operatorname{sen} x \cdot \cos x}$

- Si $k = 0$ $x = \dfrac{\pi}{4}$, $f''\left(\dfrac{\pi}{4}\right) < 0 \Rightarrow \left(\dfrac{\pi}{4}, \sqrt{e}\right)$ máximo
- Si $k = 1$ $x = \dfrac{3\pi}{4}$, $f''\left(\dfrac{3\pi}{4}\right) > 0 \Rightarrow \left(\dfrac{3\pi}{4}, \dfrac{\sqrt{e}}{e}\right)$ mínimo
- Si $k = 2$ $x = \dfrac{5\pi}{4}$, $f''\left(\dfrac{5\pi}{4}\right) < 0 \Rightarrow \left(\dfrac{5\pi}{4}, \sqrt{e}\right)$ máximo
- Si $k = 3$ $x = \dfrac{7\pi}{4}$, $f''\left(\dfrac{7\pi}{4}\right) > 0 \Rightarrow \left(\dfrac{7\pi}{4}, \dfrac{\sqrt{e}}{e}\right)$ mínimo

La función crece en $\left(0, \dfrac{\pi}{4}\right) \cup \left(\dfrac{3\pi}{4}, \dfrac{5\pi}{4}\right) \cup \left(\dfrac{7\pi}{4}, 2\pi\right)$

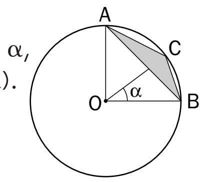
y decrece en $\left(\dfrac{\pi}{4}, \dfrac{3\pi}{4}\right) \cup \left(\dfrac{5\pi}{4}, \dfrac{7\pi}{4}\right)$.

3. Como $\det A = \begin{vmatrix} a & b & c \\ a & x & c \\ a & b & x \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a & b & c \\ 0 & x-b & 0 \\ 0 & 0 & x-c \end{vmatrix}$

$f(x) = \det A \Rightarrow f(x) = a \cdot (x - b) \cdot (x - c)$ y su derivada es $f'(x) = a \cdot [2x - (b + c)]$.

- Si $a = 0$, la función es constantemente nula, $f(x) = 0$.
- Si $a \neq 0$, la función tiene un extremo cuando $x = \dfrac{b+c}{2}$, que será un máximo si $a < 0$ o un mínimo si $a > 0$, ya que $f''(x) = 2a$.

4. a) Por el teorema del coseno
$l^2 = r^2 + r^2 - 2 \cdot r \cdot r \cdot \cos\alpha$,
es decir $l^2 = 2r^2 \cdot (1 - \cos\alpha)$.
La función a maximizar es:



$L(\alpha) = 2r^2 \cdot (1 - \cos\alpha) + 2r^2 \cdot \left(1 - \cos\left(\dfrac{\pi}{2} - \alpha\right)\right) \Rightarrow$
$\Rightarrow L(\alpha) = 2r^2 \cdot (2 - (\cos\alpha + \operatorname{sen}\alpha))$. La derivada $L'(\alpha) = -2r^2 \cdot (\cos\alpha - \operatorname{sen}\alpha)$ se anula si $\operatorname{tg}\alpha = 1 \Rightarrow \alpha = \dfrac{\pi}{4}$. Como $L''\left(\dfrac{\pi}{4}\right) < 0$, la suma de los cuadrados de las longitudes de las cuerdas es máxima para este ángulo y vale $r^2 \cdot (4 - 2\sqrt{2})$.

b) El área del triángulo es $\dfrac{1}{2} AC \cdot CB \cdot \operatorname{sen}\dfrac{3\pi}{4}$
$\Rightarrow S(\alpha) = \dfrac{\sqrt{2}}{2} r^2 \sqrt{(1 - \cos\alpha) \cdot (1 - \operatorname{sen}\alpha)}$

$S'(\alpha) = \dfrac{\sqrt{2}}{2} r^2 \dfrac{(\operatorname{sen}\alpha + \cos\alpha - 1) \cdot (\cos\alpha - \operatorname{sen}\alpha)}{2\sqrt{(1 - \cos\alpha) \cdot (1 - \operatorname{sen}\alpha)}}$

se anula para $\alpha = \dfrac{\pi}{4}$. Como $S''\left(\dfrac{\pi}{4}\right) < 0$ la función área alcanza su valor máximo en:
$x = \dfrac{\pi}{4}$, que es $S\left(\dfrac{\pi}{4}\right) = r^2 \cdot \left(1 - \dfrac{\sqrt{2}}{2}\right)$

5. Como $P(x, y)$ pertenece a la semicircunferencia de centro $O(0, 0)$ y radio 4:
$x^2 + y^2 = 4^2 \Rightarrow y = \sqrt{4^2 - x^2}$

El área del trapecio es la suma de las áreas del rectángulo *PCBD* y el triángulo *APD*.

$S(x, y) = (4 - x) \cdot y + \dfrac{1}{2}(4 + x) \cdot y =$
$= y \cdot \left(6 - \dfrac{1}{2}x\right) \Rightarrow$
$\Rightarrow S(x) = \sqrt{16 - x^2} \cdot \left(6 - \dfrac{1}{2}x\right)$

$S'(x) = \dfrac{1}{4} \dfrac{x^2 - 6x - 8}{\sqrt{16 - x^2}}$ se anula en la circunferencia cuando $x = 3 - \sqrt{17}$.

Como $S''(x) = \dfrac{-\dfrac{1}{4}x^2 - 96}{(16 - x^2) \cdot \sqrt{16 - x^2}}$

y $S''(3 - \sqrt{17}) < 0$, el área del trapecio es máxima cuando $P(3 - \sqrt{17}, \sqrt{-10 + 6\sqrt{17}})$.

16 Estudios y representación de funciones

1. Halla las asíntotas de la función $f(x) = \dfrac{x}{e^{2x} - 1}$. Comprueba si en algún caso la asíntota corta a la gráfica de la función y, en ese caso, calcula el punto de corte.

2. Dada la función $f(x) = \dfrac{|x|}{e^{|x-1|}}$, se pide:

a) Hallar dominio y asíntotas.

b) El estudio de la continuidad y derivabilidad de la función.

c) Los intervalos de crecimiento y decrecimiento y los extremos relativos.

d) Los intervalos de concavidad y convexidad y los puntos de inflexión.

e) La representación gráfica de la función.

3. Dada la función $f(x) = \dfrac{\operatorname{sen} x}{2 + \cos x}$:

a) Estudia su signo en el intervalo $[-\pi, \pi]$ y las simetrías que presenta su gráfica.

b) Determina sus máximos y mínimos relativos en el intervalo.

c) Determina sus puntos de inflexión en $[-\pi, \pi]$.

d) A partir del estudio realizado en los apartados anteriores, representa gráficamente la función en todo su dominio.

4. Dada la función $f(x) = \dfrac{e^{-ax}}{1 + x}$, donde a es un número positivo:

a) Determina sus máximos y mínimos relativos.

b) Halla la ecuación de sus asíntotas.

c) Representa gráficamente la función para $a = 1$.

SOLUCIONES

1. Dominio $\mathbf{R} - \{0\}$.

$\lim\limits_{x\to 0} f(x) = \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{x}{e^{2x} - 1} = \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{1}{2e^{2x}} = \dfrac{1}{2}$

$f(x)$ tiene una discontinuidad evitable en $x = 0$.

$\lim\limits_{x\to \infty} f(x) = \lim\limits_{x\to \infty} \dfrac{x}{e^{2x} - 1} = \lim\limits_{x\to \infty} \dfrac{1}{2e^{2x}} = 0$

$y = 0$ es asíntota horizontal cuando $x \longrightarrow \infty$, no hay punto de corte; $\lim\limits_{x\to -\infty} f(x) = \infty$ no hay asíntota horizontal cuando $x \longrightarrow -\infty$.

$y = -x$ es asíntota oblicua cuando $x \longrightarrow -\infty$.

2. a) Dominio $\mathbf{R}$; $f(x) = \begin{cases} -\dfrac{x}{e^{1-x}} & \text{si } x \leqslant 0 \\ \dfrac{x}{e^{1-x}} & \text{si } 0 < x \leqslant 1 \\ \dfrac{x}{e^{x-1}} & \text{si } x > 1 \end{cases}$

$y = 0$ es asíntota horizontal.

b) $f(x)$ es continua en $\mathbf{R}$ pero no derivable en $x = 0$ ni en $x = 1$.

$$f'(x) = \begin{cases} -\dfrac{1+x}{e^{1-x}} & \text{si } x < 0 \\ \dfrac{1+x}{e^{1-x}} & \text{si } 0 < x < 1 \\ \dfrac{1-x}{e^{x-1}} & \text{si } x > 1 \end{cases}$$

$$f''(x) = \begin{cases} -\dfrac{x+2}{e^{1-x}} & \text{si } x < 0 \\ \dfrac{x+2}{e^{1-x}} & \text{si } 0 < x < 1 \\ \dfrac{x-2}{e^{x-1}} & \text{si } x > 1 \end{cases}$$

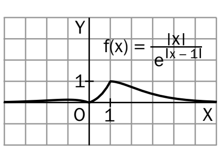
c) $f'(x)$ se anula en $x = -1$. Creciente: $(-\infty, -1) \cup (0, 1)$; decreciente: $(-1, 0) \cup (1, \infty)$.

Máximos relativos: $\left(-1, \dfrac{1}{e^2}\right)$ y $(1, 1)$; mínimo relativo: $(0, 0)$.

d) Se anula en $x = -2$ y en $x = 2$.

- Cóncava: $(-2, 0) \cup (1, 2)$
- Convexa: $(-\infty, -2) \cup (0, 1) \cup (2, \infty)$
- Puntos de inflexión: $\left(-2, \dfrac{2}{e^3}\right)$ y $\left(2, \dfrac{2}{e}\right)$

e)



3. a) Como $2 + \cos x$ es siempre positivo, el signo de $f(x)$ coincide con el de sen x: $f(x) > 0$ en $(0, \pi)$ y $f(x) < 0$ en $(-\pi, 0)$.

La gráfica es simétrica con respecto al origen, ya que $f(x)$ es impar, luego basta hacer el estudio en $(0, \pi)$.

b) $f'(x) = \dfrac{2\cos x + 1}{(2 + \cos x)^2}$, $f'(x) = 0$ si $2\cos x + 1 = 0 \Rightarrow$

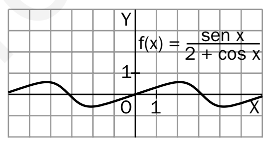
$\Rightarrow \cos x = -\dfrac{1}{2} \Rightarrow x = \dfrac{2\pi}{3}$

$f''(x) = \dfrac{2 \operatorname{sen} x(\cos x - 1)}{(2 + \cos x)^3}$ y $f''\left(\dfrac{2\pi}{3}\right) < 0$ luego $f(x)$ alcanza un máximo en $\left(\dfrac{2\pi}{3}, \dfrac{\sqrt{3}}{3}\right)$ y, por simetría, un mínimo en $\left(-\dfrac{2\pi}{3}, -\dfrac{\sqrt{3}}{3}\right)$.

c) $f''(x) = 0$ si sen $x = 0$ o $\cos x - 1 = 0$

Puntos de inflexión $(0, 0)$, $(\pi, 0)$, $(-\pi, 0)$.

d)



4. a) $f'(x) = \dfrac{-e^{-ax}(ax + a + 1)}{(1+x)^2} = \dfrac{-ae^{-ax}\left(x + \dfrac{a+1}{a}\right)}{(1+x)^2}$

se anula si $x = -\dfrac{a+1}{a}$; además,

$\begin{cases} x < -\dfrac{a+1}{a} \Rightarrow f'(x) > 0 \\ x > -\dfrac{a+1}{a} \Rightarrow f'(x) < 0 \end{cases}$; por tanto,

$f(x)$ alcanza un máximo en $x = -\dfrac{a+1}{a}$

b) Dominio $\mathbf{R} - \{-1\}$, $\lim\limits_{x\to -1^-} f(x) = -\infty$ y $\lim\limits_{x\to -1^+} f(x) = \infty$,

$x = -1$ es una asíntota vertical.

$y = 0$ es asíntota horizontal si $x \longrightarrow \infty$

Cuando $x \longrightarrow -\infty$ hay rama parabólica, ya que:

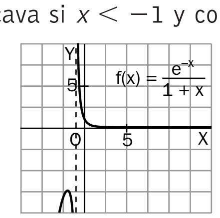
$\lim\limits_{x\to -\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to \infty} \dfrac{e^{-ax}}{(1+x)} = \lim\limits_{x\to \infty} (-ae^{-ax}) = -\infty$

$\lim\limits_{x\to -\infty} \dfrac{f(x)}{x} = \lim\limits_{x\to \infty} \dfrac{e^{-ax}}{(1+x)\,x} = \lim\limits_{x\to \infty} \dfrac{-ae^{-ax}}{(1+2x)} =$

$= \lim\limits_{x\to \infty} \dfrac{a^2 e^{-ax}}{2} = \infty$

c) Máximo: $(-2, -e^2)$, $f''(x) = \dfrac{e^{-x}(x^2 + 4x + 5)}{(1+x)^3}$;

$f(x)$ es cóncava si $x < -1$ y convexa si $x > -1$.



17 y 18 Integrales indefinidas. Métodos de integración

1. Calcula la siguiente integral indefinida: $\int x^2 \cdot \cos^2 x \, dx$

2. Calcula la siguiente integral indefinida: $\int x \cdot \text{arcsen}\, x \, dx$

3. Calcula la siguiente integral indefinida: $\int \text{sen}^2 x \cdot \cos^2 x \, dx$

4. Calcula la siguiente integral indefinida: $\int \cos^5 x \, dx$

5. Calcula la siguiente integral indefinida: $\int x^n \cdot \text{L}x \, dx$

6. Calcula la siguiente integral indefinida: $\int x^3 \cdot 3^x \, dx$

7. Utiliza el cambio de variable $x = 1 - t^6$ para obtener todas las primitivas de la función:

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x} - \sqrt[3]{1-x}}$$

8. Busca un cambio de variable adecuado y calcula la integral indefinida: $\int 3^{\sqrt{2x+1}} \, dx$

9. Halla todas las primitivas de la función $f(x) = \dfrac{1}{1 + \cos x}$ empleando el siguiente cambio de variable: $\text{tg}\, \dfrac{x}{2} = t$

10. Para integrar funciones de la forma $\dfrac{f(x)}{g(x)} = \dfrac{a_1 \text{ sen } x + b_1 \cos x}{a_2 \text{ sen } x + b_2 \cos x}$ deben encontrarse las constantes A y B que cumplen la condición $f(x) = Ag(x) + Bg'(x)$. Así se obtiene:

$$\int \frac{a_1 \text{ sen } x + b_1 \cos x}{a_2 \text{ sen } x + b_2 \cos x} dx = \int \frac{f(x)}{g(x)} dx = \int \left(A + B\frac{g(x)}{g'(x)}\right) dx = Ax + BL\,|g(x)| + C =$$

$$= Ax + BL\,|a_2 \text{ sen } x + b_2 \cos x| + C$$

Aplica el procedimiento anterior para calcular la siguiente integral indefinida:

$$\int \frac{\text{sen } x - \cos x}{\text{sen } x + 2 \cos x} dx$$

SOLUCIONES

Nota: Siguiendo el criterio del libro, la constante C se sobrentiende, por lo que solo se escribe cuando se pide su valor.

1. $u = x^2$, $dv = \cos^2 x\, dx \Rightarrow du = 2x\, dx$,

$v = \int \cos^2 x\, dx = \int \frac{1 + \cos 2x}{2} dx =$

$= \frac{1}{2} x + \frac{1}{4} \operatorname{sen} 2x$, $I = x^2 \left[\frac{1}{2} x + \frac{1}{4} \operatorname{sen} 2x\right] -$

$- \int 2x \left(\frac{1}{2} x + \frac{1}{4} \operatorname{sen} 2x\right) dx = \frac{x^3}{2} + \frac{x^2 \operatorname{sen} 2x}{4} -$

$- \int x^2\, dx - \frac{1}{2} \int x \operatorname{sen} 2x\, dx$

calculando por partes la última integral, se obtiene:

$I = \frac{x^3}{2} + \frac{x^2 \operatorname{sen} 2x}{4} - \frac{x^3}{3} + \frac{x \cos 2x}{4} - \frac{\operatorname{sen} 2x}{8}$

2. $u = \operatorname{arcsen} x$, $dv = x dv \Rightarrow du = \frac{dx}{\sqrt{1 - x^2}}$, $v = \frac{x^2}{2}$

$I = \frac{x^2}{2} \operatorname{arcsen} x - \frac{1}{2} \int \frac{x^2}{\sqrt{1 - x^2}} dx$; hacemos un cambio de variable para calcular la nueva integral J: $x = \operatorname{sen} t$, $dx = \cos t \cdot dt$

$J = \int \frac{\operatorname{sen}^2 t}{\cos t} \cos t\, dt = \int \operatorname{sen}^2 t\, dt = \int \frac{1 - \cos 2t}{2} dt =$

$= \frac{1}{2} t - \frac{1}{4} \operatorname{sen} 2t$, y por tanto:

$I = \frac{x^2}{2} \operatorname{arcsen} x - \frac{1}{4} \operatorname{arcsen} x + \frac{1}{8} \operatorname{sen} (2 \operatorname{arcsen} x)$

3. $I = \int (\operatorname{sen} x \cdot \cos x)^2\, dx = \int \left(\frac{\operatorname{sen} 2x}{2}\right)^2 dx =$

$= \frac{1}{4} \int \operatorname{sen}^2 2x\, dx = \frac{1}{4} \int \frac{1 - \cos 4x}{2} dx =$

$= \frac{1}{8} x - \frac{1}{32} \operatorname{sen} 4x$

4. $I = \int \cos x \cdot (1 - \operatorname{sen}^2 x)^2\, dx$, $t = \operatorname{sen} x$, $dt = \cos x\, dx$

$I = \int (1 - t^2)^2\, dt = \int (1 - 2t^2 + t^4)\, dt =$

$= t - \frac{2t^3}{3} + \frac{t^5}{5}$, deshaciendo el cambio

$I = \operatorname{sen} x - \frac{2 \operatorname{sen}^3 x}{3} + \frac{\operatorname{sen}^5 x}{5}$

5. $u = Lx$, $dv = x^n\, dx \Rightarrow du = \frac{1}{x} dx$, $v = \frac{x^{n+1}}{(n + 1)}$

$I = \frac{x^{n+1}}{n + 1} Lx - \int \frac{x^n}{n + 1} dx = \frac{x^{n+1}}{n + 1} Lx - \frac{x^{n+1}}{(n + 1)^2}$

6. Integrando por partes tres veces con el cambio $u = x^p$ $(p = 3, 2, 1)$, $dv = 3^x$, se obtiene:

$I = 3^x \left[\frac{x^3}{L3} - \frac{3x^2}{(L3)^2} + \frac{6x}{(L3)^3} - \frac{6}{(L3)^4}\right]$

7. $x = 1 - t^6 \Rightarrow dx = -6t^5\, dt$, $F(x) = \int f(x)\, dx =$

$= \int \frac{1}{\sqrt{t^6} - \sqrt[3]{t^6}} \cdot (-6t^5)\, dt = -6 \int \frac{t^5}{t^3 - t^2} dt =$

$= -6 \int \frac{t^3}{t - 1} dt$; efectuando la división entera:

$F(x) = -6 \int \left(t^2 + t^2 + 1 + \frac{1}{t - 1}\right) dt =$

$= -6 \left[\frac{t^3}{3} + \frac{t^2}{2} + t + L\,|\,t - 1\,|\right]$

$F(x) = -2\sqrt{1 - x} - 3\sqrt[3]{1 - x} - 6 \sqrt[6]{1 - x} -$

$-6\, L\,|\sqrt[6]{1 - x} - 1\,|$

8. Haciendo $t = \sqrt{2x + 1}$, $dt = \frac{2dx}{2\sqrt{2x + 1}} = \frac{1}{t} dx$

$I = \int t \cdot 3^t\, dt \Rightarrow du = dt$, $v = \frac{3^t}{L3}$

$I = t \frac{3^t}{L3} - \frac{3^t}{(L3)^2}$. Deshaciendo el cambio:

$I = \sqrt{2x + 1}\, \frac{3^{\sqrt{2x + 1}}}{L3} - \frac{3^{\sqrt{2x + 1}}}{(L3)^2}$

9. Empleando las identidades trigonométricas:

$1 + \operatorname{tg}^2 \alpha = \frac{1}{\cos^2 \alpha}$ y $\cos^2 \alpha = \frac{1 + \cos 2\alpha}{2}$ con

$\alpha = \frac{x}{2}$, $\operatorname{tg} \frac{x}{2} = t$, $\cos x = \frac{1 - t^2}{1 + t^2}$, $dx = \frac{2}{1 + t^2} dt$;

$F(x) = \int f(x)\, dx = \int \frac{1}{1 + \frac{1 - t^2}{1 + t^2}} \cdot \frac{2}{1 + t^2} dt =$

$= \int dt = t = \operatorname{tg} \frac{x}{2}$

10. Buscamos A y B que verifiquen: $\operatorname{sen} x - \cos x =$ $= A(\operatorname{sen} x + 2 \cos x) + B(\cos x - 2 \operatorname{sen} x)$ $= (A - 2B) \operatorname{sen} x + (2A + B) \cos x$; debe ser $A - 2B = 1$, $2A + B = -1 \Rightarrow$

$\Rightarrow A = -\frac{1}{5}$, $B = -\frac{3}{5}$. Así: $\int \frac{\operatorname{sen} x - \cos x}{\operatorname{sen} x + 2 \cos x} dx =$

$= -\frac{1}{5} x - \frac{3}{5} L\,|\operatorname{sen} x + 2 \cos x\,|$

19 La integral definida

1. Calcula el valor de la integral $\int_{-\pi}^{\pi} x^2 \cos(nx)\, dx$ en función de los valores de n.

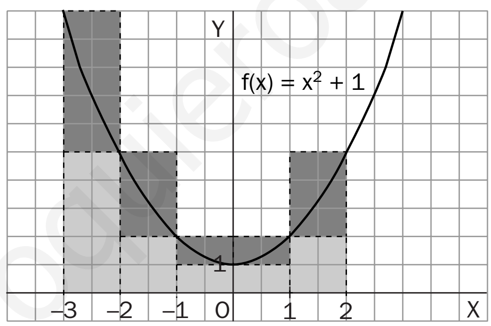
2. Sea $F(x) = \int_0^{\operatorname{sen} x} \operatorname{arcsen} t\, dt$. Calcula $F'(x)$.

3. Si $F(x) = \int_0^x \operatorname{sen} t^2\, dt$. Calcula:

a) $F'(x)$ b) $\lim_{x \to 0} \frac{1}{x^3} \int_0^x \operatorname{sen} t^2\, dt$

4. Calcula el siguiente límite: $\lim_{x \to 0} \dfrac{\int_0^x t^2\, \mathrm{L}(1 + 4t^2)\, dt}{x^5}$

5. Dada la función $f(x) = x^2 + 1$ definida en el intervalo $[-3, 2]$ y la partición P del mismo formada por los puntos $\{-3, -2, -1, 0, 1, 2\}$ tal y como aparece en la figura, calcula razonadamente cuánto valen la suma superior y la suma inferior correspondiente a dicha partición y a dicho intervalo.



6. Demuestra que $\frac{2}{3} \leqslant \int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{2 - x^2 + x}}$

(Indicación: Estudia el máximo de la función $\sqrt{2 - x^2 + x}$ en $(0, 1)$).

7. Sea f una función real de variable real, continua y positiva tal que $\int_0^x f(t)\, dt = e^x + \operatorname{arctg} x + a$. Aplicando el teorema fundamental del cálculo, determina el valor de la constante a y halla la expresión algebraica de $f(x)$.

8. Calcula el valor de las siguientes integrales definidas:

a) $\int_{-2}^{3} |x - 1|\, dx$ b) $\int_0^1 \frac{\sqrt{\operatorname{arctg} x}}{1 + x^2}$

9. a) Halla los máximos y mínimos, si es que existen, de la función $F(x) = \int_0^x \frac{1}{1 + 2\cos t}\, dt$

b) Calcula la derivada de la función $G(x) = \int_x^{x^2} \frac{1}{\operatorname{sen} t}\, dt$

SOLUCIONES

1. $I(n) = \int_{-\pi}^{\pi} x^2 \cos(nx)\,dx$; integrando por partes:

$$F(x) = \frac{x^2 \text{ sen } nx}{n} + \frac{2x \cos nx}{n^2} - \frac{2 \text{ sen } nx}{n^3}$$

Entonces: $I(n) = F(\pi) - F(-\pi) =$

$$= 2\left[\frac{\pi^2 \text{ sen } n\pi}{n} + \frac{2\pi \cos n\pi}{n^2} - \frac{2 \text{ sen } n\pi}{n^3}\right]$$

2. $F(x) = G(u) = \int_0^u \text{arcsen } t\,dt$, con $u = \text{sen } x$.

Entonces: $F'(x) = \frac{dF(x)}{dx} = \frac{dG(u)}{du}\frac{du}{dx} =$

$= \text{arcsen } u \cdot u'$

$F'(x) = \text{arcsen}(\text{sen } x) \cdot \cos x \Rightarrow F'(x) = x \cdot \cos x$

3. a) $F'(x) = \text{sen } x^2$

b) Es de la forma $\frac{0}{0}$. Aplicando la regla de L'Hôpital: $\lim_{x\to 0} \frac{F(x)}{x^3} = \lim_{x\to 0} \frac{F'(x)}{3x^2} = \lim_{x\to 0} \frac{\text{sen } x^2}{3x^2} = \frac{1}{3}$

4. Si $F(x) = \int_0^x t^2\,\text{L}(1 + 4t^2)\,dt$, $L = \lim_{x\to 0} \frac{F(x)}{x^5} = \frac{0}{0}$.

Aplicando la regla de L'Hôpital:

$L = \lim_{x\to 0} \frac{F'(x)}{5x^4}$, y como $F'(x) = x^2\,\text{L}(1 + 4x^2)$,

tendremos $L = \lim_{x\to 0} \frac{\text{L}(1 + 4x^2)}{5x^2} =$

$$= \lim_{x\to 0} \frac{8x}{(1 + 4x^2)\cdot 10x} = \lim_{x\to 0} \frac{8}{10(1 + 4x^2)} = \frac{4}{5}$$

5. La suma de las áreas de los rectángulos superiores es:

$S = 1 \cdot f(-3) + 1 \cdot f(-2) + 1 \cdot f(-1) + 1 \cdot f(1) + 1 \cdot f(2) = 10 + 5 + 2 + 2 + 5 = 24$

La suma de las áreas de los rectángulos inferiores es:

$s = 1 \cdot f(-2) + 1 \cdot f(-1) + 1 \cdot f(0) + 1 \cdot f(0) + 1 \cdot f(1) = 5 + 2 + 1 + 1 + 2 = 11$

6. El máximo de la función $\sqrt{2 - x^2 + x}$ es $\left(\frac{1}{2}, \frac{3}{2}\right)$. Por tanto, $\sqrt{2 - x^2 + x} \leqslant \frac{3}{2}$ en $(0, 1)$; es decir, $\frac{1}{\sqrt{2 - x^2 + x}} \geqslant \frac{2}{3} \Rightarrow$

$$\Rightarrow \int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{2 - x^2 + x}} \geqslant \int_0^1 \frac{2}{3}\,dx = \frac{2}{3}$$

$$\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{2 - x^2 + x}} \geqslant \frac{2}{3}$$

7. Sustituyendo $x = 0$ en la expresión:

$$\int_0^0 f(t)\,dt = e^0 + \text{arctg } 0 + a = 0 \Rightarrow$$

$\Rightarrow 1 + a = 0 \Rightarrow a = -1$

Según el teorema a fundamental del cálculo, se tiene que:

$$\frac{d}{dx}\int_0^x f(t)\,dt = f(x) = e^x + \frac{1}{1 + x^2}$$

8. $|x - 1| = \begin{cases} x - 1 \text{ si } x \geqslant 1 \\ 1 - x \text{ si } x < 1 \end{cases}$

$$\int_{-2}^{3} |x - 1|\,dx = \int_{-2}^{1} (1 - x)\,dx + \int_{1}^{3} (x - 1)\,dx =$$

$$= \frac{9}{2} + 2 = \frac{13}{2}$$

$$\int_0^1 \frac{\sqrt{\text{arctg } x}}{1 + x^2}\,dx = \int_0^1 \frac{1}{1 + x^2}(\text{arctg } x)^{\frac{1}{2}}\,dx =$$

$$= \left[\frac{(\text{arctg } x)^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}}\right]_0^1 = \frac{\left(\frac{\pi}{4}\right)^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}} = \frac{2}{3}\sqrt{\frac{\pi^3}{64}} = \frac{\pi^{\frac{3}{2}}}{12}$$

9. a) $F'(x) = \frac{1}{1 + 2\cos x}$

Esta función derivada no se anula en ningún punto. La función no tiene máximos ni mínimos.

b) Sea $H(t)$ una primitiva de $g(t) = \frac{1}{\text{sen } t}$.

Por la regla de Barrow:

$G(x) = H(x^2) - H(x) \Rightarrow$

$\Rightarrow G'(x) = 2x \cdot H'(x^2) - H'(x)$

Como $H'(x) = \frac{1}{\text{sen } x} \Rightarrow$

$$\Rightarrow G'(x) = \frac{2x}{\text{sen } x^2} - \frac{1}{\text{sen } x}$$

20 Aplicaciones de la integral definida

1. Se considera la función $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$.

a) ¿Qué valores deben tomar a, b, c y d para que posea un máximo en el punto (1, 2), y un mínimo en el punto (−1, −2)?

b) ¿Tiene esta función algún punto de inflexión? En caso afirmativo, determina la ecuación de la recta tangente a la curva en ese punto.

c) Calcula el valor del área de la región limitada por la gráfica de la función $f(x)$ y el eje de abscisas.

2. Calcula el valor de a sabiendo que la parábola $y = ax^2$ y la cúbica $y = x^3$ se cortan en el primer cuadrante encerrando una región limitada de área igual a $\frac{2}{3}a$.

3. Dadas las funciones siguientes:

$$f(x) = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ -1 & x & 1 & 1 \\ -1 & -1 & x & 1 \\ -1 & -1 & -1 & x \end{vmatrix} \qquad g(x) = \cos\left(\frac{\pi}{2}x\right)$$

a) Halla $f(x)$.

b) Calcula el valor del área de la figura encerrada por las curvas $y = f(x)$ e $y = g(x)$.

4. Halla el volumen engendrado por la región limitada por las parábolas $y = x^2$ y $x = y^2$ al girar alrededor del eje de abscisas.

5. Calcula el volumen del sólido de revolución determinado por la región comprendida entre las rectas $x = 0$ y $x = 2$ y las curvas $f(x) = (x - 2)^2$ y $g(x) = x^2$, al girar alrededor del eje OX.

6. Calcula el valor de a sabiendo que el área del recinto plano limitado por las gráficas de las funciones $f(x) = \sqrt{x + 1}$ y $g(x) = ax + a$ es igual a una unidad cuadrada.

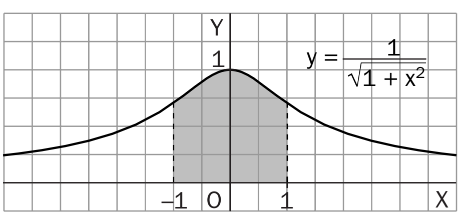
7. Se considera la parábola de ecuación $y = \frac{1}{4}x^2 - x - 1$ y la recta de ecuación $y = -\frac{3}{4}x + a$:

a) Encuentra el valor de a para que uno de los puntos de corte de la parábola y la recta sea el (4, −1).

b) Para el valor hallado, encuentra todos los puntos de corte de ambas funciones.

c) Para este mismo valor, representa gráficamente la parábola y la recta y calcula el área de la región limitada por las dos funciones.

8. Calcula el volumen del sólido de revolución que se obtiene al girar la región plana limitada por la gráfica de la función $f(x) = \frac{1}{\sqrt{1 + x^2}}$ y las rectas $x = 1$ y $x = -1$.



9. Cuando el caudal que mana de un grifo es una función cualquiera del tiempo, el volumen arrojado a lo largo de un cierto intervalo de tiempo coincide con el área limitada por la función caudal y el eje de abscisas y, por tanto, se puede calcular con la ayuda de una integral definida.

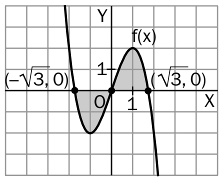
Se considera la función $c = 4 + t \cdot (t + 2)$ que representa el caudal que mana de un caño, donde c se mide en litros/minuto y t en minutos. Calcula el volumen que se consigue recoger en un pilón desde el instante $t = 0$ hasta el $t = 20$ minutos.

SOLUCIONES

1. a) $f'(x) = 3ax^2 + 2bx + c$. Resolviendo el sistema: $f(1) = 2$, $f(-1) = -2$, $f'(1) = 0$ y $f'(-1) = 0$; obtenemos $a = -1$, $b = 0$, $c = 3$ y $d = 0$, es decir, $f(x) = x^3 + 3x$.

b) $f''(x) = 6x \Rightarrow$ (0, 0) es un punto de inflexión. La recta tangente en él es $y = 3x$.

c)



$$A = -\int_{-\sqrt{3}}^{0} (x^3 + 3x)\,dx + \int_{0}^{\sqrt{3}} (x^3 + 3x)\,dx =$$

$$= \frac{27}{2} = 13{,}5 \text{ uc}$$

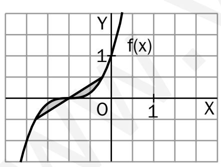
2. La parábola y la cúbica se cortan en (0, 0) y (a, 0), y en el intervalo (0, a) la parábola alcanza mayor valor que la cúbica. Por tanto:

$$A = \int_0^a (ax^2 - x^3)\,dx = \frac{a^4}{12}. \text{ Igualando } \frac{a^4}{12} = \frac{2a}{3}$$

obtenemos como solución $a = 2$.

3. a) Sumando a cada fila la primera fila:

$$f(x) = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & x+1 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & x+1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & x+1 \end{vmatrix} = (x+1)^3$$

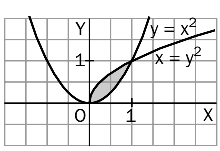


b) $$\text{Área} = \int_{-2}^{-1} \left((x+1)^3 - \cos\left(\frac{\pi}{2}x\right) \right) dx +$$

$$+ \int_{-1}^{0} \left(\cos\left(\frac{\pi}{2}x\right) - (x+1)^3 \right) dx = \frac{4}{\pi} - \frac{1}{2} \text{ uc}$$

4. Las funciones se cortan en (1, 1).

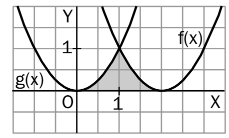
$$V = \int_0^1 \pi x\,dx - \int_0^1 \pi x^4\,dx = \frac{3}{10}\pi \text{ u. cúbicas.}$$



5. Las funciones se cortan en $x = 1$.
El volumen viene dado por:

$$V = [V(f, [0, 1]) - V(g, [0, 1])] +$$
$$+ [V(g, [1, 2]) - V(f, [1, 2])] \Rightarrow$$

$$\Rightarrow V = \int_0^1 \pi(x-2)^4\,dx =$$



$$= \int_0^1 \pi x^4\,dx + \int_1^2 \pi x^4\,dx -$$

$$- \int_1^2 \pi(x-2)^4\,dx = \frac{31}{5}\pi \text{ u. cúbicas.}$$

6. Los puntos de corte de las funciones f y g son:

$$\begin{cases} f(x) = \sqrt{x+1} \\ g(x) = ax + a \end{cases} \Rightarrow \sqrt{x+1} = a(x+1) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x + 1 = a^2(x+1)^2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow (x+1)\cdot(a^2(x+1) - 1) = 0 \Rightarrow \begin{cases} x = -1 \\ x = \dfrac{1}{a^2} - 1 \end{cases}$$

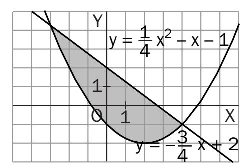
El área del recinto sería:

$$S = \int_{-1}^{\frac{1}{a^2}-1} (\sqrt{x+1} - (ax+a))\,dx = \frac{1}{6a^3} \text{ uc}$$

$$\text{Por tanto: } \frac{1}{6a^3} = 1 \Rightarrow a = \sqrt[3]{\frac{1}{6}}$$

7. a) $-1 = -\dfrac{3}{4}\cdot 4 + a \Rightarrow a = 2$

b) $$\begin{cases} y = \dfrac{1}{4}x^2 - x - 1 \\ y = -\dfrac{3}{4}x + 2 \end{cases} \Rightarrow$$



$$\Rightarrow \frac{1}{4}x^2 - x - 1 = -\frac{3}{4}x + 2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x^2 - x - 12 = 0 \Rightarrow \begin{cases} x = -3 \; y = \dfrac{17}{4} \\ x = 4 \; y = -1 \end{cases}$$

Los puntos de corte son $\left(-3, \dfrac{17}{4}\right)$ y (4, −1)

c) $$S = \int_{-3}^{4} \left| \left(-\frac{3}{4}x + 2\right) - \left(\frac{1}{4}x^2 - x - 1\right) \right| dx =$$

$$= \int_{-3}^{4} \left(-\frac{1}{4}x^2 + \frac{1}{4}x + 3 \right) dx = \left[-\frac{x^3}{12} + \frac{x^2}{8} + 3x \right]_{-3}^{4} =$$

$$= \left(-\frac{16}{3} + 2 + 12\right) - \left(\frac{9}{4} + \frac{9}{8} - 9\right) = \frac{26}{3} + \frac{45}{8} = \frac{343}{24} \text{ uc}$$

8. Al ser un volumen de revolución:

$$V = 2\pi \int_0^1 \left(\frac{1}{\sqrt{1+x^2}} \right)^2 dx = 2\pi \int_0^1 \frac{1}{1+x^2}\,dx =$$

$$= 2\pi \cdot [\text{arctg } x]_0^1 = 2\pi \cdot \frac{\pi}{4} = \frac{\pi^2}{2} \text{ unidades cúbicas}$$

9. $$V = \int_0^{20} (t^2 + 2t + 4)\,dt = \left[\frac{t^3}{3} + t^2 + 4t \right]_0^{20} =$$

$$= \frac{8\,000}{3} + 400 + 80 \approx 3\,146{,}7 \text{ litros.}$$