1 Matrices

1. Calcula los valores de las letras para que las siguientes matrices sean iguales:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & a & -2 & -b \\ 2 + c & -3 & d + 1 & 5 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} e & -3 & 1 - f & 5 \\ -3 & 2 + 5g & -6 & 3h - 1 \end{pmatrix}$$

2. Dadas la matriz fila $A = (1 \quad 2 \quad 3 \quad 4)$ y la matriz columna $B = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 5 \\ 7 \end{pmatrix}$

a) Calcula $A \cdot B$.

b) Calcula $B \cdot A$.

3. Dadas las matrices $A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 \\ 0 & 3 & -2 \\ 0 & -4 & 2 \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} 2 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & -2 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$

a) Calcula $A + B$, $A - B$ y $2A - 3B$.

b) Calcula $A \cdot B$ y $B \cdot A$.

4. Dadas las matrices $I = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ y $A = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 3 & -4 \end{pmatrix}$

a) Calcula A^2, A^3 y A^4.

b) Calcula $A^2 - 3A + 2I$.

5. Dada la matriz $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 3 & -1 \end{pmatrix}$

a) Calcula la matriz inversa de A.

b) Calcula la matriz X que verifica la ecuación $AX = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -3 & 4 \end{pmatrix}$

6. Calcula las matrices X e Y que verifican el siguiente sistema de ecuaciones matriciales:

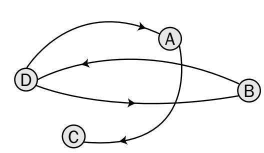
$$\begin{cases} X + 2Y = \begin{pmatrix} -1 & 10 \\ -1 & -3 \end{pmatrix} \\ 2X + 3Y = \begin{pmatrix} -1 & 16 \\ -2 & -3 \end{pmatrix} \end{cases}$$

7. Calcula el rango de las matrices:

a) $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -1 & 2 & 3 \\ -1 & -2 & -3 \end{pmatrix}$

b) $B = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 4 & -5 & 3 \\ -3 & 6 & 8 & -3 & 0 \\ -2 & 5 & 12 & -8 & 3 \end{pmatrix}$

8. En cierta zona de montaña existen cuatro refugios, A, B, C y D, que están comunicados por sendas según se establece en el siguiente grafo:



Ten en cuenta que, debido a su pendiente, el recorrido en alguno de los sentidos de ciertas sendas carece de interés para los deportistas.

a) Forma la matriz M asociada al grafo.

b) Calcula la matriz M^2 e interpreta los resultados.

SOLUCIONES

1. Si $A = B$ entonces:

$$\begin{matrix} 1=e & a=-3 & -2=1-f & -b=5 \\ 2+c=-3 & -3=2+5g & d+1=-6 & 5=3h-1 \end{matrix} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} e=1 & a=-3 & f=3 & b=-5 \\ c=-5 & g=-1 & d=-7 & h=2 \end{cases}$$

2. a) $A \cdot B = (1\ 2\ 3\ 4) \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 5 \\ 7 \end{pmatrix} = (50)$

b) $B \cdot A = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 5 \\ 7 \end{pmatrix} \cdot (1\ 2\ 3\ 4) = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 6 & 9 & 12 \\ 5 & 10 & 15 & 20 \\ 7 & 14 & 21 & 28 \end{pmatrix}$

3. a) $A + B = \begin{pmatrix} 3 & -2 & -1 \\ 0 & 2 & -4 \\ 1 & -2 & 5 \end{pmatrix}$

$A - B = \begin{pmatrix} -1 & -2 & 1 \\ 0 & 4 & 0 \\ -1 & -6 & -1 \end{pmatrix}$

$2A - 3B = \begin{pmatrix} -4 & -4 & 3 \\ 0 & 9 & 2 \\ -3 & -14 & -5 \end{pmatrix}$

b) $A \cdot B = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 3 \\ -2 & -7 & -12 \\ 2 & 8 & 14 \end{pmatrix}$

$B \cdot A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & -2 \\ 0 & 5 & -2 \\ 1 & -8 & 2 \end{pmatrix}$

4. a) $A^2 = \begin{pmatrix} -5 & 6 \\ -9 & 10 \end{pmatrix}$

$A^3 = \begin{pmatrix} 13 & -14 \\ 21 & -22 \end{pmatrix}$

$A^4 = \begin{pmatrix} -29 & 30 \\ -45 & 46 \end{pmatrix}$

b) $A^2 - 3A + 2I =$

$= \begin{pmatrix} -5 & 6 \\ -9 & 10 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 3 & -6 \\ 9 & -12 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} =$

$= \begin{pmatrix} -6 & 12 \\ -18 & 24 \end{pmatrix}$

5. a) $\left(\begin{array}{cc|cc} 2 & -1 & 1 & 0 \\ 3 & -1 & 0 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow[2F_2 - 3F_1]{} \left(\begin{array}{cc|cc} 2 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -3 & 2 \end{array}\right) \xrightarrow[F_1 + F_2]{}$

$\left(\begin{array}{cc|cc} 2 & 0 & -2 & 2 \\ 0 & 1 & -3 & 2 \end{array}\right) \xrightarrow[\frac{1}{2}F_1]{} \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & -3 & 2 \end{array}\right)$

b) $X = A^{-1} \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -3 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ -3 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -3 & 4 \end{pmatrix} =$

$= \begin{pmatrix} -4 & 6 \\ -9 & 14 \end{pmatrix}$

6.

$$\begin{cases} 2X + 4Y = \begin{pmatrix} -2 & 20 \\ -2 & -6 \end{pmatrix} \\ -2X - 3Y = \begin{pmatrix} 1 & -16 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{matrix} Y = \begin{pmatrix} -1 & 4 \\ 0 & -3 \end{pmatrix} \\ X = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 3 \end{pmatrix} \end{matrix}$$

7. a) $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -1 & 2 & 3 \\ -1 & -2 & -3 \end{pmatrix} \xrightarrow[\substack{F_2 + F_1 \\ F_3 + F_1}]{} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 4 & 6 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow$

$\Rightarrow$ rango $A = 2$

b) $B = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 4 & -5 & 3 \\ -3 & 6 & 8 & -3 & 0 \\ -2 & 5 & 12 & -8 & 3 \end{pmatrix} \xrightarrow[F_3 = F_1 + F_2]{}$

$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 4 & -5 & 3 \\ -3 & 6 & 8 & -3 & 0 \end{pmatrix}$

Como las dos filas que quedan no son proporcionales, se deduce que rango $B = 2$.

8. a) $M = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

b) $M^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$

Esta matriz expresa de qué forma se puede ir de un refugio a otro, o al mismo, pero pasando previamente por otro.

2 Determinantes

1. Calcula el valor de los siguientes determinantes de segundo orden:

a) $\begin{vmatrix} 1 & -3 \\ 5 & -2 \end{vmatrix}$ b) $\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{vmatrix}$ c) $\begin{vmatrix} -1 & 3 \\ 6 & 7 \end{vmatrix}$ d) $\begin{vmatrix} 1 & -2 \\ 5 & 8 \end{vmatrix}$

2. Aplicando la regla de Sarrus, calcula el valor de los siguientes determinantes de tercer orden:

a) $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{vmatrix}$ b) $\begin{vmatrix} -1 & 2 & -3 \\ 4 & -5 & 6 \\ 7 & 8 & -9 \end{vmatrix}$ c) $\begin{vmatrix} 1 & -3 & 0 \\ -5 & 7 & 1 \\ 2 & 4 & 6 \end{vmatrix}$ d) $\begin{vmatrix} -1 & 5 & 8 \\ 3 & -5 & 9 \\ 10 & -10 & 19 \end{vmatrix}$

3. Halla el valor de x en cada uno de los siguientes determinantes de segundo orden:

a) $\begin{vmatrix} -1 & 3 \\ x & 2 \end{vmatrix} = 0$ b) $\begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 4 & 4-x \end{vmatrix} = 2$ c) $\begin{vmatrix} x & -3 \\ 2x & 4 \end{vmatrix} = -5$ d) $\begin{vmatrix} 2-x & 3 \\ 5-x & 4 \end{vmatrix} = 0$

4. Halla el valor de x en cada uno de los siguientes determinantes de tercer orden:

a) $\begin{vmatrix} -1 & 0 & x \\ -2 & 5 & 6 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 0$ b) $\begin{vmatrix} x & 2x & 3x \\ 4 & -5 & 6 \\ -1 & 2 & -3 \end{vmatrix} = 48$ c) $\begin{vmatrix} 1-x & 2x-3 & 0 \\ 5 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & -3 \end{vmatrix} = -143$

5. Desarrolla cada uno de los determinantes siguientes por los elementos de la fila o columna que más ceros posea y, posteriormente, calcula su valor:

a) $\begin{vmatrix} 0 & 1 & 6 & 0 \\ 2 & 0 & 5 & 4 \\ 3 & 3 & 0 & 4 \\ 2 & 5 & 1 & 2 \end{vmatrix}$ b) $\begin{vmatrix} -1 & 2 & 0 & -3 \\ 4 & -3 & -1 & 2 \\ 1 & -2 & 0 & 2 \\ 3 & 2 & 3 & 1 \end{vmatrix}$

6. Calcula la inversa de las siguientes matrices:

$A = \begin{pmatrix} 1 & -3 \\ 2 & -7 \end{pmatrix}$ $B = \begin{pmatrix} 0 & -3 \\ 1 & 5 \end{pmatrix}$ $C = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 3 \\ 2 & -1 & 1 \\ 2 & 2 & -13 \end{pmatrix}$ $D = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 3 \\ 2 & 1 & 1 \\ -1 & 2 & -1 \end{pmatrix}$

7. Calcula el rango de las siguientes matrices:

$A = \begin{pmatrix} -1 & 3 & 2 \\ 2 & 4 & 0 \\ 2 & 2 & 2 \end{pmatrix}$ $B = \begin{pmatrix} -1 & 3 & 2 \\ 2 & 4 & 0 \\ 7 & -1 & -6 \end{pmatrix}$ $C = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 & -2 \\ 3 & 0 & -1 & 1 \\ 4 & -2 & 0 & 5 \end{pmatrix}$ $D = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ -1 & 0 & -1 & 0 \\ 3 & -4 & -1 & -8 \end{pmatrix}$

8. Resuelve la ecuación matricial $A \cdot X - B = C$ siendo:

$A = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ -2 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ $B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -4 & -5 & -6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix}$ $C = \begin{pmatrix} -1 & 0 & -1 \\ 2 & -2 & 2 \\ -3 & 0 & -3 \end{pmatrix}$

9. Calcula el rango de la matriz A para los diferentes valores del parámetro t: $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & t \\ 2 & 4 & t \\ t & 6 & 9 \end{pmatrix}$

SOLUCIONES

1. a) $-2 + 15 = 13$ b) $4 - 6 = -2$ c) $-7 - 18 = -25$ d) $8 + 10 = 18$

2. a) $45 + 96 + 84 - (105 + 48 + 72) = 0$

b) $-45 - 96 - 84 - (-105 - 48 - 72) = 0$

c) $42 - 0 - 6 - (0 + 4 + 90) = -58$

d) $95 - 240 + 450 - (-400 + 90 + 285) = 330$

3. a) $-2 - 3x = 0 \Rightarrow x = -\dfrac{2}{3}$

b) $4 - x - 12 = 2 \Rightarrow x = -10$

c) $4x + 6x = -5 \Rightarrow x = -\dfrac{1}{2}$

d) $8 - 4x - 15 + 3x = 0 \Rightarrow x = -7$

4. a) $-5 - 2x - 5x + 6 = 0 \Rightarrow x = \dfrac{1}{7}$

b) $15x + 24x - 12x - 15x - 12x + 24x = 48 \Rightarrow$
$\Rightarrow x = 2$

c) $-2 + 2x + 30x - 45 = -143 \Rightarrow x = -3$

5. a) $\begin{vmatrix} 0 & 1 & 6 & 0 \\ 2 & 0 & 5 & 4 \\ 3 & 3 & 0 & 4 \\ 2 & 5 & 1 & 2 \end{vmatrix} = (-1)\cdot\begin{vmatrix} 2 & 5 & 4 \\ 3 & 0 & 4 \\ 2 & 1 & 2 \end{vmatrix} + 6\cdot\begin{vmatrix} 2 & 0 & 4 \\ 3 & 3 & 4 \\ 2 & 5 & 2 \end{vmatrix} =$

$= -14 + 48 = 34$

b) $\begin{vmatrix} -1 & 2 & 0 & -3 \\ 4 & -3 & -1 & 2 \\ 1 & -2 & 0 & 2 \\ 3 & 2 & 3 & 1 \end{vmatrix} =$

$= -(-1)\cdot\begin{vmatrix} -1 & 2 & -3 \\ 1 & -2 & 2 \\ 3 & 2 & 1 \end{vmatrix} - 3\cdot\begin{vmatrix} -1 & 2 & -3 \\ 4 & -3 & 2 \\ 1 & -2 & 2 \end{vmatrix} =$

$= -8 - 15 = -23$

6.
- $A^{-1} = \dfrac{1}{|A|}(\text{adj } A)^t = -1 \cdot \begin{pmatrix} -7 & -2 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}^t =$

  $= \begin{pmatrix} 7 & -3 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$

- $B^{-1} = \dfrac{1}{|B|}(\text{adj } B)^t = \dfrac{1}{3}\cdot\begin{pmatrix} 5 & -1 \\ 3 & 0 \end{pmatrix}^t = \begin{pmatrix} \dfrac{5}{3} & 1 \\ -\dfrac{1}{3} & 0 \end{pmatrix}$

- $C^{-1} = \dfrac{1}{|C|}(\text{adj } C)^t = \dfrac{1}{1}\cdot\begin{pmatrix} 11 & 28 & 6 \\ -7 & -19 & -4 \\ 2 & 5 & 1 \end{pmatrix}^t =$

  $= \begin{pmatrix} 11 & -7 & 2 \\ 28 & -19 & 5 \\ 6 & -4 & 1 \end{pmatrix}$

- $D^{-1} = \dfrac{1}{|D|}(\text{adj } D)^t = \dfrac{1}{18}\cdot\begin{pmatrix} -3 & 1 & 5 \\ 6 & 4 & 2 \\ -3 & 7 & -1 \end{pmatrix}^t =$

  $= \begin{pmatrix} -\dfrac{1}{6} & \dfrac{1}{3} & -\dfrac{1}{6} \\ \dfrac{1}{18} & \dfrac{2}{9} & \dfrac{7}{18} \\ \dfrac{5}{18} & \dfrac{1}{9} & -\dfrac{1}{18} \end{pmatrix}$

7.
- $|A| = -28 \neq 0 \Rightarrow$ rango $A = 3$
- $|B| = 0$ y $\begin{vmatrix} -1 & 3 \\ 2 & 4 \end{vmatrix} = -10 \neq 0 \Rightarrow$ rango $B = 2$
- $|C| = \begin{vmatrix} 1 & -2 & -2 \\ 3 & 0 & 1 \\ 4 & -2 & 5 \end{vmatrix} = 36 \neq 0 \Rightarrow$ rango $C = 3$
- C_1 y C_2 son independientes y además:

$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -1 & 0 & -1 \\ 3 & -4 & -1 \end{vmatrix} = 0$ y $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 4 \\ -1 & 0 & 0 \\ 3 & -4 & -8 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow$
$\Rightarrow$ rango $D = 2$

8. $X = A^{-1}\cdot(C + B) =$

$= \begin{pmatrix} 1 & -\dfrac{1}{2} & -1 \\ 0 & \dfrac{1}{2} & 0 \\ 2 & -\dfrac{3}{2} & -1 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} 0 & 2 & 2 \\ -2 & -7 & -4 \\ 4 & 8 & 6 \end{pmatrix} =$

$= \begin{pmatrix} -3 & -\dfrac{5}{2} & -2 \\ -1 & -\dfrac{7}{2} & -2 \\ 2 & \dfrac{13}{2} & 4 \end{pmatrix}$

9. $|A| = -2t^2 + 6t = 0 \Rightarrow$

$\Rightarrow \begin{cases} t = 0 \Rightarrow \text{rango } A = 2 \\ t = 3 \Rightarrow \text{rango } A = 2 \end{cases}$

Para cualquier otro valor de t, el rango de la matriz es 3.

3 Resolución de sistemas de ecuaciones lineales

1. Resuelve los siguientes sistemas de dos ecuaciones lineales con dos incógnitas utilizando el método de Cramer:

a) $\begin{cases} 2x - 3y = 7 \\ 5x - 4y = 14 \end{cases}$ b) $\begin{cases} 5x + 2y = -23 \\ -2x + 4y = -10 \end{cases}$ c) $\begin{cases} -x + 3y = 15 \\ -5x - y = 27 \end{cases}$ d) $\begin{cases} \dfrac{2x}{3} - 3y = \dfrac{7}{3} \\ \dfrac{x}{2} - \dfrac{2y}{5} = \dfrac{21}{60} \end{cases}$

2. Resuelve los siguientes sistemas de tres ecuaciones lineales con tres incógnitas utilizando el método de Cramer:

a) $\begin{cases} x - 2y + 3z = 14 \\ -2x + y - 2z = -10 \\ 3x - 2y + 5z = 22 \end{cases}$ b) $\begin{cases} x - y - z = 3 \\ 2x - y + z = 0 \\ 3x + y + 2z = -1 \end{cases}$ c) $\begin{cases} 2x - 3y + 4z = 30 \\ -3x + y - 5z = -33 \\ -x - y + 3z = 15 \end{cases}$

3. Resuelve los siguientes sistemas aplicando el método de Gauss:

a) $\begin{cases} x - 2y - z = 3 \\ x - 4y + z = 11 \\ x + 3y - 2z = -9 \end{cases}$ b) $\begin{cases} x - 3y + 2z = 4 \\ 2x + y + 3z = 0 \\ -x - 3y + 3z = 7 \end{cases}$

4. Aplicando el teorema de Rouché, estudia la compatibilidad de cada uno de los siguientes sistemas e indica las soluciones en los casos en que existan:

a) $\begin{cases} 2x - y + 3z = -14 \\ 3x - y - z = -4 \\ -3x + 2y + 2z = 2 \end{cases}$ b) $\begin{cases} 2x - y + 3z = -14 \\ 3x - y - z = -4 \\ -x - y + 15z = -40 \end{cases}$

5. En un centro educativo se ofertan para los alumnos del segundo curso de Bachillerato las materias optativas de Tecnología de la Información, Francés y Geología; cada alumno debe cursar dos y solo dos de estas materias. Se sabe que en una clase, en la que hay un total de 35 alumnos, 28 estudian Tecnología de la Información y 15 estudian Francés.

a) Plantea un sistema de ecuaciones lineales que permita averiguar cuántos alumnos de ese grupo estudian Tecnología de la Información y Francés, cuántos estudian Tecnología de la Información y Geología y cuántos estudian Francés y Geología.

b) Indica el número de alumnos que estudian Geología.

6. Elena compró cuatro lapiceros y seis gomas de borrar y pagó 1,60 euros; Javier compró cinco lapiceros y tres bolígrafos y pagó 2,45 euros, y Julio pagó 1,30 euros por cinco gomas de borrar y dos bolígrafos.

a) Averigua el precio de cada uno de los materiales de papelería mencionados.

b) ¿Cuánto deberá pagar Ana por cinco lapiceros, cinco gomas de borrar y diez bolígrafos?

7. a) Calcula el valor de a para que el siguiente sistema de ecuaciones lineales sea compatible indeterminado y expresa, para este valor, sus infinitas soluciones con ayuda de un parámetro.

$$\begin{cases} 2x - 3y + z = 15 \\ x - 2y + z = 11 \\ x - z = a \end{cases}$$

b) ¿Existe algún valor real de a para el cual el sistema anterior sea compatible determinado?

SOLUCIONES

1. a) $x = \dfrac{\begin{vmatrix} 7 & -3 \\ 14 & -4 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 2 & -3 \\ 5 & -4 \end{vmatrix}} = 2 \qquad y = \dfrac{\begin{vmatrix} 2 & 7 \\ 5 & 14 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 2 & -3 \\ 5 & -4 \end{vmatrix}} = -1$

b) $x = \dfrac{\begin{vmatrix} -23 & 2 \\ -10 & 4 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 5 & 2 \\ -2 & 4 \end{vmatrix}} = -3 \qquad y = \dfrac{\begin{vmatrix} 5 & -23 \\ -2 & -10 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 5 & 2 \\ -2 & 4 \end{vmatrix}} = -4$

c) $x = \dfrac{\begin{vmatrix} 15 & 3 \\ 27 & -1 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} -1 & 3 \\ -5 & -1 \end{vmatrix}} = -6 \qquad y = \dfrac{\begin{vmatrix} -1 & 15 \\ -5 & 27 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} -1 & 3 \\ -5 & -1 \end{vmatrix}} = 3$

d) $x = \dfrac{\begin{vmatrix} \frac{7}{3} & -3 \\ \frac{21}{60} & -\frac{2}{5} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} \frac{2}{3} & -3 \\ \frac{1}{2} & -\frac{2}{5} \end{vmatrix}} = \dfrac{7}{74} \qquad y = \dfrac{\begin{vmatrix} \frac{2}{3} & \frac{7}{3} \\ \frac{1}{2} & \frac{21}{60} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} \frac{2}{3} & -3 \\ \frac{1}{2} & -\frac{2}{5} \end{vmatrix}} = -\dfrac{28}{37}$

2. a) $x = \dfrac{\begin{vmatrix} 14 & -2 & 3 \\ -10 & 1 & -2 \\ 22 & -2 & 5 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & -2 & 3 \\ -2 & 1 & -2 \\ 3 & -2 & 5 \end{vmatrix}} = 1 \quad y = \dfrac{\begin{vmatrix} 1 & 14 & 3 \\ -2 & -10 & -2 \\ 3 & 22 & 5 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & -2 & 3 \\ -2 & 1 & -2 \\ 3 & -2 & 5 \end{vmatrix}} = -2$

$z = \dfrac{\begin{vmatrix} 1 & -2 & 14 \\ -2 & 1 & -10 \\ 3 & -2 & 22 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & -2 & 3 \\ -2 & 1 & -2 \\ 3 & -2 & 5 \end{vmatrix}} = 3$

b) $x = 1, \quad y = 0, \quad z = -2$

c) $x = 2, \quad y = -2, \quad z = 5$

3. a) $\left\{ \begin{aligned} x - 2y - z &= 3 \\ -y + z &= 4 \\ 4z &= 8 \end{aligned} \right. \Rightarrow x = 1, y = -2, z = 2$

b) $\left\{ \begin{aligned} x - 3y + 2z &= 4 \\ 7y - z &= -8 \\ 29z &= 29 \end{aligned} \right. \Rightarrow x = -1, y = -1, z = 1$

4. a) $M = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 3 \\ 3 & -1 & -1 \\ -3 & 2 & 2 \end{pmatrix} \qquad M^* = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 3 & -14 \\ 3 & -1 & -1 & -4 \\ -3 & 2 & 2 & 2 \end{pmatrix}$

rango M = rango M^* = 3 $\Rightarrow$
$\Rightarrow$ El sistema es compatible determinado.

La solución única es: $x = -2$, $y = 1$, $z = -3$

b) $M = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 3 \\ 3 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & 15 \end{pmatrix} \qquad M^* = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 3 & -14 \\ 3 & -1 & -1 & -4 \\ -1 & -1 & 15 & -40 \end{pmatrix}$

rango M = 2, rango M^* = 3 $\Rightarrow$
$\Rightarrow$ El sistema es incompatible.

5. a) Sea x el número de alumnos que estudian Tecnología de la Información y Francés, y el número de alumnos que estudian Tecnología de la Información y Geología, y z el número de alumnos que estudian Francés y Geología.

$\left\{ \begin{aligned} x + y + z &= 35 \\ x + y &= 28 \\ x + z &= 15 \end{aligned} \right. \Rightarrow x = 8, \ y = 20, \ z = 7$

b) El número de alumnos que estudian Geología es: $y + z = 27$

6. a) Sea x el precio de cada lapicero, y el de cada goma de borrar y z el de cada bolígrafo.

$\left\{ \begin{aligned} 4x + 6y &= 1{,}60 \\ 5x + 3z &= 2{,}45 \\ 5y + 2z &= 1{,}30 \end{aligned} \right. \Rightarrow \left\{ \begin{aligned} x &= 0{,}25 \\ y &= 0{,}10 \\ z &= 0{,}40 \end{aligned} \right.$

b) Ana debe pagar:
$5 \cdot 0{,}25 + 5 \cdot 0{,}10 + 10 \cdot 0{,}40 = 5{,}75$ euros

7. a) $M = \begin{pmatrix} 2 & -3 & 1 \\ 1 & -2 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix} \qquad M^* = \begin{pmatrix} 2 & -3 & 1 & 15 \\ 1 & -2 & 1 & 11 \\ 1 & 0 & -1 & a \end{pmatrix}$

rango M = 2 $\Rightarrow$ El sistema es compatible indeterminado cuando el rango de M^* también es 2, y para ello se debe verificar que:

$\begin{vmatrix} 2 & -3 & 15 \\ 1 & -2 & 11 \\ 1 & 0 & a \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow a = -3$

Las infinitas soluciones se pueden expresar de la forma:
$x = -3 + t, \ y = -7 + t, \ z = t$

b) Es imposible, ya que el rango de M es siempre 2.

4 Curvas en el plano: Lugares geométricos

1. Escribe las ecuaciones implícita y explícita de la recta cuyas ecuaciones paramétricas son:

$$\begin{cases} x = 2t - 1 \\ y = 4 - 3t \end{cases}$$

2. Escribe la ecuación implícita de la circunferencia cuyas ecuaciones paramétricas son:

$$\begin{cases} x = 1 + 2\cos t \\ y = -2 + 2\,\text{sen}\, t \end{cases}$$

3. Escribe las ecuaciones paramétricas de la recta $2x - 3y + 4 = 0$.

4. Escribe las ecuaciones paramétricas de la circunferencia $2x^2 + 2y^2 - 3 = 0$.

5. Halla la ecuación implícita de la elipse cuyas ecuaciones paramétricas son:

$$\begin{cases} x = 2\cos t \\ y = 4\,\text{sen}\, t \end{cases}$$

6. Halla la ecuación implícita de la hipérbola cuyas ecuaciones paramétricas son:

$$\begin{cases} x = \dfrac{2}{\cos t} \\ y = 4\,\text{tg}\, t \end{cases}$$

7. Escribe las ecuaciones implícita y explícita de la parábola cuyas ecuaciones paramétricas son:

$$\begin{cases} x = t \\ y = 2t^2 - 3t + 2 \end{cases}$$

8. Escribe las ecuaciones paramétricas de la elipse $9x^2 + 4y^2 - 36 = 0$.

9. Escribe las ecuaciones paramétricas de la hipérbola $25x^2 - 144y^2 - 3\,600 = 0$.

10. Escribe las ecuaciones paramétricas de la parábola $y = 2x^2 - 5x + 10$.

11. Pasa a coordenadas polares los puntos $A\left(2, \dfrac{\pi}{4}\right)$ y $B(3, -3)$.

12. Pasa a coordenadas cartesianas los puntos $A\left(2, \dfrac{\pi}{4}\right)$ y $B\left(2, \dfrac{3\pi}{4}\right)$.

13. Determina la ecuación en coordenadas polares de la circunferencia $x^2 + y^2 = 36$.

14. Determina la ecuación en coordenadas rectangulares de la circunferencia $r = 8\cos\alpha$.

SOLUCIONES

1. Despejando t en las dos ecuaciones:

$$t = \frac{x+1}{2} = \frac{4-y}{3} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \text{Ecuación implícita: } 3x + 2y - 5 = 0 \\ \text{Ecuación explícita: } y = \dfrac{5-3x}{2} \end{cases}$$

2. Despejando sen t y cos t y calculando la suma de sus cuadrados, se obtiene:

$$\text{sen}^2\, t + \cos^2 t = \frac{(y+2)^2}{4} + \frac{(x-1)^2}{4} = 1 \Rightarrow$$

$\Rightarrow$ Ecuación implícita: $x^2 + y^2 - 2x + 4y + 1 = 0$

3. $\left.\begin{array}{l} \text{Punto: } P(-2,\ 0) \\ \text{Vector direccional: } \vec{u} = (3,\ 2) \end{array}\right\} \Rightarrow$

$\Rightarrow$ Ecuaciones paramétricas: $\begin{cases} x = -2 + 3t \\ y = 2t \end{cases}$

4. $2x^2 + 2y^2 - 3 = 0 \Rightarrow x^2 + y^2 = \dfrac{3}{2}$

Ecuaciones paramétricas: $\begin{cases} x = \sqrt{\dfrac{3}{2}} \cos t \\ y = \sqrt{\dfrac{3}{2}} \text{ sen } t \end{cases}$

5. Despejando sen t y cos t y realizando la suma de sus cuadrados, se obtiene:

$$\text{sen}^2\, t + \cos^2 t = \frac{y^2}{16} + \frac{x^2}{4} = 1 \Rightarrow$$

$\Rightarrow$ Ecuación implícita: $4x^2 + y^2 - 16 = 0$

6. Recordando las fórmulas fundamentales de trigonometría:

$$1 + \text{tg}^2\, t = \frac{1}{\cos^2 t} \Rightarrow 1 + \frac{y^2}{16} = \frac{x^2}{4} \Rightarrow$$

$\Rightarrow$ Ecuación implícita: $4x^2 - y^2 - 16 = 0$

7. Sustituyendo el valor de t:

$$\begin{cases} \text{Ecuación explícita:} & y = 2x^2 - 3x + 2 \\ \text{Ecuación implícita:} & 2x^2 - 3x - y + 2 = 0 \end{cases}$$

8. $9x^2 + 4y^2 - 36 = 0 \Rightarrow \dfrac{x^2}{2^2} + \dfrac{y^2}{3^2} = 1 \Rightarrow$

$\Rightarrow$ Ecuaciones paramétricas: $\begin{cases} x = 2 \cos t \\ y = 3 \text{ sen } t \end{cases}$

9. $25x^2 - 144y^2 - 3\,600 = 0 \Rightarrow \dfrac{x^2}{12^2} - \dfrac{y^2}{5^2} = 1 \Rightarrow$

$\Rightarrow$ Ecuaciones paramétricas: $\begin{cases} x = 12 \sec t \\ y = \ \ 5 \text{ tg } t \end{cases}$

10. Las ecuaciones paramétricas de la parábola

$y = 2x^2 - 5x + 10$ son: $\begin{cases} x = t \\ y = 2t^2 - 5t + 10 \end{cases}$

11. $A(r, \alpha)$: $\begin{cases} r = \sqrt{x^2 + y^2} = \sqrt{3^2 + 3^2} = 3\sqrt{2} \\ \alpha = \text{arctg } \dfrac{y}{x} = \text{arctg } \dfrac{3}{3} = \dfrac{\pi}{4} \end{cases} \Rightarrow$

$\Rightarrow A\left(3\sqrt{2};\ \dfrac{\pi}{4}\right)$

$B(r, \alpha)$: $\begin{cases} r = \sqrt{x^2 + y^2} = \sqrt{3^2 + (-3)^2} = 3\sqrt{2} \\ \alpha = \text{arctg } \dfrac{y}{x} = \text{arctg } \dfrac{-3}{3} = \dfrac{7\pi}{4} \end{cases} \Rightarrow$

$\Rightarrow B\left(3\sqrt{2};\ \dfrac{7\pi}{4}\right)$

12. $A(x,\ y)$: $\begin{cases} x = r\cos\alpha = 2\cos\dfrac{\pi}{4} = \sqrt{2} \\ y = r \text{ sen } \alpha = 2 \text{ sen } \dfrac{\pi}{4} = \sqrt{2} \end{cases} \Rightarrow$

$\Rightarrow A(\sqrt{2},\ \sqrt{2})$

$B(x,\ y)$: $\begin{cases} x = r\cos\alpha = 2\cos\dfrac{3\pi}{4} = -\sqrt{2} \\ y = r \text{ sen } \alpha = 2 \text{ sen } \dfrac{3\pi}{4} = \sqrt{2} \end{cases} \Rightarrow$

$\Rightarrow B(-\sqrt{2},\ \sqrt{2})$

13. $(r\cos\alpha)^2 + (r \text{ sen } \alpha)^2 = 36 \Rightarrow$

$\Rightarrow r^2(\cos^2\alpha + \text{sen}^2\,\alpha) = 36$

Ecuación en polares $r = 6$

14. $\text{tg } \alpha = \dfrac{y}{x} \Rightarrow$

$$\Rightarrow \cos\alpha = \sqrt{\frac{1}{1 + \text{tg}^2\,\alpha}} = \sqrt{\frac{1}{1 + \dfrac{y^2}{x^2}}} = \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}}$$

La ecuación de la circunferencia en coordenadas polares es:

$$\sqrt{x^2 + y^2} = \frac{8x}{\sqrt{x^2 + y^2}} \Rightarrow x^2 + y^2 - 8x = 0$$

5 Los vectores del espacio

1. Efectúa las siguientes operaciones:

a) $(5, -3, 2) + (-3, -1, -1)$

b) $(-2, 4, 1) + (-1)\,[(2, -1, 2) + (-1)\,(-3, -4, 0)]$

c) $(-2)\,(3, -3, 3) + 3(-3, 3, 0) + (1, 0, -1)$

d) $3\,[2(-2, 3, 2) + (-2)\,(3, -4, 1)] + (-1, -2, 0)$

2. Dados los vectores $\vec{u} = (-2, 1, 0)$ y $\vec{v} = (-1, 1, 3)$, calcula:

a) Los módulos de $\vec{u}$ y de $\vec{v}$.

b) El producto escalar de $\vec{u}$ y $\vec{v}$.

c) La medida del ángulo que forman $\vec{u}$ y $\vec{v}$.

d) La proyección de $\vec{u}$ sobre $\vec{v}$.

e) La proyección de $\vec{v}$ sobre $\vec{u}$.

3. Dados los vectores $\vec{u} = (x, -3, 1)$ y $\vec{v} = (1 + x, 1, -3)$:

a) Calcula los posibles valores de x que hacen que los vectores $\vec{u}$ y $\vec{v}$ sean ortogonales.

b) Calcula el valor del producto escalar de $\vec{u}$ y $\vec{v}$ para $x = -1$.

4. Escribe un vector paralelo al que tiene por coordenadas $\vec{u} = (-1, 2, -2)$ y que sea unitario, es decir, que su módulo sea la unidad.

5. Escribe un vector paralelo al que tiene por origen el extremo del vector $\overrightarrow{OA} = (-1, 2, 0)$ y por extremo el extremo del vector $\overrightarrow{OB} = (2, 0, -1)$ y que, además, tenga por módulo 2 unidades de longitud.

6. Dados los vectores $\vec{u} = (-2, 1, 0)$ y $\vec{v} = (-1, 1, 2)$:

a) Calcula el producto vectorial $\vec{u} \times \vec{v}$.

b) Calcula el área del paralelogramo determinado por ambos vectores.

7. Dados los vectores $\vec{u} = (-2, 1, 0)$, $\vec{v} = (2, 2, -1)$ y $\vec{w} = (-1, 1, 2)$:

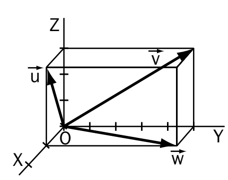
a) Calcula el producto mixto $[\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}]$.

b) Calcula el volumen del paralelepípedo determinado por los tres vectores.

8. Calcula los valores de x e y para que el vector $\vec{u} = (1 + x)\,\vec{i} + y\vec{j} - 2\vec{k}$ sea ortogonal a los vectores $\vec{v} = 2\vec{i} - \vec{j} + \vec{k}$ y $\vec{w} = 2\vec{j} + 3\vec{k}$.

9. Calcula los posibles valores de x que hacen que la proyección del vector $\vec{u} = (-1, 2, 2 - x)$ sobre el vector $\vec{v} = (1, x, 2)$ sea igual a la unidad.

10. Dada la figura:



a) Calcula las coordenadas de los vectores $\vec{u}$, $\vec{v}$ y $\vec{w}$.

b) Calcula el volumen del paralelepípedo determinado por los tres vectores.

SOLUCIONES

1. a) $(5 - 3, -3 - 1, 2 - 1) = (2, -4, 1)$

b) $(-2, 4, 1) - [(2, -1, 2) + (3, 4, 0)] =$
$= (-2, 4, 1) - (5, 3, 2) = (-7, 1, -1)$

c) $(-6, 6, -6) + (-9, 9, 0) + (1, 0, -1) =$
$= (-14, 15, -7)$

d) $3\,[(-4, 6, 4) + (-6, 8, -2)] + (-1, -2, 0) =$
$= 3\,(-10, 14, 2) + (-1, -2, 0) =$
$= (-30, 42, 6) + (-1, -2, 0) = (-31, 40, 6)$

2. a) $|\vec{u}| = \sqrt{(-2)^2 + 1^2 + 0^2} = \sqrt{5}$

$|\vec{v}| = \sqrt{(-1)^2 + 1^2 + 3^2} = \sqrt{11}$

b) $\vec{u} \cdot \vec{v} = (-2) \cdot (-1) + 1 \cdot 1 + 0 \cdot 3 = 3$

c) $\cos(\vec{u} \cdot \vec{v}) = \dfrac{\vec{u} \cdot \vec{v}}{|\vec{u}|\ |\vec{v}|} = \dfrac{3}{\sqrt{5} \cdot \sqrt{11}} = \dfrac{3}{\sqrt{55}}$

$(\widehat{\vec{u}, \vec{v}}) = \text{arccos}\dfrac{3}{\sqrt{55}} \approx 66°\ 8'\ 20''$

d) Proyección de $\vec{u}$ sobre $\vec{v} = \dfrac{\vec{u} \cdot \vec{v}}{|\vec{v}|} = \dfrac{3}{\sqrt{11}}$

e) Proyección de $\vec{v}$ sobre $\vec{u} = \dfrac{\vec{u} \cdot \vec{v}}{|\vec{u}|} = \dfrac{3}{\sqrt{5}}$

3. a) Como los vectores dados son no nulos, se verifica que $\vec{u}$ es ortogonal a $\vec{v} \iff \vec{u} \cdot \vec{v} = 0$

$\vec{u} \cdot \vec{v} = x(1 + x) - 3 - 3 = x^2 + x - 6 = 0$
$\Rightarrow x = 2,\ x = -3$

b) $\vec{u} = (-1, -3, 1)$ y $\vec{v} = (0, 1, -3) \Rightarrow$
$\Rightarrow \vec{u} \cdot \vec{v} = 0 - 3 - 3 = -6$

4. $|\vec{u}| = \sqrt{(-1)^2 + 2^2 + (-2)^2} = 3$

Uno de los dos vectores cuya dirección es la de $\vec{u}$ y cuyo módulo es 1 es:

$\vec{v} = \dfrac{\vec{u}}{|\vec{u}|} = \left(\dfrac{-1}{3}, \dfrac{2}{3}, \dfrac{-2}{3}\right)$

5. $\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{OB} \Rightarrow \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA} = (3, -2, 1)$

$|\overrightarrow{AB}| = \sqrt{3^2 + (-2)^2 + (-1)^2} = \sqrt{14}$

$\vec{v} = \dfrac{2\overrightarrow{AB}}{|\overrightarrow{AB}|} = \left(\dfrac{6}{\sqrt{14}}, \dfrac{-4}{\sqrt{14}}, \dfrac{2}{\sqrt{14}}\right)$

6. a) $\vec{u} \times \vec{v} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ -2 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 2 \end{vmatrix} = 2\vec{i} + 4\vec{j} - \vec{k} \Rightarrow$

$\Rightarrow \vec{u} \times \vec{v} = (2, 4, -1)$

b) $S = |\vec{u} \times \vec{v}| = \sqrt{2^2 + 4^2 + (-1)^2} =$
$= \sqrt{21} \approx 4{,}58$

7. a) $[\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}] = \begin{vmatrix} -2 & 1 & 0 \\ 2 & 2 & -1 \\ -1 & 1 & 2 \end{vmatrix} = -13$

b) $V = |\,[\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}]\,| = |-13| = 13$

8. a) $\vec{v} \times \vec{w} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 2 & -1 & 1 \\ 0 & 2 & 3 \end{vmatrix} = -5\vec{i} - 6\vec{j} + 4\vec{k} \Rightarrow$

$\Rightarrow \vec{v} \times \vec{w} = (-5, -6, 4) \Rightarrow$
$\Rightarrow \dfrac{1 + x}{-5} = \dfrac{y}{-6} = \dfrac{-2}{4} \Rightarrow$

$\Rightarrow x = \dfrac{3}{2},\ y = 3$

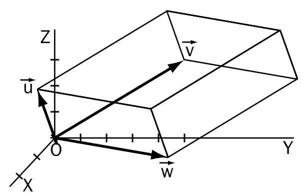
9. Proyección de $\vec{u}$ sobre $\vec{v} = \dfrac{\vec{u} \cdot \vec{v}}{|\vec{v}|} =$

$= \dfrac{-1 + 2x + 4 - 2x}{\sqrt{1 + x^2 + 4}} = 1 \Rightarrow$

$\Rightarrow \sqrt{x^2 + 5} = 3 \Rightarrow x^2 + 5 = 9 \Rightarrow$

$\Rightarrow x = 2,\ x = -2$

10.



a) $\vec{u} = (1, 0, 3)$, $\vec{v} = (0, 5, 3)$ y $\vec{w} = (1, 5, 0)$

b) $[\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}] = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 0 & 5 & 3 \\ 1 & 5 & 0 \end{vmatrix} = -15 - 15 = -30 \Rightarrow$

$\Rightarrow V = |\,[\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}]\,| = |-30| = 30$

6 Ecuaciones de rectas y planos

1. En cada uno de los siguientes casos calcula las coordenadas del vector libre, sabiendo que uno de sus representantes fijos tiene por origen el punto A y por extremo el punto B:

a) $A(2, 3, -1)$ y $B(4, 5, 2)$

b) $A(-1, 2, 0)$ y $B(4, -3, -2)$

2. a) Del vector $\overrightarrow{PQ} = (5, 3, -1)$ se sabe que $P(-1, 2, 3)$. Calcula las coordenadas del extremo Q.

b) Del vector $\overrightarrow{RS} = (-1, 3, -2)$ se sabe que $S(-2, 8, -1)$. Calcula las coordenadas del origen R.

3. Calcula las coordenadas del punto medio del segmento que tiene por extremos los puntos $A(2, 3, -2)$ y $B(-4, 3, -2)$.

4. Escribe las ecuaciones paramétricas y la ecuación en forma continua de la recta r que cumple las siguientes condiciones:

a) Pasa por el punto $A(-1, 3, -2)$ y tiene como dirección la del vector $\vec{u} = (-3, -2, 4)$.

b) Pasa por los puntos $A(-1, 2, 4)$ y $B(-3, 4, -7)$.

c) Pasa por el punto $A(-3, 4, 0)$ y su dirección es perpendicular a la de los vectores $\vec{u} = (-1, 2, -3)$ y $\vec{v} = (0, -2, 5)$.

5. Escribe las ecuaciones paramétricas y la ecuación general del plano α que cumple las siguientes condiciones:

a) Pasa por el punto $A(1, 2, -2)$ y tiene como vectores directores $\vec{u} = (-1, -2, 0)$ y $\vec{v} = (-1, 1, 2)$.

b) Pasa por los puntos $A(-1, 2, -1)$, $B(-1, 0, 3)$ y $C(-1, 2, 3)$.

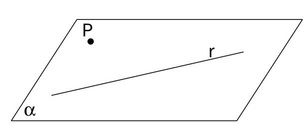
c) Pasa por el punto $A(-3, -2, 1)$ y uno de sus vectores normales es el $\vec{n} = (1, -2, -3)$.

6. Decide, en cada uno de los siguientes casos, si los puntos A, B y C están alineados o forman triángulo:

a) $A(1, 3, -1)$, $B(-1, 4, -3)$, $C(3, 2, 1)$

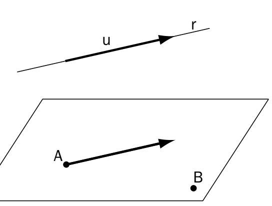
b) $A(1, 2, -2)$, $B(2, 0, 1)$, $C(0, 4, -4)$

7. Halla la ecuación del plano que pasa por el punto $P(-1, 1, 2)$ y contiene a la recta dada por la ecuación $r\colon \dfrac{x-1}{-2} = \dfrac{y-2}{-1} = z$



8. Halla la ecuación del plano que pasa por los puntos $A(-3, 2, 0)$ y $B(1, 0, -1)$ y que es paralelo a la recta que tiene por ecuaciones paramétricas

$$r\colon \begin{cases} x = -2 + t \\ y = t \\ z = -t \end{cases}$$



9. Calcula el valor de m para que los puntos del espacio $A(-1, m-1, 0)$, $B(0, m+2, 1)$ y $C(1, 5, 2)$ pertenezcan a una misma recta.

10. Calcula todos los valores de m que hacen que los puntos del espacio $A(0, 2, 2)$, $B(1, 1, m^2-1)$ y $C(2, 0, 2m)$ pertenezcan a una misma recta.

SOLUCIONES

1. a) $\overrightarrow{AB} = (4 - 2,\ 5 - 3,\ 2 + 1) = (2,\ 2,\ 3)$

b) $\overrightarrow{AB} = (4 + 1,\ -3 - 2,\ -2 + 0) = (5,\ -5,\ -2)$

2. a) $\vec{q} = \vec{p} + \overrightarrow{PQ} \Rightarrow$
$\Rightarrow \vec{q} = (-1,\ 2,\ 3) + (5,\ 3,\ -1) = (4,\ 5,\ 2) \Rightarrow$
$\Rightarrow Q\,(4,\ 5,\ 2)$

b) $\vec{r} = \vec{s} - \overrightarrow{RS} \Rightarrow$
$\Rightarrow \vec{r} = (-2, 8, -1) - (-1, 3, -2) = (-1, 5, 1) \Rightarrow$
$\Rightarrow R\,(-1,\ 5,\ 1)$

3.
$$\left.\begin{array}{l} x_m = \dfrac{1}{2}(2 - 4) = -1 \\[2ex] y_m = \dfrac{1}{2}(3 + 3) = 3 \\[2ex] z_m = \dfrac{1}{2}(-2 - 2) = -2 \end{array}\right\} \Rightarrow M\,(-1,\ 3,\ -2)$$

4. a)
$$\begin{cases} x = -1 - 3t \\ y = 3 - 2t \\ z = -2 + 4t \end{cases} \Rightarrow \frac{x + 1}{-3} = \frac{y - 3}{-2} = \frac{z + 2}{4}$$

b) Un vector director es $\overrightarrow{AB} = (-2,\ 2,\ -11) \Rightarrow$
$$\Rightarrow \begin{cases} x = -1 - 2t \\ y = 2 + 2t \\ z = 4 - 11t \end{cases} \Rightarrow$$
$$\Rightarrow \frac{x + 1}{-2} = \frac{y - 2}{2} = \frac{z - 4}{-11}$$

c) Un vector director es:
$$\vec{u} \times \vec{v} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ -1 & 2 & -3 \\ 0 & -2 & 5 \end{vmatrix} = 4\vec{i} + 5\vec{j} + 2\vec{k} \Rightarrow$$
$$\Rightarrow \begin{cases} x = -3 + 4t \\ y = 4 + 5t \\ z = 2t \end{cases} \Rightarrow \frac{x + 3}{4} = \frac{y - 4}{5} = \frac{z}{2}$$

5. a) $\det(\overrightarrow{AX},\ \vec{u},\ \vec{v}) = 0 \Rightarrow$
$$\Rightarrow \begin{vmatrix} x - 1 & y - 2 & z + 2 \\ -1 & -2 & 0 \\ -1 & 1 & 2 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow$$
$\Rightarrow 4x - 2y + 3z + 6 = 0$

b) $\det(\overrightarrow{AX},\ \overrightarrow{AB},\ \overrightarrow{AC}) = 0 \Rightarrow$
$$\Rightarrow \begin{vmatrix} x + 1 & y - 2 & z + 1 \\ 0 & -2 & 4 \\ 0 & 0 & 4 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow x + 1 = 0$$

c) El plano pedido es de la forma:
$x - 2y - 3z + D = 0$

Como debe pasar por A: $-3 + 4 - 3 + D = 0 \Rightarrow$

$\Rightarrow D = 2 \Rightarrow x - 2y - 3z + 2 = 0$

6. A, B y C están alineados $\Rightarrow$ rango $(\overrightarrow{AB},\ \overrightarrow{AC}) = 1$

a) rango $\begin{pmatrix} -2 & 1 & -2 \\ 2 & -1 & 2 \end{pmatrix} = 1 \Rightarrow$

$\Rightarrow$ A, B y C están alineados.

b) rango $\begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 \\ -1 & 2 & -2 \end{pmatrix} = 2 \Rightarrow$

$\Rightarrow$ A, B y C forman triángulo.

7. La recta r pasa por $A\,(1,\ 2,\ 0)$ y tiene como dirección la del vector $\vec{u} = (2,\ 1,\ -1)$

El plano pedido es el determinado por $\alpha\,(A,\ \vec{u},\ \overrightarrow{AP})$

Entonces: $\det(\overrightarrow{AX},\ \vec{u},\ \overrightarrow{AP}) = 0 \Rightarrow$
$$\Rightarrow \begin{vmatrix} x - 1 & y - 2 & z \\ 2 & 1 & -1 \\ -2 & -1 & 2 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow x - 2y + 3 = 0$$

8. La recta r tiene como dirección la del vector $\vec{u} = (1,\ 1,\ -1)$.

El plano pedido será el determinado por $\alpha\,(A,\ \vec{u},\ \overrightarrow{AB})$.

Entonces: $\det(\overrightarrow{AX},\ \vec{u},\ \overrightarrow{AB}) = 0 \Rightarrow$
$$\Rightarrow \begin{vmatrix} x + 3 & y - 2 & z \\ 1 & 1 & -1 \\ 4 & -2 & -1 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow$$
$\Rightarrow x + y + 2z = 0$

9. A, B y C están alineados $\Rightarrow$ rango $(\overrightarrow{AB},\ \overrightarrow{AC}) = 1$

rango $\begin{pmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 2 & 6 - m & 2 \end{pmatrix} = 1 \Rightarrow \dfrac{1}{2} = \dfrac{3}{6 - m} \Rightarrow$

$\Rightarrow 6 - m = 6 \Rightarrow m = 0$

10. A, B y C están alineados $\Rightarrow$ rango $(\overrightarrow{AB},\ \overrightarrow{AC}) = 1$

rango $\begin{pmatrix} 1 & -1 & m^2 - 3 \\ 2 & -2 & 2m - 2 \end{pmatrix} = 1 \Rightarrow \dfrac{1}{2} = \dfrac{m^2 - 3}{2m - 2} \Rightarrow$

$\Rightarrow m^2 - m - 2 = 0 \Rightarrow m = 2,\ m = -1$

7 Posiciones de rectas y planos

1. Estudia la posición relativa de los planos α y β en los siguientes casos:

a) α: $2x - y + z - 2 = 0$
β: $-6x + 3y - 3z - 2 = 0$

b) α: $x + y - 1 = 0$
β: $x + z - 2 = 0$

2. Estudia la posición relativa de las rectas r y s en los siguientes casos:

a) $r: \dfrac{x}{3} = \dfrac{y-2}{2} = \dfrac{z-5}{4}$ $\quad s: \begin{cases} x = -3 + t \\ y = -5 - t \\ z = 6 + 3t \end{cases}$

b) $r: \dfrac{x}{1} = \dfrac{y}{2} = \dfrac{z}{3}$ $\quad s: \dfrac{x-1}{3} = \dfrac{y-1}{2} = \dfrac{z}{1}$

c) $r: \dfrac{x}{2} = \dfrac{y-2}{2} = \dfrac{z}{3}$ $\quad s: \begin{cases} x = 5 + 4t \\ y = 5 + 4t \\ z = 5 + 6t \end{cases}$

3. Estudia la posición relativa de la recta r y del plano α en los siguientes casos:

a) $r: \dfrac{x}{1} = \dfrac{y}{-1} = \dfrac{z}{1}$
α: $2x + y - z = 0$

b) $r: \begin{cases} x = 10 - 3t \\ y = -7 + 2t \\ z = -1 + t \end{cases}$
α: $3x + 2y - z + 1 = 0$

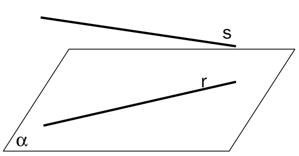
4. Estudia la posición relativa de los planos α, β y γ en los siguientes casos:

a) $\begin{cases} \alpha: x + y - z = 0 \\ \beta: 3x + 2y + 1 = 0 \\ \gamma: x + 2z + 1 = 0 \end{cases}$

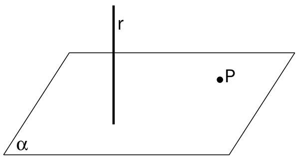
b) $\begin{cases} \alpha: 2x - y + 3z = 4 \\ \beta: x - 2y - z = -7 \\ \gamma: -2x + y - z = 2 \end{cases}$

5. Halla la ecuación de la recta que pasa por el punto $P(1, 0, -3)$ y es paralela a la recta
$r: \dfrac{x-1}{1} = \dfrac{y+2}{-2} = \dfrac{z}{2}$

6. Determina la ecuación del plano que contiene a la recta $r: \dfrac{x}{-1} = \dfrac{y}{1} = \dfrac{z-1}{3}$
y es paralelo a la recta $s: \dfrac{x-2}{1} = \dfrac{y-3}{2} = \dfrac{z+2}{2}$



7. Determina la ecuación del plano perpendicular a la recta
$r: \dfrac{x-1}{1} = \dfrac{y+2}{-2} = \dfrac{z}{4}$ y que pasa por el punto $P(2, -1, 4)$.



8. Determina las ecuaciones de la recta perpendicular al plano α: $2x + y - 3z = 0$ y que pasa por el punto $P(-2, 1, 0)$.

9. Escribe la ecuación del plano que pasa por los puntos $P(2, 0, -3)$ y $Q(3, 3, -1)$ y es paralelo a la recta de ecuaciones paramétricas $r: \begin{cases} x = 1 + 2t \\ y = -1 + t \\ z = 2t \end{cases}$

10. Calcula el valor de k para que la recta de ecuaciones paramétricas $r: \begin{cases} x = 1 + t \\ y = 1 + t \\ z = 1 + t \end{cases}$ esté contenida en el plano de ecuación general α: $2x + 3y - kz = 0$.

11. Dada la recta $r: \begin{cases} 2x + y - z = 0 \\ x + y + z - 1 = 0 \end{cases}$

a) Escribe la expresión algebraica del haz de planos cuya arista es la recta r.

b) Determina la ecuación del plano que contiene a la recta r y que pasa por el punto $P(-1, 2, 2)$.

SOLUCIONES

1. a) rango M = rango $\begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ -6 & 3 & -3 \end{pmatrix} = 1$

rango $M^* = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 & 2 \\ -6 & 3 & -3 & 2 \end{pmatrix} = 2$

Planos paralelos.

b) rango M = rango $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} = 2$

rango $M^* = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} = 2$

Planos secantes.

2. a) $A_r(0, 2, 5)$ $\quad A_s(-3, -5, 6)$ $\quad \vec{u}_r = (3, 2, 4)$
$\vec{u}_s = (1, -1, 3)$ $\quad \overrightarrow{A_rA_s} = (-3, -7, 1)$
rango $(\vec{u}_r, \vec{u}_s) = 2$ y rango $(\overrightarrow{A_rA_s}, \vec{u}_r, \vec{u}_s) = 2 \Rightarrow$
$\Rightarrow$ Las rectas se cortan.

b) $A_r(0, 0, 0)$ $\quad A_s(1, 1, 0)$ $\quad \vec{u}_r = (1, 2, 3)$
$\vec{u}_s = (3, 2, 1)$ $\quad \overrightarrow{A_rA_s} = (1, 1, 0)$
rango $(\vec{u}_r, \vec{u}_s) = 2$ y rango $(\overrightarrow{A_rA_s}, \vec{u}_r, \vec{u}_s) = 3 \Rightarrow$
$\Rightarrow$ Las rectas se cruzan.

c) $A_r(0, 2, 0)$ $\quad A_s(5, 5, 5)$ $\quad \vec{u}_r = (2, 2, 3)$
$\vec{u}_s = (4, 4, 6)$ $\quad \overrightarrow{A_rA_s} = (5, 3, 5)$
rango $(\vec{u}_r, \vec{u}_s) = 1$ y rango $(\overrightarrow{A_rA_s}, \vec{u}_r, \vec{u}_s) = 2 \Rightarrow$
$\Rightarrow$ Las rectas son paralelas.

3. a) Escribiendo la recta r en paramétricas y sustituyendo en el plano, se obtiene: $2t - t - t = 0$ $\Rightarrow 0 \cdot t = 0 \Rightarrow$ La recta está contenida en el plano.

b) $3(10 - 3t) + 2(-7 + 2t) + 1 - t + 1 = 0 \Rightarrow$
$\Rightarrow -6 \cdot t = -18 \Rightarrow t = 3 \Rightarrow$ La recta corta al plano en el punto $P(1, -1, 2)$.

4. a) $M = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 3 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$ $\quad M^* = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & 0 \\ 3 & 2 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 2 & -1 \end{pmatrix} \Rightarrow$

$\Rightarrow$ rango $M = 2$ y rango $M^* = 2 \Rightarrow$
$\Rightarrow$ Los tres planos se cortan en una recta.

b) $M = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 3 \\ 1 & -2 & -1 \\ -2 & 1 & -1 \end{pmatrix}$

$M^* = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 3 & 4 \\ 1 & -2 & -1 & -7 \\ -2 & 1 & -1 & 2 \end{pmatrix} \Rightarrow$
$\Rightarrow$ rango $M = 3$ y rango $M^* = 3 \Rightarrow$
$\Rightarrow$ Se cortan en un punto.

5. La recta buscada tiene el mismo vector de dirección que r. Por tanto, su ecuación es:

$$r\colon \frac{x-1}{1} = \frac{y}{-2} = \frac{z+3}{2}$$

6. El plano pedido pasa por el punto $P(0, 0, 1)$ y tiene como vectores directores a $\vec{u}_r = (-1, 1, 3)$ y a $\vec{u}_s = (1, 2, 2)$. Por tanto, su ecuación es:

$$\begin{vmatrix} x & y & z-1 \\ -1 & 1 & 3 \\ 1 & 2 & 2 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow$$
$\Rightarrow 4x - 5y + 3z - 3 = 0$

7. El vector normal del plano es $\vec{n} = (1, -2, 4)$ y, por tanto, su ecuación es:

$x - 2y + 4z + D = 0 \Rightarrow 2 + 2 + 16 + D = 0 \Rightarrow$
$\Rightarrow D = -20 \Rightarrow x - 2y + 4z - 20 = 0$

8. El vector de dirección de la recta es el normal al plano, $\vec{n} = (2, 1, -3)$ y, por tanto, su ecuación es:

$$s\colon \frac{x+2}{2} = \frac{y-1}{1} = \frac{z}{-3}$$

9. $\alpha(P, \overrightarrow{PQ}, \vec{u})$ siendo $\vec{u} = (2, 1, 2)$ el vector de dirección de r.

$$\begin{vmatrix} x-2 & y & z+3 \\ 1 & 3 & 2 \\ 2 & 1 & 2 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow$$
$\Rightarrow 4x + 2y - 5z - 23 = 0$

10. Para cualquier valor del parámetro t el punto de la recta $(1 + t, 1 + t, 1 + t)$ debe verificar la ecuación del plano.

$2(1 + t) + 3(1 + t) - k(1 + t) = 0 \Rightarrow$
$\Rightarrow (5 - k) \cdot t = k - 5$

Para $k = 5$ la recta está contenida en el plano.

11. a) $t \cdot (2x + y - z) + s \cdot (x + y + z - 1) = 0$

b) $-2t + 2s = 0 \Rightarrow t = s \Rightarrow$
$\Rightarrow (2x + y - z) + (x + y + z - 1) = 0 \Rightarrow$
$\Rightarrow 3x + 2y - 1 = 0$

8 Propiedades métricas

1. Determina el ángulo formado por las rectas $r: \dfrac{x-1}{1} = \dfrac{y+3}{-1} = \dfrac{z-1}{2}$ y $s: \begin{cases} x = 1 + 2t \\ y = 1 - t \\ z = 2 - t \end{cases}$

2. Determina el ángulo formado por los planos $\alpha: 2x + 3y - z + 6 = 0$ y $\beta: 2y - z + 5 = 0$.

3. Determina el ángulo que forma la recta $r: \dfrac{x-1}{1} = \dfrac{y}{1} = \dfrac{z-10}{-2}$ con el plano $\alpha: 2x - y = 0$.

4. Escribe la ecuación de la recta perpendicular al plano $\alpha: 2x - y + z = 3$ y que pasa por el punto $P(-1, 0, 3)$.

5. Halla la ecuación del plano perpendicular a la recta $r: \begin{cases} x = 1 - t \\ y = 2 - 3t \\ z = -t \end{cases}$ y que pasa por el punto $P(0, -1, 2)$.

6. Calcula la distancia que separa al punto $P(1, -2, 3)$ del plano $\alpha: 2x + y + z + 3 = 0$.

7. Calcula la distancia que separa al punto $P(1, 0, -3)$ de la recta $r: \begin{cases} x = 1 + t \\ y = 2 - t \\ z = t \end{cases}$

8. Dadas las rectas $r: \dfrac{x}{1} = \dfrac{y}{-2} = \dfrac{z-1}{1}$ y $s: \begin{cases} x = 1 + t \\ y = 1 - 2t \\ z = t \end{cases}$

a) Demuestra que son paralelas.

b) Calcula la distancia que separa a ambas rectas.

9. Dados los planos $\alpha: x + y + z = 0$ y $\beta: 2x + 2y + 2z + 3 = 0$:

a) Demuestra que son paralelos.

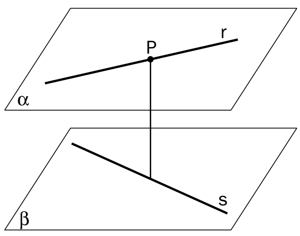
b) Calcula la distancia que separa a ambos planos.

10. Dadas las rectas $r: \dfrac{x}{1} = \dfrac{y}{1} = \dfrac{z}{-1}$ y $s: \begin{cases} x = 1 + t \\ y = t \\ z = t \end{cases}$

a) Demuestra que se cruzan.

b) Escribe la ecuación del plano β que contiene a s y es paralelo a r.

c) Demuestra que $P(2, 2, -2)$ es un punto de r y calcula la distancia que separa a P de β. ¿Cómo será esta distancia en relación a la distancia que separa a las rectas r y s?



SOLUCIONES

1. Vectores directores de r y de s:
$\vec{u}_r = (1, -1, 2)$ y $\vec{u}_s = (2, -1, -1)$

$$\cos(\widehat{r, s}) = \frac{|\vec{u}_r \cdot \vec{u}_s|}{|\vec{u}_r| \cdot |\vec{u}_s|} = \frac{1}{\sqrt{6} \cdot \sqrt{6}} = \frac{1}{6} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow (\widehat{r, s}) = \arccos \frac{1}{6} \approx 80° \ 24'$$

2. Vectores normales de α y de β:
$\vec{n}_\alpha = (2, 3, -1)$ y $\vec{n}_\beta = (0, 2, -1)$

$$\cos(\widehat{\alpha, \beta}) = \frac{|\vec{n}_\alpha \cdot \vec{n}_\beta|}{|\vec{n}_\alpha| \cdot |\vec{n}_\beta|} = \frac{7}{\sqrt{14} \cdot \sqrt{5}} = \frac{7}{\sqrt{70}} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow (\widehat{\alpha, \beta}) = \arccos \frac{7}{\sqrt{70}} \approx 33° \ 13'$$

3. Vector normal de α: $\vec{n}_\alpha = (2, -1, 0)$
Vector director de r: $\vec{u}_r = (1, 1, -2)$

$$\operatorname{sen}(\widehat{\alpha, r}) = \frac{|\vec{n}_\alpha \cdot \vec{u}_r|}{|\vec{n}_\alpha| \cdot |\vec{u}_r|} = \frac{1}{\sqrt{5} \cdot \sqrt{6}} = \frac{1}{\sqrt{30}} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow (\widehat{\alpha, r}) = \operatorname{arcsen} \frac{1}{\sqrt{30}} \approx 10° \ 31'$$

4. El vector normal del plano es un vector director de la recta.

Por tanto: r: $\dfrac{x+1}{2} = \dfrac{y}{-1} = \dfrac{z-3}{1}$

5. El vector director de la recta es un vector normal del plano. Por tanto:
α: $-x - 3y - z + D = 0$
Como $P \in \alpha \Rightarrow 3 - 2 + D = 0 \Rightarrow D = -1 \Rightarrow$
$\Rightarrow \alpha$: $x + 3y + z + 1 = 0$

6. Punto del plano: $A_\alpha\ (0, 0, -3)$
Vector normal del plano: $\vec{n}_\alpha = (2, 1, 1)$
$\overrightarrow{A_\alpha P} = (1, -2, 6)$

$$d(P, \alpha) = \frac{|\overrightarrow{A_\alpha P} \cdot \vec{n}_\alpha|}{|\vec{n}_\alpha|} = \frac{6}{\sqrt{6}} = \sqrt{6}$$

7. Punto de la recta: $A_r\ (1, 2, 0)$
Vector director de la recta: $\vec{u}_r = (1, -1, 1)$
$\overrightarrow{A_r P} = (0, -2, -3)$

$$d(P, r) = \frac{|\overrightarrow{A_r P} \cdot \vec{u}_r|}{|\vec{u}_r|} = \frac{|-1|}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{3}$$

8. a) Vectores directores de r y de s:

$\vec{u}_r = (1, -2, 1)$ y $\vec{u}_s = (1, -2, 1)$

Al ser iguales, las rectas son paralelas o coincidentes.

Como el punto $A\ (0, 0, 1)$ pertenece a r pero no a s, se deduce que r y s son paralelas.

b) Si $P\ (1, 1, 0)$ es un punto de s:

$$d(r, s) = d(A, s) = \frac{|\overrightarrow{PA} \cdot \vec{u}_s|}{|\vec{u}_s|} = \frac{2}{\sqrt{6}} = \frac{\sqrt{6}}{3}$$

9. a) Los vectores normales a los planos son proporcionales; por tanto, los planos son paralelos ya que no son coincidentes (α pasa por el origen y β no).

b) Si $O(0, 0, 0)$ es uno de los puntos de α y $A_\beta\left(0, 0, -\dfrac{3}{2}\right)$ un punto de β:

$$d(\alpha, \beta) = d(O, \beta) = \frac{|\overrightarrow{A_\beta O} \cdot \vec{n}_\beta|}{|\vec{n}_\beta|} = \frac{3}{\sqrt{12}} = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

10. a) $A_r(0, 0, 0)$ $\quad A_s(1, 0, 0)$

$\vec{u}_r = (1, 1, -1)$ $\quad \vec{u}_s = (1, 1, 1)$

$\overrightarrow{A_r A_s} = (1, 0, 0)$

rango $(\vec{u}_r, \vec{u}_s) = 2$ y rango $(\overrightarrow{A_r A_s}, \vec{u}_r, \vec{u}_s) = 3 \Rightarrow$

$\Rightarrow$ Las rectas se cruzan.

b) $$\beta(A_s, \vec{u}_r, \vec{u}_s) \Rightarrow \begin{vmatrix} x-1 & y & z \\ 1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow$$

$\Rightarrow \beta$: $x - y - 1 = 0$

c) $\dfrac{2}{1} = \dfrac{2}{1} = \dfrac{-2}{-1} \Rightarrow P \in r$

$$d(P, \beta) = \frac{|-1|}{\sqrt{1^2 + 1^2 + 0^2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$d(P, \beta) = d(r, s)$

9 Curvas y superficies

1. Escribe las ecuaciones paramétricas de la recta que pasa por los puntos $A(0, 2, -1)$ y $B(-1, 2, -4)$.

2. Escribe las ecuaciones paramétricas del plano que pasa por los puntos $A(-1, 2, -3)$, $B(-1, 3, -2)$ y $C(1, -1, 0)$.

3. Halla la ecuación implícita del plano que tiene por ecuaciones paramétricas $\alpha: \begin{cases} x = 1 - t - s \\ y = t + 2s \\ z = -2 + 3t - s \end{cases}$

4. Determina las coordenadas cilíndricas del punto $P(3, \sqrt{3}, 3)$.

5. Determina las coordenadas cartesianas de un punto P cuyas coordenadas cilíndricas son $P(2, 30°, -3)$.

6. Determina las coordenadas esféricas del punto $P(0, 1, 1)$.

7. Determina las coordenadas cartesianas de un punto P cuyas coordenadas esféricas son $P(2\sqrt{2}, 270°, 135°)$.

8. Halla la ecuación implícita de la superficie cilíndrica de directriz la curva C: $\begin{cases} x = 2 \cos t \\ y = 2 \operatorname{sen} t \\ z = 2 \end{cases}$ y de generatrices paralelas al vector $\vec{v} = (-1, 0, -1)$.

9. Escribe las ecuaciones paramétricas de la superficie cónica formada por todas las rectas que pasan por el vértice $V(-1, 0, 2)$ y se apoyan en la directriz C: $\begin{cases} x = 2t \\ y = 2 \operatorname{sen} t \\ z = 2 \cos t \end{cases}$

10. Dadas las curvas $C_1: \begin{cases} x = 2 + t \\ y = 2 - t \\ z = t^2 \end{cases}$ y $C_2: \begin{cases} x = s \\ y = s \\ z = 0 \end{cases}$, halla la ecuación implícita de la superficie de traslación engendrada por C_1 cuando se mueve sobre C_2.

11. Escribe la ecuación de la esfera cuyo centro está situado en el punto $C(2, 0, -3)$ y cuyo radio mide $r = 4$.

12. Escribe la ecuación de la esfera que tiene por diámetro el segmento de extremos $A(-1, 2, 0)$ y $B(3, -2, 4)$.

13. Dada la esfera de ecuación $x^2 + y^2 + z^2 - 2z - 3 = 0$

a) Calcula las coordenadas de su centro y la medida de su radio.

b) Calcula la ecuación del plano tangente a la esfera en el punto $P(0, 0, 3)$.

SOLUCIONES

1. Vector director de la recta: $\overrightarrow{AB} = (-1, 0, -3)$

Ecuaciones paramétricas: r: $\begin{cases} x = -t \\ y = 2 \\ z = -1 - 3t \end{cases}$

2. Vectores directores: $\overrightarrow{AB} = (0, 1, 1)$ y $\overrightarrow{AC} = (2, -3, 3)$

Ecuaciones paramétricas: $\begin{cases} x = -1 + 2s \\ y = 2 + t - 3s \\ z = -3 + t + 3s \end{cases}$

3. $A(1, 0, -2)$ es un punto del plano.
$\vec{u} = (-1, 1, 3)$ y $\vec{v} = (-1, 2, -1)$ son vectores de dirección.

La ecuación implícita del plano es:

$$\begin{vmatrix} x-1 & y & z+2 \\ -1 & 1 & 3 \\ -1 & 2 & -1 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow 7x + 4y + z - 5 = 0$$

4. $\begin{cases} r = \sqrt{x^2 + y^2} \\ \alpha = \text{arctg}\,\dfrac{y}{x} \\ z = z \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} r = \sqrt{3^2 + (\sqrt{3})^2} = \sqrt{12} = 2\sqrt{3} \\ \alpha = \text{arctg}\,\dfrac{\sqrt{3}}{3} = \dfrac{\pi}{6}\text{ rad} = 30° \\ z = 3 \end{cases} \Rightarrow$

$\Rightarrow P\left(2\sqrt{3}, \dfrac{\pi}{6}\text{ rad}, 3\right) = (2\sqrt{3}, 30°, 3)$

5. $\begin{cases} x = r\cos\alpha \\ y = r\,\text{sen}\,\alpha \\ z = z \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 2\cos 30° = \sqrt{3} \\ y = 2\,\text{sen}\,30° = 1 \\ z = -3 \end{cases} \Rightarrow$

$\Rightarrow P(\sqrt{3}, 1, -3)$

6. $\begin{cases} r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} \\ \alpha = \text{arctg}\,\dfrac{y}{x} \\ \beta = \text{arctg}\,\dfrac{\sqrt{x^2 + y^2}}{z} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} r = \sqrt{0^2 + 1^2 + 1^2} = \sqrt{2} \\ \alpha = \text{arctg}\,\dfrac{1}{0} = 90° \\ \beta = \text{arctg}\,\dfrac{1}{1} = 45° \end{cases} \Rightarrow$

$\Rightarrow P(\sqrt{2}, 90°, 45°)$

7. $\begin{cases} x = r\,\text{sen}\,\beta\cos\alpha \\ y = r\,\text{sen}\,\beta\,\text{sen}\,\alpha \\ z = r\cos\beta \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 2\sqrt{2}\cdot\dfrac{\sqrt{2}}{2}\cdot 0 = 0 \\ y = 2\sqrt{2}\cdot\dfrac{\sqrt{2}}{2}\cdot 1 = -2 \\ z = 2\sqrt{2}\cdot\dfrac{-\sqrt{2}}{2} = -2 \end{cases} \Rightarrow$

$\Rightarrow P(0, -2, -2)$

8. Ecuaciones paramétricas de la superficie:

$\begin{cases} x = 2\cos t - s \\ y = 2\,\text{sen}\,t \\ z = 2 - s \end{cases} \Rightarrow$

$\Rightarrow \text{sen}^2\,t + \cos^2 t = \dfrac{y^2}{4} + \dfrac{(x + s)^2}{4} = 1 \Rightarrow$

$\Rightarrow \dfrac{y^2}{4} + \dfrac{(x - z + 2)^2}{4} = 1$

9. Ecuaciones paramétricas de la superficie:

$\begin{cases} x = -1 + s(2t + 1) \\ y = s\cdot 2\,\text{sen}\,t \\ z = 2 + s(2\cos t - 2) \end{cases} \Rightarrow$

$\Rightarrow \begin{cases} x = 2st + s - 1 \\ y = 2s\,\text{sen}\,t \\ z = 2s\cos t - 2s + 2 \end{cases}$

10. El punto común a las dos curvas es el $A(2, 2, 0)$.
Las ecuaciones paramétricas de la superficie de traslación son:

$\begin{cases} x = 2 + t + s - 2 \\ y = 2 - t + s - 2 \\ z = t^2 + 0 - 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = s + t \\ y = s - t \\ z = t^2 \end{cases} \Rightarrow$

$\Rightarrow 2t = x - y \Rightarrow 2\sqrt{z} = x - y \Rightarrow z = \dfrac{(x - y)^2}{4}$

11. $(x - 2)^2 + y^2 + (z + 3)^2 = 4^2 \Rightarrow$
$\Rightarrow x^2 + y^2 + z^2 - 4x + 6z - 3 = 0$

12. El centro de la esfera es el punto medio del segmento AB: $M(1, 0, 2)$

El radio coincide con la distancia que separa al centro de A: $r = d(M, A)$

$r = \sqrt{(1 + 1)^2 + (0 - 2)^2 + (2 - 0)^2} = \sqrt{12} \Rightarrow$
$\Rightarrow (x - 1)^2 + y^2 + (z - 2)^2 = (\sqrt{12})^2 \Rightarrow$
$\Rightarrow x^2 + y^2 + z^2 - 2x - 4z - 7 = 0$

13. a) $\begin{cases} D = 0 = -2a & a = 0 \\ E = 0 = -2b & b = 0 \\ F = -2 = -2c & \Rightarrow c = 1 \\ G = -3 = a^2 + b^2 + c^2 - r^2 & r = \sqrt{4} = 2 \end{cases}$

$\Rightarrow$ Centro: $(0, 0, 1)$, radio: 2

b) El vector $\overrightarrow{CP} = (0, 0, 1)$ es un vector normal al plano tangente. Por tanto, dicho plano tendrá por ecuación: $z + D = 0$. Como debe pasar por $P \Rightarrow 3 + D = 0 \Rightarrow D = -3 \Rightarrow z - 3 = 0$

10 Sucesiones y límites

1. Calcula los tres términos siguientes de cada una de las siguientes sucesiones:

a) 4, 7, 10, 13, 16, ...

b) $\frac{1}{2}, \frac{3}{4}, \frac{5}{6}, \frac{7}{8}, \frac{9}{10}, \ldots$

c) 1, 4, 9, 16, 25, ...

d) 2, 5, 10, 17, 26, ...

2. Halla el término general de las siguientes sucesiones:

a) 10, 7, 4, 1, -2, ...

b) $\frac{2}{3}, \frac{4}{5}, \frac{6}{7}, \frac{8}{9}, \frac{10}{11}, \ldots$

c) 1, 8, 27, 64, 125, ...

d) 0, 7, 26, 63, 124, ...

3. Dada la sucesión de término general $a_n = \dfrac{n-1}{n+1}$:

a) Calcula sus tres primeros términos.

b) Halla el lugar que ocupa el término $a_s = \dfrac{15}{17}$.

c) Demuestra que es estrictamente creciente.

d) Halla, si es que existen, una cota superior y una cota inferior.

e) Calcula el límite de la sucesión.

4. Dadas las sucesiones:

a_n: 1, 3, 5, 7, 9, ... $\quad$ b_n: 5, 4, 3, 2, 1, ... $\quad$ c_n: 2, 7, 12, 17, 22, ...

a) Halla los tres primeros términos de la sucesión $2a_n - 3b_n + c_n$.

b) Halla los tres primeros términos de la sucesión $a_n \cdot (2b_n - c_n)$.

c) Halla los tres primeros términos de la sucesión $\dfrac{a_n}{b_n}$.

5. Dada la sucesión $a_n = 3 + \dfrac{1}{n}$:

a) Demuestra que es estrictamente decreciente y acotada inferiormente.

b) Calcula su límite.

c) Averigua a partir de qué término los términos siguientes se aproximan a 3 con un error menor de $\varepsilon = 0{,}001$.

6. En el año 2002 y en un cierto bosque había 10 000 m^3 de madera. Si se supone que cada año la cantidad de madera crece en un 4 %:

a) Escribe los tres primeros términos de la sucesión de las cantidades de madera según los años transcurridos.

b) Escribe el término general de dicha sucesión.

c) ¿Cuánta madera habría en el año 2048 si se siguieran dando estas mismas condiciones?

7. Calcula los siguientes límites:

a) $\lim \dfrac{2n^2 + 2n - 3}{n^3 + n^2}$

b) $\lim \dfrac{2n^3 + 2n^2 - 3}{n^2 - 2n + 3}$

c) $\lim \dfrac{2n^2 + 2n - 3}{3n^2 - 3n + 5}$

d) $\lim \dfrac{(2n+3) \cdot (-3n+2) + 3}{2n^2 - n + 7}$

e) $\lim \left(\dfrac{2n+3}{n^2-1} \cdot \dfrac{n+1}{5}\right)$

f) $\lim \sqrt{\dfrac{n+3}{4n+3}}$

g) $\lim \sqrt[3]{\dfrac{(8n+3) \cdot (-n+3)}{n^2 - 3n + 6}}$

h) $\lim \left(\dfrac{2n+5}{n-7}\right)^{\frac{3n+1}{2n+1}}$

i) $\lim \left(\sqrt{2n^2+1} - n\right)$

j) $\lim \left(\sqrt{2n^2+1} - \sqrt{n^2+1}\right)$

SOLUCIONES

1. a) $a_6 = 19$ $a_7 = 22$ $a_8 = 25$

b) $a_6 = \frac{11}{12}$ $a_7 = \frac{13}{14}$ $a_8 = \frac{15}{16}$

c) $a_6 = 36$ $a_7 = 49$ $a_8 = 64$

d) $a_6 = 37$ $a_7 = 50$ $a_8 = 65$

2. a) $a_n = 10 + (n - 1) \cdot (-3) = -3n + 13$

b) $a_n = \frac{2n}{2n + 1}$ c) $a_n = n^3$ d) $a_n = n^3 - 1$

3. a) $a_1 = \frac{0}{2} = 0$ $a_2 = \frac{1}{3}$ $a_3 = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}$

b) $a_s = \frac{15}{17} = \frac{s-1}{s+1} \Rightarrow 15 \cdot (s + 1) = 17 \cdot (s - 1) \Rightarrow s = 16$

Es el término que ocupa el lugar número 16.

c) $a_{n+1} - a_n = \frac{n}{n+2} - \frac{n-1}{n+1} = \frac{2}{n^2 + 3n + 2}$

Esta expresión es siempre positiva. Por tanto, $a_{n+1} > a_n$ y la sucesión es estrictamente creciente.

d) $a_n = 1 - \frac{2}{n+1}$. Una cota superior es 1 y una cota inferior es 0.

e) $\lim \frac{n-1}{n+1} = \lim \frac{1 - \frac{1}{n}}{1 + \frac{1}{n}} = \frac{1}{1} = 1$

4. a) $a_1 = -11$ $a_2 = 1$ $a_3 = 13$

b) $a_1 = 8$ $a_2 = 3$ $a_3 = -30$

c) $a_1 = \frac{1}{5}$ $a_2 = \frac{3}{4}$ $a_3 = \frac{5}{3}$

5. $a_{n+1} - a_n = 3 + \frac{1}{n+1} - 3 - \frac{1}{n} = -\frac{1}{n^2 + n}$

La última expresión es siempre negativa. Por tanto, $a_n > a_{n+1}$ y la sucesión es estrictamente decreciente.

Por ejemplo, una cota inferior de la sucesión es 3.

$\lim 3 + \frac{1}{n} = 3 + 0 = 3$

$|a_n - 3| < 0{,}001 \Rightarrow \left| 3 + \frac{1}{n} - 3 \right| < 0{,}001 \Rightarrow \frac{1}{n} < 0{,}001 \Rightarrow n \geqslant 1\,001$

6. a) 10 000, 10 400, 10 816, ...

b) $a_n = 10\,000 \cdot 1 \cdot 04^n$

c) $a_{48} = 65\,705$

7. a) $\lim \frac{2n^2 + 2n - 3}{n^3 + n^2} = \lim \frac{\frac{2}{n} + \frac{2}{n^2} - \frac{3}{n^3}}{1 + \frac{1}{n}} = \frac{0}{1} = 0$

b) $\lim \frac{2n^3 + 2n^2 - 3}{n^2 - 2n + 3} = \lim \frac{2 + \frac{2}{n} - \frac{3}{n^3}}{\frac{1}{n} - \frac{2}{n^2} + \frac{3}{n^3}} = \frac{2}{0} = \infty$

c) $\lim \frac{2n^2 + 2n - 3}{3n^2 - 3n + 5} = \lim \frac{2 + \frac{2}{n} - \frac{3}{n^2}}{3 - \frac{3}{n} + \frac{5}{n^2}} = \frac{2}{3}$

d) $\lim \frac{(2n+3)\cdot(-3n+2)+3}{2n^2-n+7} = \lim \frac{-6n^2-5n+9}{2n^2-n+7} =$

$= \lim \frac{-6 - \frac{5}{n} + \frac{9}{n^2}}{2 - \frac{1}{n} + \frac{7}{n^2}} = \frac{-6}{2} = -3$

e) $\lim \left(\frac{2n+3}{n^2-1} \cdot \frac{n+1}{5} \right) = \lim \frac{2n^2 + 5n + 3}{5n^2 - 5n} =$

$= \lim \frac{2 + \frac{5}{n} + \frac{3}{n^2}}{5 - \frac{5}{n}} = \frac{2}{5}$

f) $\lim \sqrt{\frac{n+3}{4n+3}} = \sqrt{\lim \frac{n+3}{4n+3}} = \sqrt{\lim \frac{1 + \frac{3}{n}}{4 + \frac{3}{n}}} =$

$= \sqrt{\frac{1}{4}} = \frac{1}{2}$

g) $\lim \sqrt[3]{\frac{(8n+3)\cdot(-n+3)}{n^2-3n+6}} = \sqrt[3]{\lim \frac{-8n^2+21n+9}{n^2-3n+6}} =$

$= \sqrt[3]{\lim \frac{-8 + \frac{21}{n} + \frac{9}{n^2}}{1 - \frac{3}{n} + \frac{6}{n^2}}} = \sqrt[3]{-8} = -2$

h) $\lim \left(\frac{2n+5}{n-7} \right)^{\frac{3n+1}{2n+1}} = \left(\lim \frac{2n+5}{n-7} \right)^{\lim \frac{3n+1}{2n+1}} =$

$= \left(\lim \frac{2 + \frac{5}{n}}{1 - \frac{7}{n}} \right)^{\lim \frac{3 + \frac{1}{n}}{2 + \frac{1}{n}}} = 2^{\frac{3}{2}} = \sqrt{2^3} = \sqrt{8} = 2\sqrt{2}$

i) $\lim (\sqrt{2n^2 + 1} - n) =$

$= \lim \frac{(\sqrt{2n^2+1} - n) \cdot (\sqrt{2n^2+1} + n)}{\sqrt{2n^2+1} + n} =$

$= \lim \frac{2n^2 + 1 - n^2}{\sqrt{2n^2+1} + n} = \frac{1}{0 + 0} = \infty$

j) $\lim (\sqrt{2n^2 + 1} - \sqrt{n^2 + 1}) =$

$= \lim \frac{n^2}{\sqrt{2n^2+1} + \sqrt{n^2+1}} = \frac{1}{0 + 0} = \infty$

11 Funciones. Límites y continuidad

1. Halla los puntos de discontinuidad de la función $f(x) = \dfrac{x^2 - 2x - 3}{x - 3}$ indicando el tipo de discontinuidad que presenta en ellos. Indica el salto de discontinuidad o, en su caso, el verdadero valor de la función en esos puntos.

2. Halla los puntos de discontinuidad de la función $f(x) = \dfrac{x^2 + x - 6}{x^2 - x - 2}$ indicando el tipo de discontinuidad que presenta en ellos. Indica el salto de discontinuidad o, en su caso, el verdadero valor de la función en esos puntos.

3. Halla los puntos de discontinuidad de la función $f(x) = \dfrac{x - 6}{2 - \sqrt{x - 2}}$ indicando el tipo de discontinuidad que presenta en ellos. Indica el salto de discontinuidad o, en su caso, el verdadero valor de la función en esos puntos.

4. Estudia la continuidad de la función $f(x) = \begin{cases} x^2 - 2 & x \leqslant 1 \\ x^2 - 3x + 1 & x > 1 \end{cases}$

5. Estudia la continuidad de la función $f(x) = \begin{cases} 6 - x & x < -2 \\ 6 & -2 \leqslant x < 3 \\ x^2 - 3 & x \geqslant 3 \end{cases}$

6. Halla el valor del parámetro a para que la función $f(x) = \begin{cases} x^3 - 1 & x < 1 \\ ax - 1 & x \geqslant 1 \end{cases}$ sea continua en toda la recta real.

7. Halla el valor del parámetro a para que la función $f(x) = \begin{cases} x^2 + ax + a - 1 & x < 2 \\ \mathrm{L}(x - 1) & x \geqslant 2 \end{cases}$ sea continua en toda la recta real.

8. Halla los valores de los parámetros a y b que hacen que la función $f(x) = \begin{cases} \operatorname{sen} x & x < 0 \\ x^2 + ax + b & 0 \leqslant x < 3 \\ x + 9 & x \geqslant 3 \end{cases}$ sea continua en toda la recta real.

9. Comprueba si la función $f(x) = \dfrac{e^x + 1}{e^x - 1}$ verifica las condiciones del teorema de Weierstrass en el intervalo [1, 4]. ¿Se puede asegurar que la función está acotada en ese intervalo? ¿Se puede asegurar que la función está acotada en todo su dominio?

10. Estudia si la función $f(x) = \begin{cases} x^2 - 1 & -2 \leqslant x < 0 \\ 2x - 1 & 0 \leqslant x \leqslant 2 \end{cases}$ está acotada en el intervalo $[-2, 2]$.

SOLUCIONES

1. El dominio de $f(x)$ es $\mathbf{R} - \{3\}$.

En $x = 3$ tiene una discontinuidad evitable, ya que:

$$\lim_{x \to 3} f(x) = \lim_{x \to 3} \frac{(x + 1) \cdot (x - 3)}{x - 3} = \lim_{x \to 3} (x + 1) = 4$$

siendo el verdadero valor en $x = 3$: $f(3) = 4$

2. El dominio de $f(x)$ es $\mathbf{R} - \{-1, 2\}$.

En $x = 2$ tiene una discontinuidad evitable, ya que:

$$\lim_{x \to 2} f(x) = \lim_{x \to 2} \frac{(x - 2) \cdot (x + 3)}{(x + 1) \cdot (x - 2)} = \lim_{x \to 2} \frac{x + 3}{x + 1} = \frac{5}{3}$$

El verdadero valor es $f(2) = \frac{5}{3}$.

En $x = -1$, $f(x)$ tiene una discontinuidad inevitable de salto infinito: $\lim\limits_{x \to -1^-} f(x) = \infty$ y $\lim\limits_{x \to -1^+} f(x) = -\infty$

3. El dominio de la función es $[2, \infty) - \{6\}$. En $x = 6$ tiene una discontinuidad evitable:

$$\lim_{x \to 6} f(x) = \lim_{x \to 6} \frac{(x - 6) \cdot (2 + \sqrt{x - 2})}{(2 - \sqrt{x - 2}) \cdot (2 + \sqrt{x - 2})} =$$

$$= \lim_{x \to 6} \frac{(x - 6) \cdot (2 + \sqrt{x - 2})}{6 - x} = -4$$

siendo el verdadero valor en $x = 6$: $f(6) = -4$

4. Se estudia la continuidad en $x = 1$

$$f(1) = \lim_{x \to 1^-} f(x) = \lim_{x \to 1^-} (x^2 - 2) = -1$$

$$\lim_{x \to 1^+} f(x) = \lim_{x \to 1^+} (x^2 - 3x + 1) = -1$$

Como $f(1) = \lim\limits_{x \to 1} f(x) = -1$, la función es continua en toda la recta real.

5. La función es continua salvo, quizá, en $x = -2$ y en $x = 3$. Se estudia la continuidad en esos puntos:

- En $x = -2$:

$$\left.\begin{cases} \lim\limits_{x \to -2^-} f(x) = \lim\limits_{x \to -2^-} (6 - x) = 8 \\ f(-2) = \lim\limits_{x \to -2^+} f(x) = \lim\limits_{x \to -2^+} 6 = 6 \end{cases}\right. \Rightarrow$$

$\Rightarrow$ la función tiene una discontinuidad inevitable de salto finito igual a 2.

- En $x = 3$, la función es continua:

$f(3) = \lim\limits_{x \to 3} f(x) = 6$

$$\begin{cases} \lim\limits_{x \to 3^-} f(x) = \lim\limits_{x \to 3^-} 6 = 6 \\ f(3) = \lim\limits_{x \to 3^+} f(x) = \lim\limits_{x \to 3^+} (x^2 - 3) = 9 - 3 = 6 \end{cases}$$

Por tanto, la función es continua en $\mathbf{R} - \{-2\}$

6. Para que la función sea continua en toda la recta real, debe ser continua en $x = 1$:

$$f(1) = \lim_{x \to 1^-} f(x) = \lim_{x \to 1^+} f(x)$$

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x \to 1^-} f(x) = \lim\limits_{x \to 1^-} (x^3 - 1) = 0 \\ f(1) = \lim\limits_{x \to 1^+} f(x) = \lim\limits_{x \to 1^+} (ax - 1) = a - 1 \end{array}\right\} \Rightarrow a = 1$$

7. Para que la función sea continua en toda la recta real, debe ser continua en $x = 2$:

$$f(2) = \lim_{x \to 2^-} f(x) = \lim_{x \to 2^+} f(x)$$

$$\begin{cases} \lim\limits_{x \to 2^-} f(x) = 2^2 + 2a + a - 1 = 3 + 3a \\ f(2) = \lim\limits_{x \to 2^+} f(x) = \mathrm{L}1 = 0 \end{cases} \Rightarrow$$

$\Rightarrow 3 + 3a = 0 \Rightarrow a = -1$

8. Para que la función sea continua en toda la recta real, debe ser continua en $x = 0$ y en $x = 3$:

- $f(0) = \lim\limits_{x \to 0^-} f(x) = \lim\limits_{x \to 0^+} f(x)$

$$\begin{cases} \lim\limits_{x \to 0^-} f(x) = \lim\limits_{x \to 0^-} \operatorname{sen} x = \operatorname{sen} 0 = 0 \\ f(0) = \lim\limits_{x \to 0^+} f(x) = \lim\limits_{x \to 0^+} (x^2 + ax + b) = b \end{cases} \Rightarrow$$

$\Rightarrow b = 0$

- $f(3) = \lim\limits_{x \to 0^+} f(x) = \lim\limits_{x \to 3^+} f(x)$

$$\begin{cases} \lim\limits_{x \to 3^-} f(x) = \lim\limits_{x \to 3^-} (x^2 + ax + b) = 9 + 3a + b \\ f(3) = \lim\limits_{x \to 3^+} f(x) = \lim\limits_{x \to 3^+} (x + 9) = 3 + 9 = 12 \end{cases} \Rightarrow$$

$\Rightarrow 9 + 3a = 12 \Rightarrow a = 1$

9. $f(x)$ es continua en todo su dominio $\mathbf{R} - \{0\}$; por tanto, es continua en $[1, 4]$.

Como verifica las condiciones del teorema de Weierstrass, se puede asegurar que está acotada en el intervalo; sin embargo, no está acotada en el dominio, ya que:

$\lim\limits_{x \to 0^-} f(x) = -\infty$ y $\lim\limits_{x \to 0^+} f(x) = \infty$

10. Se estudia la continuidad de la función en $x = 0$:

$$\lim_{x \to 0^-} f(x) = \lim_{x \to 0^-} (x^2 - 1) = -1$$

$$f(0) = \lim_{x \to 0^+} x = \lim_{x \to 0^+} (2x - 1) = -1$$

Como $f(0) = \lim\limits_{x \to 0} f(x) = -1$. La función es continua en $x = 0$ y, por tanto, en $[-2, 2]$. Como verifica las condiciones del teorema de Weierstrass, se puede asegurar que está acotada en ese intervalo.

12 Tasas de variación y derivadas

1. a) Halla la tasa de variación media de la función $f(x) = 3x^2 - x$ en el intervalo [2, 4].

b) Halla la tasa de variación media de la función $f(x) = -x^2 + x + 2$ en el intervalo [−2, 2].

2. a) Halla la tasa de variación media de la función $f(x) = 2x^2 - 2$ en el intervalo $[2, 2+h]$.

b) Halla la tasa de variación media de la función $f(x) = x - 3x^2 + 1$ en el intervalo $[-2, -2+h]$.

3. Aplicando la definición, calcula la derivada de la función $f(x) = 3x^2$ en el punto $x = -5$.

4. Aplicando la definición, calcula la derivada de la función $f(x) = x^3 + 2x^2$ en el punto $x = 2$.

5. Aplicando la definición, calcula la función derivada de la función $f(x) = x^2 - 5x + 6$.

6. Un móvil se desplaza según la ecuación $s(t) = 2t^2 - 2t + 3$, donde t es el tiempo en segundos y $s(t)$ es el desplazamiento en metros efectuado después de t segundos.

a) Calcula la velocidad media del móvil en el intervalo [0, 2].

b) Calcula la velocidad del móvil cuando han pasado exactamente 3 segundos.

7. Estudia la continuidad y la derivabilidad en $x = 0$ de la función $f(x) = \begin{cases} x & \text{si } x \leqslant 0 \\ x^2 & \text{si } x > 0 \end{cases}$

8. Estudia la continuidad y la derivabilidad en $x = 0$ de la función $f(x) = \begin{cases} x^2 & \text{si } x \leqslant 0 \\ x^3 & \text{si } x > 0 \end{cases}$

9. Estudia la continuidad y la derivabilidad de la función $f(x) = \dfrac{|x^2 - x|}{x}$ y comprueba tus resultados representando gráficamente esta función.

10. Estudia la continuidad y la derivabilidad de la función $f(x) = \begin{cases} a + \mathrm{L}(1 + x) & \text{si } x \leqslant 0 \\ x^2 + ax + a^2 & \text{si } x > 0 \end{cases}$ según los valores del parámetro a.

11. Determina el valor de los parámetros a y b para que la función $\begin{cases} x^3 + 3 & \text{si } x < 0 \\ ax + b & \text{si } 0 \leqslant x < 1 \\ 3 - 2x & \text{si } x \geqslant 1 \end{cases}$ sea continua en toda la recta real. Para esos valores, ¿la función es derivable en $x = 0$?, ¿y en $x = 1$?

SOLUCIONES

1. a) $\text{TVM}(f(x), [2, 4]) = \dfrac{f(4) - f(2)}{4 - 2} = \dfrac{44 - 10}{2} = 17$

b) $\text{TVM}(f(x), [2, 2]) = \dfrac{f(2) - f(-2)}{2 - (-2)} = \dfrac{0 - (-4)}{4} = 1$

2. a) $\text{TVM}(f(x), [2, 2+h]) = \dfrac{f(2 + h) - f(2)}{2 + h - 2} =$

$= \dfrac{2 \cdot (2 + h)^2 - 2 - 6}{h} = \dfrac{2h^2 + 8h}{h} =$

$= 2h + 8$

b) $\text{TVM}(f(x), [-2, -2 + h]) =$

$= \dfrac{f(-2 + h) - f(-2)}{-2 + h + 2} =$

$= \dfrac{-2 + h - 3 \cdot (-2 + h)^2 + 1 + 13}{h} =$

$= \dfrac{-3h^2 + 13h}{h} = -3h + 13$

3. $f'(-5) = \lim\limits_{h\to 0} \dfrac{f(-5 + h) - f(-5)}{h} =$

$= \lim\limits_{h\to 0} \dfrac{3h^2 - 30h}{h} = \lim\limits_{h\to 0} (3h - 30) = -30$

4. $f'(2) = \lim\limits_{h\to 0} \dfrac{f(2 + h) - f(2)}{h} =$

$= \lim\limits_{h\to 0} \dfrac{(2 + h)^3 + 2 \cdot (2 + h) - 16}{h} =$

$= \lim\limits_{h\to 0} \dfrac{h^3 + 8h^2 + 20h}{h} = \lim\limits_{h\to 0} (h^2 + 8h + 20) = 20$

5. $f'(x) = \lim\limits_{h\to 0} \dfrac{f(x + h) - f(x)}{h} =$

$= \lim\limits_{h\to 0} \dfrac{(x + h)^2 - 5(x + h) + 6 - x^2 + 5x - 6}{h} =$

$= \lim\limits_{h\to 0} \dfrac{h^2 + 2xh - 5h}{h} = \lim\limits_{h\to 0} (h + 2x - 5) = 2x - 5$

6. a) $\text{TVM}[0, 2] = \dfrac{s(2) - s(0)}{2 - 0} = \dfrac{7 - 3}{2} = 2$ m/s

b) $\text{TVI}(3) = \lim\limits_{h\to 0} \dfrac{s(3 + h) - s(3)}{h} = 10$ m/s

7. $f(x)$ es continua en $x = 0$, ya que:

$f(0) = \lim\limits_{x\to 0^-} f(x) = \lim\limits_{x\to 0^+} f(x) = 0$

No es derivable en $x = 0$, ya que:

$f'(0^-) = 1$ y $f'(0^+) = 0$

$Df(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x < 0 \\ 2x & \text{si } x > 0 \end{cases}$

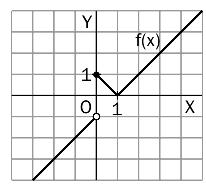
8. $f(x)$ es continua en $x = 0$, ya que:
$f(0) = \lim\limits_{x\to 0^-} f(x) = \lim\limits_{x\to 0^+} f(x) = 0$; es derivable en $x = 0$, ya que: $f'(0) = 0$

$Df(x) = \begin{cases} 2x & \text{si } x \leqslant 0 \\ 3x^2 & \text{si } x > 0 \end{cases}$

9. $f(x) = \begin{cases} x - 1 & \text{si } x < 0 \\ 1 - x & \text{si } 0 < x \leqslant 1 \\ x - 1 & \text{si } x > 1 \end{cases}$

$f(x)$ es discontinua en $x = 0$, ya que:
$\lim\limits_{x\to 0^-} f(x) = -1$ y $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x) = 1$, tiene una discontinuidad inevitable de salto finito igual a 2. En el resto de los valores es continua. $f(x)$ no es derivable en $x = 0$, por no ser continua, ni en $x = 1$, ya que en ese punto $f'(1^-) = -1$ y $f'(1^+) = 1$

$Df(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x < 0 \\ -1 & \text{si } 0 < x < 1 \\ 1 & \text{si } x > 1 \end{cases}$



10. Para que sea continua en $x = 0$:

$f(0) = \lim\limits_{x\to 0^-} f(x) = \lim\limits_{x\to 0^+} f(x) \Rightarrow a = a^2 \Rightarrow$

$\Rightarrow a = 0, a = 1$

Como $Df(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{1 + x} & \text{si } x < 0 \\ 2x + a & \text{si } x = 0 \end{cases}$ para que sea derivable en $x = 0$: $f'(0^-) = f'(0^+) \Rightarrow a = 1$

11. Para que sea continua en $x = 0$:
$f(0) = \lim\limits_{x\to 0^-} f(x) = \lim\limits_{x\to 0^+} f(x) \Rightarrow 3 = b$,
y para que sea continua en $x = 1$:

$\lim\limits_{x\to 1^-} f(x) = \lim\limits_{x\to 1^+} f(x) \Rightarrow a + b = 1 \Rightarrow a = -2$

La función $f(x) = \begin{cases} x^3 + 3 & \text{si } x < 0 \\ -2x + 3 & \text{si } 0 \leqslant x < 1 \\ 3 - 2x & \text{si } x \geqslant 1 \end{cases}$ es continua en toda la recta real, pero no es derivable en $x = 0$, su derivada es:

$D\,f(x) = \begin{cases} 3x^2 & \text{si } x < 0 \\ -2 & \text{si } x > 0 \end{cases}$ y las derivadas laterales en $x = 0$ son distintas.

13 Cálculo de derivadas

1. Calcula las derivadas de las siguientes funciones:

a) $f(x) = \dfrac{2x - 1}{3x + 1}$ b) $f(x) = (2x + 1) \cdot \sqrt{2x + 1}$ c) $f(x) = \dfrac{\text{sen } x + \cos x}{\text{sen } x}$

2. Calcula la primera, segunda y tercera derivadas de la función $f(x) = \dfrac{2x}{x^2 - 1}$ dando las expresiones correspondientes de la forma más simple posible.

3. Calcula las derivadas de las siguientes funciones:

a) $f(x) = \text{tg}\left(\dfrac{x^2 - 6x + 5}{x - 3}\right)$ b) $f(x) = \text{arctg}\left(\dfrac{e^x + x}{e^x - x}\right)$

4. Calcula las derivadas de las siguientes funciones:

a) $f(x) = \sqrt{\dfrac{x^2 + 1}{x^2 - 1}}$ b) $f(x) = e^{\frac{x^2}{(x-1)^2}}$

5. Calcula las derivadas de las siguientes funciones:

a) $f(x) = \left(1 + \dfrac{1}{x}\right)^x$ b) $f(x) = x^{x^3}$

6. Calcula las derivadas de las siguientes funciones:

a) $f(x) = \text{arctg } e^x - \text{L}\sqrt{\dfrac{e^{2x}}{1 + e^{2x}}}$ b) $f(x) = \text{L}(\text{L}^2(x \cdot \text{L}^3 x))$

7. Deriva la función $f(x) = \dfrac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}$ y calcula el valor de la función derivada en $x = 0$ y en $x = -1$.

8. Calcula las derivadas primera, segunda y tercera de la función $f(x) = \text{sen } x \cdot \text{sen } 2x$.

9. Calcula las cuatro primeras derivadas de la función $f(x) = \dfrac{e^x}{x}$.

10. Halla la expresión de la derivada de orden n de la función $f(x) = \dfrac{1}{ax + b}$ para a y b constantes.

11. Halla la expresión de la derivada de orden n de la función $f(x) = \text{L}(x + 1)$.

12. Obtén la expresión de la derivada de orden n de la función $f(x) = \dfrac{-1}{x}$

13. El espacio, en metros, recorrido por un móvil en función del tiempo, en segundos, viene dado por la expresión:

$$s = 0{,}05t^3 - 0{,}3t^2 + 3t$$

a) Halla la velocidad de móvil en cada instante.

b) Halla la velocidad cuando han transcurrido 5 segundos.

c) Halla la aceleración cuando han transcurrido 10 segundos.

14. Los lados de un rectángulo crecen a razón de 20 y 30 centímetros por minuto, respectivamente. Halla la velocidad con la que crece el área de dicho rectángulo en el momento que su lado más pequeño mide 800 cm.

SOLUCIONES

1. a) $\text{D } f(x) = \dfrac{(3x+1)\cdot 2 - (2x-1)\cdot 3}{(3x+1)^2} = \dfrac{5}{(3x+1)^2}$

b) $\text{D } f(x) = 2\sqrt{2x+1} + \dfrac{2\cdot(2x+1)}{2\sqrt{2x+1}} =$

$= 2\sqrt{2x+1} + \dfrac{2x+1}{\sqrt{2x+1}} = \dfrac{2(2x+1)+2x+1}{\sqrt{2x+1}} =$

$= \dfrac{6x+3}{\sqrt{2x+1}} = \dfrac{3(2x+1)\sqrt{2x+1}}{\sqrt{2x+1}\sqrt{3x+1}} = 3\sqrt{2x+1}$

c) $f(x) = 1 + \dfrac{\cos x}{\text{sen } x} \Rightarrow$

$\Rightarrow \text{D } f(x) = \dfrac{\text{sen } x\cdot(-\text{sen } x) - \cos x\cdot\cos x}{\text{sen}^2 x} =$

$= -\dfrac{1}{\text{sen}^2 x}$

2. $\text{D } f(x) = \dfrac{(x^2-1)\cdot 2 - 2x\cdot 2x}{(x^2-1)^2} = \dfrac{-2x^2-2}{(x^2-1)^2}$

$\text{D}^2 f(x) = \dfrac{(x^2-1)^2(-4x)+(2x^2+2)\cdot 2(x^2-1)\cdot 2x}{(x^2-1)^4} =$

$= \dfrac{(x^2-1)\cdot(-4x)+(2x^2+2)\cdot 2\cdot 2x}{(x^2-1)^3} = \dfrac{4x^3+12x}{(x^2-1)^3}$

$\text{D}^3 f(x) =$

$= \dfrac{(x^2-1)^3(12x^2+12)-(4x^3+12x)\cdot 3(x^2-1)^2\cdot 2x}{(x^2-1)^6} =$

$= \dfrac{(x^2-1)\cdot(12x^2+12)-(4x^3+12x)\cdot 3\cdot 2x}{(x^2-1)^4} =$

$= \dfrac{-12x^4-72x^2-12}{(x^2-1)^4}$

3. a) $Df(x) = \dfrac{1}{\cos^2\left(\dfrac{x^2-6x+5}{x-3}\right)}\cdot\dfrac{x^2-6x+13}{(x-3)^2}$

b) $Df(x) = \dfrac{1}{1+\left(\dfrac{e^x+x}{e^x-x}\right)^2}\cdot\dfrac{2e^x(1-x)}{(e^x-x)^2} =$

$= \dfrac{e^x(1-x)}{e^{2x}+x^2}$

4. a) $Df(x) = \dfrac{-2x}{(x^2-1)^2\cdot\sqrt{\dfrac{x^2+1}{x^2-1}}}$

b) $Df(x) = \dfrac{-2x}{(x-1)^3}\cdot e^{\frac{x^2}{(x-1)^2}}$

5. a) $Df(x) = \left(1+\dfrac{1}{x}\right)^x\left[\text{L}\left(1+\dfrac{1}{x}\right)-\dfrac{1}{x+1}\right]$

b) $Df(x) = x^{x^3}\cdot x^2\cdot(1+3\,\text{L}x)$

6. a) $Df(x) = \dfrac{e^x-1}{e^{2x}+1}$

b) $Df(x) = \dfrac{6+2\,\text{L}x}{x\cdot\text{L}x\cdot\text{L}(x\cdot\text{L}^3x)}$

7. $Df(x) = \dfrac{(e^x+e^{-x})^2-(e^x-e^{-x})^2}{(e^x+e^{-x})^2} = \dfrac{4}{(e^x+e^{-x})^2}$

$f'(0) = \dfrac{1}{4} \qquad f'(-1) = \dfrac{4e^2}{(e^2+1)^2}$

8. $Df(x) = 2\,\text{sen } x\cos 2x + \cos x\,\text{sen } 2x$

$D^2f(x) = 4\cos x\cos 2x - 5\,\text{sen } x\,\text{sen } 2x$

$D^3f(x) = -14\,\text{sen } x\cos 2x - 13\cos x\,\text{sen } 2x$

9. $Df(x) = e^x\left(\dfrac{1}{x}-\dfrac{1}{x^2}\right)$

$D^2f(x) = e^x\left(\dfrac{1}{x}-\dfrac{2}{x^2}+\dfrac{2}{x^3}\right)$

$D^3f(x) = e^x\left(\dfrac{1}{x}-\dfrac{3}{x^2}+\dfrac{6}{x^3}-\dfrac{6}{x^4}\right)$

$D^4f(x) = e^x\left(\dfrac{1}{x}-\dfrac{4}{x^2}+\dfrac{12}{x^3}-\dfrac{24}{x^4}+\dfrac{24}{x^5}\right)$

10. $Df(x) = -\dfrac{a}{(ax+b)^2}$

$D^2f(x) = \dfrac{2a^2}{(ax+b)^3}$

$D^3f(x) = -\dfrac{6a^3}{(ax+b)^4}$

$D^nf(x) = (-1)^n\dfrac{n!\cdot a^n}{(ax+b)^{n+1}}$

11. $Df(x) = \dfrac{1}{x+1} \qquad D^2f(x) = -\dfrac{1}{(x+1)^2}$

$D^3f(x) = \dfrac{2}{(x+1)^3}\ldots \qquad D^nf(x) = (-1)^{n-1}\dfrac{(n-1)!}{(x+1)^n}$

12. $D\,f(x) = \dfrac{1}{x^2} \qquad D^2\,f(x) = \dfrac{-2}{x^3},$

$D^3\,f(x) = \dfrac{6}{x^4}\ldots \qquad D^n\,f(x) = (-1)^{n+1}\dfrac{n!}{x^{n+1}}$

13. a) $v = s' = 0{,}15t^2 - 0{,}6t + 3$

b) $v(5) = 3{,}75$ m/s

c) $a = v' = 0{,}3t - 0{,}6 \Rightarrow a(10) = 2{,}4$ m/s^2

14. Los lados miden, en función del tiempo:

$a = 20t \qquad b = 30t$

El área medirá: $S = 600t^2$

La velocidad con la que crece el área es:

$v = S' = 1\,200t$

Cuando el lado pequeño mide:

$a = 20t = 800 \Rightarrow t = 40$

Por tanto:

$v(40) = 48\,000$ cm^2/min $= 4{,}8$ m^2/min

14 Funciones derivables: propiedades locales y globales

1. Halla la ecuación de la recta tangente a la curva de ecuación $y = 3^{2x^2+1}$ en el punto de abscisa $x = 0$.

2. Halla la ecuación de la tangente a la curva $y = x^2 - 5x + 6$ en el punto de abscisa $x = 1$ y comprueba si es paralela a la recta de ecuación $2x - 3y + 1 = 0$.

3. Determina la ecuación de una parábola que pase por los puntos $A(0, 1)$ y $B(2, 3)$ y halla un punto en el segmento de parábola comprendido entre ellos en el que la tangente a la curva sea paralela a la cuerda determinada por A y B.

4. Comprueba que la función $f(x) = \mathrm{L}(\mathrm{e} + \operatorname{sen} x)$ verifica las hipótesis del teorema de Rolle en el intervalo $[0, 5\pi]$ y halla los puntos en los que la recta tangente a la gráfica de $f(x)$ es horizontal.

5. Determina el valor de k para que la función $f(x) = 3x^2 + 4x - 4$ verifique las hipótesis del teorema de Rolle en el intervalo $[-2, k]$ y halla el valor $x = c$ establecido por dicho teorema.

6. Dada la función $f(x) = 3x^2 + 4x - 3$, halla el valor medio establecido por el teorema de Lagrange en el intervalo $[1, 3]$.

7. Determina los valores de a y b para que la función $f(x) = \begin{cases} \dfrac{a}{x-3} & \text{si } x < 1 \\ x^2 + b & \text{si } x \geq 1 \end{cases}$ cumpla las hipótesis del teorema de Lagrange en el intervalo $[-1, 2]$ y halla el valor intermedio correspondiente.

8. Calcula los límites siguientes:

a) $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{x^3 - 4x^2 - 12x}{x^2 - 6x}$

b) $\displaystyle\lim_{x\to 1} \frac{x^3 - 1}{x^2 - 1}$

9. Calcula los límites siguientes:

a) $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{\mathrm{e}^x - 1}{\operatorname{sen} x}$

b) $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{tg} x - x}{x - \operatorname{sen} x}$

10. Calcula los límites siguientes:

a) $\displaystyle\lim_{x\to 0^+} \frac{\mathrm{e}^x - \cos x}{1 - \cos^2 x}$

b) $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{1 - \cos x}{(e^x - 1)^2}$

11. Calcula el valor del siguiente límite: $A = \displaystyle\lim_{x\to 0} (1 + x^2)^{\frac{1}{1-\cos x}}$

12. Estudia la continuidad de la función $f(x) = \begin{cases} \dfrac{1 + \operatorname{sen} x - \mathrm{e}^x}{\mathrm{e}^x - 1} & \text{si } x \neq 0 \\ 0 & \text{si } x = 0 \end{cases}$

SOLUCIONES

1. $Df(x) = 4x \cdot 3^{2x^2+1} \cdot L3 \Rightarrow f'(0) = 0$
Además, $f(0) = 3$, el punto de tangencia es $(0, 3)$.
La ecuación de la tangente es $y - 3 = 0$.

2. $Df(x) = 2x - 5 \Rightarrow f'(1) = -3$
Además, $f(1) = 2$, el punto de tangencia es $(1, 2)$
La ecuación de la tangente es $y - 2 = -3 \cdot (x - 1) \Rightarrow$ $\Rightarrow 3x + y - 5 = 0$, que no es paralela a la recta $2x - 3y + 1 = 0$.

3. La parábola $f(x) = x^2 - x + 1$ verifica las hipótesis del teorema de Lagrange en el intervalo $[0, 2]$; el valor intermedio nos da el punto en que la tangente es paralela a la cuerda AB:

$$f'(c) = \frac{f(2) - f(0)}{2 - 0} = 1$$

$Df(x) = 2x - 1$; $f'(c) = 2c - 1 = 1 \Rightarrow c = 1$

El punto buscado es $C(1, -1)$.

4. Como $e + \text{sen}\, x > 0$ y es continua, la función $f(x)$ está definida y es continua en $[0, 5\pi]$; es derivable con derivada $Df(x) = \dfrac{\cos x}{e + \text{sen}\, x}$; además $f(0) = f(5\pi) = 1$, por lo que cumple las hipótesis del teorema de Rolle. Existe $c \in (0, 5\pi)$ tal que:

$f'(c) = 0 \Rightarrow \dfrac{\cos c}{e + \text{sen}\, c} = 0 \Rightarrow \cos c = 0$; por tanto, $c = \dfrac{\pi}{2} + k\pi$ con $k = 0, 1, \ldots, 4$.

5. $f(x)$ es continua y derivable en todo $\mathbf{R}$ por ser un polinomio, luego lo es en $[-2, k]$; por tanto:

$f(-2) = f(k) \Rightarrow 3k^2 + 4k - 4 = 0 \Rightarrow k = \dfrac{2}{3}$

El valor c tal que $f'(c) = 0$ es $6c + 4 = 0 \Rightarrow$ $\Rightarrow c = -\dfrac{2}{3}$

6. $f(x)$ es continua y derivable en $[1, 3]$ por serlo en $\mathbf{R} \Rightarrow$ existe $c \in (1, 3)$ tal que:

$$f'(c) = \frac{f(3) - f(1)}{3 - 1} \Rightarrow 6c + 4 = \frac{36 - 4}{2} \Rightarrow c = 2$$

7. Para que sea continua en $x = 1$:

$$f(1) = \lim_{x \to 1^-} f(x) = \lim_{x \to 1^+} f(x) \Rightarrow -\frac{a}{2} = 1 + b$$

Para que sea derivable en $x = 1$:

$$f'(1^-) = f'(1^+) \Rightarrow -\frac{a}{4} = 2$$

Resolviendo el sistema $a = -8$ y $b = 3$.

La función $f(x) = \begin{cases} \dfrac{-8}{x - 3} & \text{si } x < 1 \\ x^2 + 3 & \text{si } x \geqslant 1 \end{cases}$

es continua y derivable en $[-1, 2]$; por el teorema de Lagrange, existe $c \in (-1, 2)$ tal que:

$$f'(c) = \frac{f(2) - f(-1)}{2 - (-1)} = \frac{5}{3}$$

$Df(x) = \begin{cases} \dfrac{8}{(x - 3)^2} & \text{si } x < 1 \\ 2x & \text{si } x \geqslant 1 \end{cases}$, igualando la derivada el único valor válido es $c = +\dfrac{2}{5}\sqrt{30}$.

8. a) $\displaystyle \lim_{x \to 0} \frac{x^3 - 4x^2 - 12x}{x^2 - 6x} \underset{(1)}{=} \lim_{x \to 0} \frac{3x^2 - 8x - 12}{2x - 6} = 2$

b) $\displaystyle \lim_{x \to 1} \frac{x^3 - 1}{x^2 - 1} \underset{(1)}{=} \lim_{x \to 1} \frac{3x^2}{2x} = \lim_{x \to 1} \frac{3x}{2} = \frac{3}{2}$

9. a) $\displaystyle \lim_{x \to 0} \frac{e^x - 1}{\text{sen}\, x} \underset{(1)}{=} \lim_{x \to 0} \frac{e^x}{\cos x} = 1$

b) $\displaystyle \lim_{x \to 0} \frac{\text{tg}\, x - x}{x - \text{sen}\, x} \underset{(1)}{=} \lim_{x \to 0} \frac{\text{tg}^2\, x}{1 - \cos x} \underset{(1)}{=}$

$\displaystyle = \lim_{x \to 0} \frac{2\, \text{tg}\, x\, (1 + \text{tg}^2\, x)}{\text{sen}\, x} = \lim_{x \to 0} \frac{2\,(1 + \text{tg}^2\, x)}{\cos x} = 2$

10. a) $\displaystyle \lim_{x \to 0^+} \frac{e^x - \cos x}{1 - \cos^2 x} \underset{(1)}{=} \lim_{x \to 0^+} \frac{e^x + \text{sen}\, x}{2 \cos x\, \text{sen}\, x} = \infty$

b) $\displaystyle \lim_{x \to 0} \frac{1 - \cos x}{(e^x - 1)^2} \underset{(1)}{=} \lim_{x \to 0} \frac{\text{sen}\, x}{2\,(e^x - 1)\, e^x} \underset{(1)}{=}$

$\displaystyle = \lim_{x \to 0} \frac{\cos x}{4e^{2x} - 2e^x} = \frac{1}{2}$

11. Tomando logaritmos:

$\displaystyle LA = \lim_{x \to 0} \frac{L(1 + x^2)}{1 - \cos x} \underset{(1)}{=} \lim_{x \to 0} \frac{2x}{(1 + x^2)\, \text{sen}\, x} \underset{(1)}{=}$

$\displaystyle = \lim_{x \to 0} \frac{2}{2x\, \text{sen}\, x + (1 + x^2) \cos x} = 2 \Rightarrow A = e^2$

12. Para que sea continua en $x = 0$: $f(0) = \displaystyle\lim_{x \to 0} f(x)$

$\displaystyle \lim_{x \to 0} \frac{1 + \text{sen}\, x - e^x}{e^x - 1} \underset{(1)}{=} \lim_{x \to 0} \frac{\cos x - e^x}{e^x} = 0 = f(0)$

por tanto, la función es continua en $x = 0$.

Nota: [1] Aplicando la regla de L'Hôpital.

15 Monotonía y curvatura

1. Dada la función $f(x) = \dfrac{1}{x^2 - 1}$:

a) Determina los intervalos de crecimiento y de decrecimiento.

b) Calcula los puntos en los que alcanza un máximo o un mínimo relativo.

2. Dada la función $f(x) = \dfrac{4x}{x^2 + 4}$, se pide:

a) Sus intervalos de crecimiento y de decrecimiento.

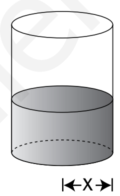
b) Sus intervalos de concavidad y convexidad.

c) Los máximos y mínimos relativos y los puntos de inflexión.

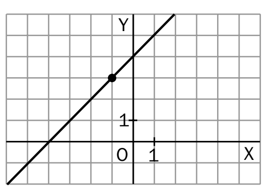
3. Estudia la curvatura de la función $f(x) = x \cdot e^{-x^2}$ determinando sus intervalos de concavidad y convexidad y los puntos de inflexión.

4. La función $f(x) = a \cdot e^{2x} + b \cdot x^2 + c$ tiene un punto de inflexión en (0, 3) y la pendiente de la recta tangente en ese punto es igual al valor $L = \lim\limits_{x \to 0} \dfrac{2x}{2 \operatorname{sen} x - x}$. Calcula los valores de a, b y c.

5. ¿Cuáles deben ser las dimensiones (altura y radio de la base) de un depósito de agua cilíndrico de volumen máximo, si su superficie total, incluidas las dos tapas, es de 300 m^2?



6. Halla la ecuación de la recta que pasa por el punto (−1, 3) y corta los ejes de coordenadas determinando un triángulo de área máxima.



7. Considera la función $f(x) = x^3 + bx^2 + cx + d$.

a) ¿Qué valores deben tomar b, c y d para que la función tenga un punto de inflexión en $x = 1$ y la recta tangente a la gráfica de $f(x)$ en ese punto sea $y = 2x - 3$?

b) Para esos valores, estudia el crecimiento y la curvatura de la función.

SOLUCIONES

1. Dominio: $\mathbf{R} - \{-1, 1\}$; $f'(x) = -\dfrac{2x}{(x^2 - 1)^2}$

se anula en $x = 0$. Signo de $f'(x)$:

$+ \quad -1 \quad + \quad 0 \quad - \quad 1 \quad -$

La función es creciente en $(-\infty, -1)$ y $(-1, 0)$ y es decreciente en $(0, 1)$ y $(1, \infty)$

Máximo: $(0, -1)$

2. Dominio: $\mathbf{R}$

$$f'(x) = \frac{16 - 4x^2}{(x^2 + 4)^2} = \frac{4 \cdot (2 - x) \cdot (2 + x)}{(x^2 + 4)^2}$$

Se anula en $x = -2$ y $x = 2$

$- \quad -2 \quad + \quad 2 \quad -$

La función es creciente en $(-2, 2)$ y es decreciente en $(-\infty, -2)$ y en $(2, \infty)$.

Mínimo relativo: $(-2, -1)$. Máximo relativo: $(2, 1)$

$$f''(x) = \frac{8x^3 - 96x}{(x^2 + 4)^3} = \frac{8x \cdot (x^2 - 12)}{(x^2 + 4)^3}$$

Se anula en $x = 0$, $x = -2\sqrt{3}$ y en $x = 2\sqrt{3}$

$- \quad -2\sqrt{3} \quad + \quad 0 \quad - \quad 2\sqrt{3} \quad +$

$f(x)$ es cóncava en $(-\infty, -2\sqrt{3})$ y en $(0, 2\sqrt{3})$ y es convexa en $(-2\sqrt{3}, 0)$ y en $(2\sqrt{3}, \infty)$.

Puntos de inflexión:

$\left(-2\sqrt{3}, -\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)$, $(0, 0)$ y $\left(2\sqrt{3}, \dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)$

3. $f'(x) = e^{-x^2}(1 - 2x^2)$

$f''(x) = 2x \cdot (2x^2 - 3) \cdot e^{-x^2}$

La derivada segunda se anula en $x = 0$

y en $x = \pm\dfrac{\sqrt{6}}{2}$

Signo de $f''(x)$:

$- \quad -\frac{\sqrt{6}}{2} \quad + \quad 0 \quad - \quad \frac{\sqrt{6}}{2} \quad +$

$f(x)$ es cóncava en $\left(-\infty, -\dfrac{\sqrt{6}}{2}\right) \cup \left(0, \dfrac{\sqrt{6}}{2}\right)$

y convexa en $\left(-\dfrac{\sqrt{6}}{2}, 0\right) \cup \left(\dfrac{\sqrt{6}}{2}, \infty\right)$

Puntos de inflexión: $\left(-\dfrac{\sqrt{6}}{2}, -\dfrac{\sqrt{6}}{2} e^{-\frac{3}{2}}\right)$, $(0, 0)$

y $\left(\dfrac{\sqrt{6}}{2}, \dfrac{\sqrt{6}}{2} e^{-\frac{3}{2}}\right)$

4. $f'(x) = 2a \cdot e^{2x} + 2bx$ y $f''(x) = 4a \cdot e^{2x} + 2b$

Aplicando la regla de L'Hôpital:

$L = \lim\limits_{x \to 0} \dfrac{2}{2\cos x - 1} = 2 \Rightarrow f'(0) = 2 \Rightarrow$

$\Rightarrow 2a = 2 \Rightarrow a = 1$

Como $(0, 3)$ es punto de inflexión:

$f(0) = 3 \Rightarrow a + c = 3 \Rightarrow c = 2$

$f''(0) = 0 \Rightarrow 4a + 2b = 0 \Rightarrow b = -2$

La función es: $f(x) = e^{2x} - 2x^2 + 2$

5. Superficie: $2\pi x^2 + 2\pi xy = 300 \Rightarrow$

$\Rightarrow y = \dfrac{300 - 2\pi x^2}{2\pi x}$

Volumen: $C(x, y) = \pi x^2 y \Rightarrow V(x) = 150x - \pi x^3$

Se busca el máximo de $V(x)$ anulando la derivada primera, $V'(x) = 150 - 3\pi x^2$

$V'(x) = 0 \Rightarrow x = \pm\dfrac{5\sqrt{2\pi}}{\pi}$. La solución negativa no tiene sentido. Como $V''\left(\dfrac{5\sqrt{2\pi}}{\pi}\right) < 0$, se alcanza el volumen máximo para $x = \dfrac{5\sqrt{2\pi}}{\pi} \approx 4$ m

$y = \dfrac{10\sqrt{2\pi}}{\pi} \approx 8$ m

6. La recta es de la forma $y - 3 = m(x + 1)$

Los puntos de corte con los ejes son: $\left(-\dfrac{3 + m}{m}, 0\right)$ y $(0, m + 3)$. El área del triángulo depende de la pendiente m, $A(m) = \dfrac{1}{2}\left(-\dfrac{3 + m}{m}\right) \cdot (m + 3)$

La derivada $A'(m) = \dfrac{1}{2}\left(-1 + \dfrac{9}{m^2}\right)$ se anula en $m = \pm 3$. Como $A''(m) = -\dfrac{9}{m^3} \Rightarrow A''(3) < 0$, el área es máxima para $m = 3$.

La recta buscada es: $y - 3 = 3(x + 1)$

7. $f'(x) = 3x^2 + 2bx + c$ y $f''(x) = 6x + 2b$

a) $f''(1) = 0 \Rightarrow 6 + 2b = 0 \Rightarrow b = -3$; la pendiente de la tangente es $m = 2$: $f'(1) = 2 \Rightarrow \Rightarrow 3 + 2b + c = 2 \Rightarrow c = 5$; $f(1) = -1 \Rightarrow \Rightarrow 1 + b + c + d = -1 \Rightarrow d = -4$, la función es $f(x) = x^3 - 3x^2 + 5x - 4$.

b) Como $f'(x) = 3x^2 - 6x + 5 > 0$, la función es siempre creciente. Estudiando el signo de $f''(x) = 6x - 6$ vemos que la función es cóncava en $(-\infty, 1)$ y convexa en $(1, \infty)$, ya que el único punto de inflexión es $(1, -1)$.

16 Estudio y representación de funciones

1. a) Dibuja la gráfica de la función $f(x) = x^2 - 2x - 3$ atendiendo a los siguientes puntos: dominio de definición, corte con los ejes, intervalos de monotonía e intervalos de curvatura. A partir de la gráfica anterior, establece razonadamente cómo serían las gráficas de las funciones:

i) $g(x) = x^2 - 2|x| - 3$

ii) $m(x) = -x^2 + 2x + 3$

iii) $n(x) = (x - 2)^2 - 2(x - 2) - 3$

b) Dibuja las gráficas de las tres funciones anteriores.

2. Representa la función $f(x) = |x^2 - 2x - 3|$ y estudia sus simetrías.

3. Dada la función $f(x) = \left|\dfrac{x^2}{x - 1}\right|$, se pide:

a) Representa la función.

b) Indica su dominio y la ecuación de sus asíntotas.

c) Indica sus intervalos de crecimiento y decrecimiento.

4. Dada la función $f(x) = \dfrac{x^3 + 3x^2 - 4}{x^2}$, se pide:

a) Dominio y puntos de corte con los ejes.

b) Extremos relativos y los intervalos de crecimiento y de decrecimiento.

c) Asíntotas verticales y oblicuas.

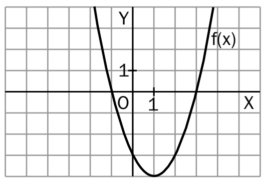
d) Representa la gráfica de la función.

5. Determina el valor del parámetro k para que la recta $y = 2x + 6$ sea una asíntota oblicua de la función $f(x) = \dfrac{2x^2}{x - k}$ y halla la ecuación de las restantes asíntotas de esta función.

6. Halla las asíntotas de la función $f(x) = x^2 \cdot e^{-x}$ y comprueba si en algún caso la asíntota corta la gráfica de la función, calculando el punto de corte.

SOLUCIONES

1. a) Dominio: $\mathbb{R}$. Puntos de corte con los ejes: $(0, -3)$, $(-1, 0)$, $(3, 0)$; $f'(x) = 2x - 2$ se anula en $x = 1$, la función decrece en $(-\infty, 1)$ y crece en $(1, \infty)$; mínimo $(1, -4)$; como $f''(x) = 2 > 0$ la función es convexa.

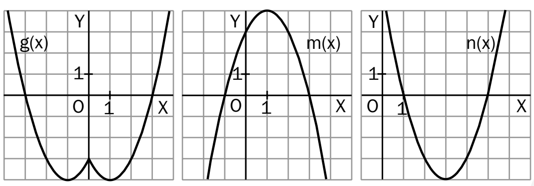


i) $g(x) = f(|x|)$ su gráfica coincide con la de $f(x)$ en los valores positivos y es simétrica respecto al eje OY.

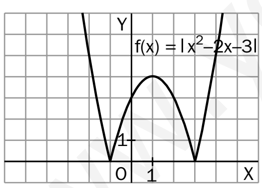
ii) $m(x) = -f(x)$ su gráfica es simétrica respecto al eje OX de la de $f(x)$.

iii) $n(x) = f(x - 2)$ es la función trasladada según el vector $\vec{u} = (2, 0)$.

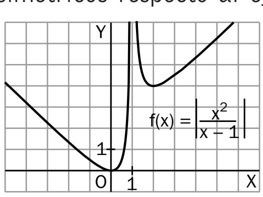
b)



2. Se representa la parábola $g(x) = x^2 - 2x - 3$ y como $f(x) = |g(x)|$, los trozos negativos se sustituyen por sus simétricos respecto al eje OX.
Como proviene de una parábola, es simétrica respecto al eje $x = 1$.



3. a) El estudio y la gráfica se obtienen a partir de la función $g(x) = \dfrac{x^2}{x-1}$ teniendo en cuenta que los trozos negativos de esta ($x < 1$) se sustituyen por sus simétricos respecto al eje OX.



b) Dominio: $\mathbb{R} - \{1\}$

- Asíntota vertical: $x = 1$
  $\lim\limits_{x \to 1^-} f(x) = \lim\limits_{x \to 1^+} f(x) = \infty$
- Asíntotas oblicuas: $y = -x - 1$ si $x \longrightarrow -\infty$, $y = x + 1$ si $x \longrightarrow \infty$

c) $f(x)$ es creciente en $(0, 1) \cup (2, \infty)$ y decreciente en $(-\infty, 0) \cup (1, 2)$

4. a) Dominio $\mathbb{R} - \{0\}$

Puntos de corte con los ejes: $(-2, 0)$ y $(1, 0)$

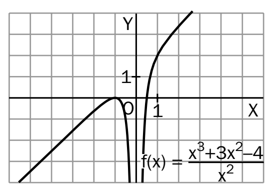
b) $f'(x) = \dfrac{x^3 + 8}{x^3}$ se anula en $x = -2$

Signo de $f'(x)$: $+$ $\;-2\;$ $-$ $\;0\;$ $+$

La función crece en $(-\infty, -2) \cup (0, \infty)$ y decrece en $(-2, 0)$. Tiene un máximo relativo en $(-2, 0)$

c)
- $x = 0$ es asíntota vertical:
  $$\lim_{x \to 0^-} f(x) = -\infty \text{ y } \lim_{x \to 0^+} f(x) = -\infty$$
- $y = x + 3$ es asíntota oblicua:
  $$m = \lim_{x \to \infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \to \infty} \frac{x^3 + 3x^2 - 4}{x^3} = 1$$
  $$n = \lim_{x \to \infty} (f(x) - x) = \lim_{x \to \infty} \frac{3x^2 - 4}{x^2} = 3$$

d)



5. Como $\lim\limits_{x \to \infty} \dfrac{f(x)}{x} = 2$ debe ser $\lim\limits_{x \to \infty} (f(x) - 2x) = 6$

$$\Rightarrow 6 = \lim_{x \to \infty}\left(\frac{2x^2}{x - k} - 2x\right) = \lim_{x \to \infty} \frac{2kx}{x - k} = 2k \Rightarrow$$
$$\Rightarrow k = 3$$

La función es $f(x) = \dfrac{2x^2}{x - 3}$ y tiene además una asíntota vertical en $x = 3$.

6. Dominio $\mathbb{R}$. No tiene asíntotas verticales.

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = \lim_{x \to \infty} \frac{x^2}{e^x} = \lim_{x \to \infty} \frac{2x}{e^x} = \lim_{x \to \infty} \frac{2}{e^x} = 0$$

$y = 0$ es asíntota horizontal cuando $x \longrightarrow \infty$

Punto de corte $(0, 0)$

$\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = \lim\limits_{x \to -\infty} x^2 \cdot e^{-x} = \infty$, no hay asíntota horizontal cuando $x \longrightarrow -\infty$

$m = \lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{f(x)}{x} = \lim\limits_{x \to -\infty} (x \cdot e^{-x}) = -\infty$, no hay asíntota oblicua cuando $x \longrightarrow -\infty$.

17 y 18 Integrales indefinidas. Métodos de integración

1. Calcula la primitiva de la función $f(x) = \dfrac{x}{\sqrt{x^2 + 1}}$ que cumple la condición de que su gráfica pasa por el punto (0, 3).

2. Halla la ecuación de una curva $y = f(x)$ sabiendo que pasa por el origen de coordenadas y que la pendiente de la recta tangente en el punto genérico de abscisa x es $m(x) = 3x^2 + 1$.

3. Calcula las siguientes integrales indefinidas:

a) $\displaystyle\int e^x \cdot (e^x + 1)^4\, dx$ b) $\displaystyle\int x \cdot e^{x^2 + 2}\, dx$

4. Calcula las siguientes integrales indefinidas:

a) $\displaystyle\int \frac{L^2 x}{x}\, dx$ b) $\displaystyle\int \frac{1}{x \cdot Lx}\, dx$

5. Calcula las siguientes integrales indefinidas:

a) $\displaystyle\int x \cdot \text{sen}\, x\, dx$ b) $\displaystyle\int x^2 \cdot 2^x\, dx$

6. Calcula las siguientes integrales indefinidas:

a) $\displaystyle\int \frac{2x + 5}{x^2 + 1}\, dx$ b) $\displaystyle\int \frac{x + 1}{9 + x^2}\, dx$

7. Calcula las siguientes integrales indefinidas:

a) $\displaystyle\int \frac{x^4 + x^3 - x^2 - x + 3}{x^2 + x}\, dx$ b) $\displaystyle\int \frac{x^2 - 4}{x^3 + x^2 - x - 1}\, dx$

8. Determina todas las primitivas de la función $f(x) = \dfrac{x + 3}{x^3 - 3x^2 + 4x - 12}$

9. Calcula las siguientes integrales indefinidas:

a) $\displaystyle\int e^x \cdot \sqrt{1 - e^{2x}}\, dx$ b) $\displaystyle\int \text{sen}\, x \cdot \text{sen}\, 2x\, dx$

SOLUCIONES

Nota: Siguiendo el criterio del libro, la constante C se sobrentiende, por lo que solo se escribe cuando se pide su valor.

1. $F(x) = \int \frac{x}{\sqrt{x^2+1}}\,dx = \sqrt{x^2+1} + C$

Como $F(0) = 3 \Rightarrow C = 2$ y $F(x) = \sqrt{x^2+1} + 2$

2. $f(x) = \int m(x)\,dx = \int (3x^2+1)\,dx = x^3 + x + C$

$f(0) = 0 \Rightarrow C = 0$ y $f(x) = x^3 + x$

3. a) Cambio de variable: $t = e^x + 1$; $dt = e^x\,dx$

$\int t^4\,dt = \frac{t^5}{5} = \frac{1}{5}(e^x+1)^5$

b) Cambio de variable: $t = x^2 + 2$; $dt = 2x\,dx$

$\int \frac{1}{2}e^t\,dt = \frac{1}{2}e^t = \frac{1}{2}e^{x^2+2}$

4. a) Si $t = \mathrm{L}x$; $dt = \frac{dx}{x} \Rightarrow \int t^2\,dt = \frac{t^3}{3} = \frac{1}{3}\mathrm{L}^3x$

b) Si $t = \mathrm{L}x$; $dt = \frac{dx}{x} \Rightarrow \int \frac{1}{t}\,dt = \mathrm{L}t = \mathrm{L}(\mathrm{L}x)$

5. a) Integración por partes:

$u = x,\ dv = \operatorname{sen} x \cdot dx \Rightarrow du = dx,\ v = -\cos x$

$I = -x\cos x - \int(-\cos x)\,dx = -x\cos x + \operatorname{sen} x$

b) $u = x^2,\ dv = 2^x\,dx \Rightarrow du = 2x\,dx,\ v = \frac{2^x}{\mathrm{L}2}$

$I = \frac{x^2\cdot 2^x}{\mathrm{L}2} - \int 2x\cdot\frac{2^x}{\mathrm{L}2}\,dx = \frac{x^2\cdot 2^x}{\mathrm{L}2} - \frac{2}{\mathrm{L}2}\int x\cdot 2^x\,dx$

Integrando de nuevo:

$u = x,\ dv = 2^x\,dx \Rightarrow du = dx,\ v = \frac{2^x}{\mathrm{L}2}$

$I = \frac{x^2\cdot 2^x}{\mathrm{L}2} - \frac{2}{\mathrm{L}2}\left(\frac{x\cdot 2^x}{\mathrm{L}2} - \int\frac{2^x}{\mathrm{L}\,2}\,dx\right) =$

$= \frac{x^2\cdot 2^x}{\mathrm{L}2} - \frac{x\cdot 2^{x+1}}{(\mathrm{L}2)^2} + \frac{2^{x+1}}{(\mathrm{L}2)^3}$

6. a) $I = \int\frac{2x}{x^2+1}\,dx + \int\frac{5}{x^2+1}\,dx =$

$= \mathrm{L}\,|x^2+1| + 5\operatorname{arctg} x$

b) $I = \int\frac{x}{9+x^2}\,dx + \int\frac{1}{9+x^2}\,dx =$

$= \frac{1}{2}\int\frac{2x}{9+x^2}\,dx + \frac{1}{3}\int\frac{\frac{1}{3}}{1+\left(\frac{x}{3}\right)^2}\,dx =$

$= \frac{1}{2}\mathrm{L}\,|9+x^2| + \frac{1}{3}\operatorname{arctg}\frac{x}{3}$

7. a) Haciendo la división entera:

$I = \int\left(x^2 - 1 + \frac{3}{x^2+x}\right)dx$

Descomponiendo en fracciones simples:

$\frac{3}{x^2+x} = \frac{A}{x} + \frac{B}{x+1}$

es decir, $3 = A(x+1) + Bx$

Dando valores a x se obtiene $A = 3$ y $B = -3$

$\Rightarrow I = \int\left(x^2 - 1 + \frac{3}{x} - \frac{3}{x+1}\right)dx =$

$= \frac{x^3}{3} - x + 3\,\mathrm{L}\,|x| - 3\,\mathrm{L}\,|x+1|$

b) $x^3 + x^2 - x - 1 = (x-1)(x+1)^2$

Descomponiendo en fracciones simples:

$I = -\frac{3}{4}\int\frac{dx}{x-1} + \frac{7}{4}\int\frac{dx}{x+1} + \frac{3}{2}\int\frac{dx}{(x+1)^2} =$

$= -\frac{3}{4}\mathrm{L}\,|x-1| + \frac{7}{4}\mathrm{L}\,|x+1| - \frac{3}{2}\frac{1}{x+1}$

8. $x^3 - 3x^2 + 4x - 12 = (x^2+4)(x-3)$

Descomponiendo en fracciones simples:

$I = \frac{6}{13}\int\frac{dx}{x-3} - \frac{6}{13}\int\frac{x}{x^2+4}\,dx - \frac{5}{13}\int\frac{dx}{x^2+4} =$

$= \frac{6}{13}\mathrm{L}\,|x-3| + \frac{3}{13}\mathrm{L}\,|x^2+4| - \frac{5}{26}\operatorname{arctg}\frac{x}{2}$

9. a) Cambio de variable $e^x = \operatorname{sen} t$, $e^x dx = \cos t\,dx$

$I = \int\sqrt{1-\operatorname{sen}^2 t}\cdot\cos t\,dt = \int\cos^2 t\,dt =$

$= \int\frac{1+\cos 2t}{2}\,dt = \frac{1}{2}t + \frac{1}{2}\operatorname{sen} t\cdot\cos t$

Deshaciendo el cambio de variable:

$I = \frac{1}{2}\operatorname{arcsen} e^x + \frac{1}{2}e^x\sqrt{1-e^{2x}}$

b) $I = \int\frac{\cos(2x-x) - \cos(2x+x)}{2}\,dx =$

$= \frac{1}{2}\int\cos x\,dx - \frac{1}{2}\int\cos 3x\,dx =$

$= \frac{1}{2}\operatorname{sen} x - \frac{1}{6}\operatorname{sen} 3x$

19 Integral definida

1. Calcula el valor de las siguientes integrales definidas:

a) $\displaystyle\int_0^2 x \cdot e^{-2x^2}\, dx$ b) $\displaystyle\int_0^{\pi} x^2 \operatorname{sen} x\, dx$

2. Calcula el valor de las siguientes integrales definidas:

a) $\displaystyle\int_0^1 x \operatorname{arctg} x\, dx$ b) $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \operatorname{sen}^3 x\, dx$

3. Calcula el valor de las siguientes integrales definidas:

a) $\displaystyle\int_1^e (\mathrm{L}x)^2\, dx$ b) $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{\sqrt{3 - 2 \operatorname{tg} x}}{\cos^2 x}\, dx$

4. Calcula el valor de las siguientes integrales definidas:

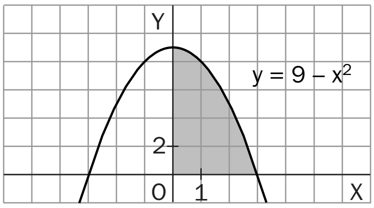
a) $\displaystyle\int_{-1}^0 \frac{x^3 + x^2 - x + 5}{x^2 + x - 2}\, dx$ b) $\displaystyle\int_2^3 \frac{dx}{(x - 1)(x + 2)^2}$

5. Calcula los puntos donde se anula la derivada de la función $f(x) = -2x + \displaystyle\int_0^{2x} e^{t^2 - 10t + 24}\, dt$

6. a) Mediante el cálculo directo de la integral definida, demuestra que $\displaystyle\int_{-1}^1 \frac{x}{x^2 - 4} dx = 0$

b) Demuestra la igualdad anterior aplicando las propiedades de la integral definida.

7. Halla una aproximación por defecto del área de la región que aparece en la figura y que está limitada por la función $f(x) = 9 - x^2$ y el eje OX en el intervalo [1, 3] dividiendo este en tres partes iguales.



8. Halla una aproximación por exceso del área de la región limitada por la función $f(x) = \dfrac{1}{x}$ y el eje OX en el intervalo [2, 4], dividiendo este en dos partes iguales.

9. Calcula la derivada de la función $F(x) = \displaystyle\int_0^{x^2} (t^2 - 1)\, dt$

SOLUCIONES

1. a) $\int_0^2 x \cdot e^{-2x^2}\,dx = \left[\frac{-1}{4} e^{-2x^2}\right]_0^2 = \frac{1}{4}(1 - e^{-8})$

b) $\int_0^{\pi} x^2 \operatorname{sen} x\,dx =$

$= \left[-x^2 \cos x + 2x \operatorname{sen} x + 2\cos x\right]_0^{\pi} = \pi^2 - 4$

2. a) $\int_0^1 x \operatorname{arctg} x\,dx =$

$= \left[\frac{x^2}{2}\operatorname{arctg} x - \frac{1}{2}x + \frac{1}{2}\operatorname{arctg} x\right]_0^1 =$

$= \frac{\pi}{4} - \frac{1}{2}$

b) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \operatorname{sen}^3 x\,dx = \left[-\cos x + \frac{1}{3}\cos^3 x\right]_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{2}{3}$

3. a) $\int_1^e (\mathrm{L}x)^2\,dx = \left[x(\mathrm{L}x)^2 - 2x\,\mathrm{L}x + 2x\right]_1^e = e - 2$

b) $\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{\sqrt{3 + 2\operatorname{tg} x}}{\cos^2 x}\,dx = \left[-\frac{\sqrt{(3 + 2\operatorname{tg} x)^3}}{3}\right]_0^{\frac{\pi}{4}} =$

$= \frac{3\sqrt{3} - 1}{3}$

4. a) $\int_{-1}^0 \frac{x^3 + x^2 - x + 5}{x^2 + x - 2}\,dx =$

$= \int_{-1}^0 \left(x + \frac{2}{x - 1} - \frac{1}{x + 2}\right)dx =$

$= \left[x^2 + 2\mathrm{L}\,|x - 1| - \mathrm{L}\,|x + 2|\right]_{-1}^0 =$

$= -\frac{1}{2} - 3\mathrm{L}2$

b) $\int_2^3 \frac{dx}{(x - 1)(x + 2)^2} =$

$= \int_2^3 \left(\frac{\frac{1}{9}}{x - 1} + \frac{-\frac{1}{9}}{x + 2} + \frac{-\frac{1}{3}}{(x + 2)^2}\right)dx =$

$= \left[\frac{1}{9}\mathrm{L}\,|x - 1| - \frac{1}{9}\mathrm{L}\,|x + 2| + \frac{1}{3}\frac{1}{x + 2}\right]_2^3 =$

$= \frac{1}{9}\mathrm{L}\left(\frac{8}{5}\right) - \frac{1}{60}$

5. Se considera $F(x) = G(u) = \int_0^u e^{t^2 - 10t + 24}\,dt$ con $u = 2x$ y $u' = 2$

Entonces $F'(x) = \frac{dF}{dx} = \frac{dG(u)}{du}\frac{du}{dx} =$

$= e^{u^2 - 10u + 24} \cdot u' = 2e^{4x^2 - 20x + 24}$, es decir:

$f'(x) = -2 + 2e^{4x^2 - 20x + 24} \Rightarrow$

$\Rightarrow f'(x) = 0$ si $e^{4x^2 - 20x + 24} = 1 \Rightarrow$

$\Rightarrow 4x^2 - 20x + 24 = 0 \Rightarrow x = 2$ y $x = 3$

6. a) Descomponiendo en fracciones simples:

$\int_{-1}^1 \frac{x}{x^2 - 4}\,dx = \int_{-1}^1 \left(\frac{\frac{1}{2}}{x + 2} + \frac{\frac{1}{2}}{x - 2}\right)dx =$

$= \left[\frac{1}{2}\mathrm{L}\,|x^2 - 4|\right]_{-1}^1 = \frac{1}{2}\mathrm{L}|3| - \frac{1}{2}\mathrm{L}(3) = 0$

b) La función $f(x) = \frac{x}{x^2 - 4}$ es impar, es decir, $f(-x) = -f(x)$, lo cual implica que:

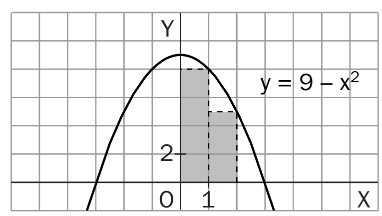
$\int_0^a f(x)\,dx = -\int_{-a}^0 f(x)\,dx$

Por tanto:

$\int_{-1}^1 \frac{x}{x^2 - 4}dx = \int_{-1}^0 \frac{x}{x^2 - 4}dx + \int_0^1 \frac{x}{x^2 - 4}dx = 0$

7. Se consideran los tres rectángulos que aparecen en la figura y que tienen por bases 1 y por alturas:

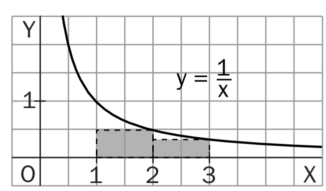
$f(1) = 9 - 1 = 8 \quad f(2) = 9 - 4 = 5 \quad f(3) = 9 - 9 = 0$



Por tanto: $S = 1 \cdot 8 + 1 \cdot 5 + 1 \cdot 0 = 13$ uc

8. Se consideran los dos rectángulos que aparecen en la figura y que tienen por bases 1 y por alturas:

$f(2) = \frac{1}{2} \qquad f(3) = \frac{1}{3}$



Por tanto: $S = 1 \cdot \frac{1}{2} + 1 \cdot \frac{1}{3} = \frac{5}{6}$ uc

9. $F(x) = G(u) = \int_0^u (t^2 - 1)\,dt$ con $u = x^2$

Aplicando la regla de la cadena:

$F'(x) = \frac{dF}{dx} = \frac{dG}{du} \cdot \frac{du}{dx} = (u^2 - 1) \cdot u' =$

$= (x^4 - 1) \cdot 2x = 2x^5 - 2x$

20 Aplicaciones de la integral definida

1. Representa la curva $y = \dfrac{1}{1 + x^2}$ y halla el valor del área limitada por esa curva, el eje OX y las rectas $x = -1$ y $x = 1$.

2. Sea el polinomio $P(x) = x^3 - ax^2$.

a) Determina el valor de a de modo que en $x = 1$ la función $P(x)$ tenga un punto de inflexión.

b) Halla el valor del área del recinto limitado por la gráfica de $P(x)$ y el eje OX.

3. Halla el área limitada por la gráfica de la función $f(x) = \mathrm{L}x$ y las rectas $x = 1$, $x = \dfrac{5}{2}$.

4. Halla el área comprendida entre las gráficas de las funciones $f(x) = x^2 - 2x + 3$ y $g(x) = 2x^2 - 4x + 3$.

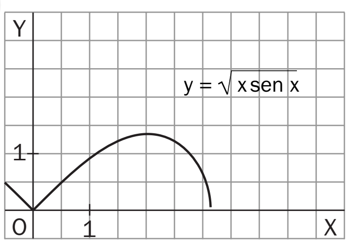
5. Calcula el volumen del cuerpo que se obtiene al girar la curva $y = \dfrac{1}{\sqrt{2 + x^2}}$ alrededor del eje de abscisas entre $x = 0$ y $x = \sqrt{2}$.

6. Se consideran las funciones: $f(x) = x^2 - 1$ $g(x) = \begin{cases} x + 1 & \text{si } x \leq 0 \\ -x + 1 & \text{si } x > 0 \end{cases}$.

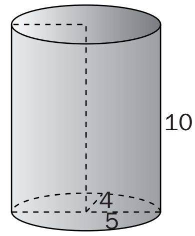
a) Dibuja las gráficas de ambas funciones en los mismos ejes de coordenadas.

b) Calcula el área del recinto acotado limitado por las gráficas de ambas funciones.

7. Calcula el volumen del sólido de revolución obtenido al girar alrededor del eje el recinto limitado por la gráfica de la función $y = \sqrt{x \operatorname{sen} x}$, con $0 \leq x \leq \pi$, y el eje OX.



8. El área de una elipse de semiejes a y b es $S = \pi \cdot a \cdot b$. Calcula el volumen de una superficie cilíndrica que tiene por base una elipse de semiejes 5 y 4 cm, respectivamente, y por altura 10 cm.

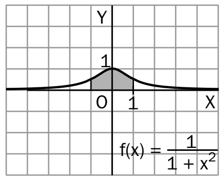


9. Un cuerpo de tres dimensiones tiene por base un círculo de radio 5 cm. Todas las secciones perpendiculares a un diámetro fijo de dicho círculo son cuadrados. Halla el volumen del sólido.

SOLUCIONES

1. Área $= \displaystyle\int_{-1}^{1} \frac{1}{1+x^2}\,dx =$

$= \left[\operatorname{arctg} x\right]_{-1}^{1} = \dfrac{\pi}{2}$ uc

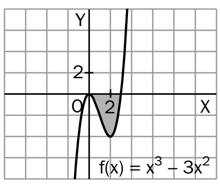


2. a) $P'(x) = 3x^2 - 2ax$ y $P''(x) = 6x - 2a$ entonces $P''(1) = 0 \Rightarrow a = 3$

b) La función es $P(x) = x^3 - 3x^2$

Área $= -\displaystyle\int_0^3 (x^3 - 3x^2)\,dx = -\left[\frac{x^4}{4} - x^3\right]_0^3 =$

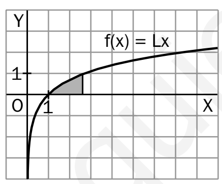
$= \dfrac{27}{4}$ uc



3. Área $= \displaystyle\int_1^{\frac{5}{2}} \mathrm{L}x\,dx =$

$= \left[x\mathrm{L}x - x\right]_1^{\frac{5}{2}} =$

$= \dfrac{1}{2}\left(5\ \mathrm{L}\,\dfrac{5}{2} - 3\right)$ uc



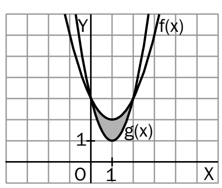
4. Puntos de corte en $x = 0$ y $x = 2$

Área $= \displaystyle\int_0^2 (x^2 - 2x + 3)\,dx -$

$- \displaystyle\int_0^2 (2x^2 - 4x + 3)\,dx =$

$= \displaystyle\int_0^2 (-x^2 + 2x)\,dx =$

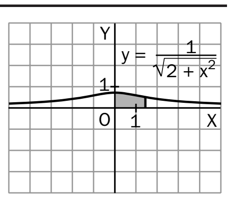
$= \left[\dfrac{-x^3}{3} + x^2\right]_0^2 = \dfrac{4}{3}$ uc



5. $V = \displaystyle\int_0^{\sqrt{2}} \pi\left(\frac{1}{\sqrt{2+x^2}}\right)^2 dx =$

$= \pi\displaystyle\int_0^{\sqrt{2}} \frac{dx}{2+x^2} =$

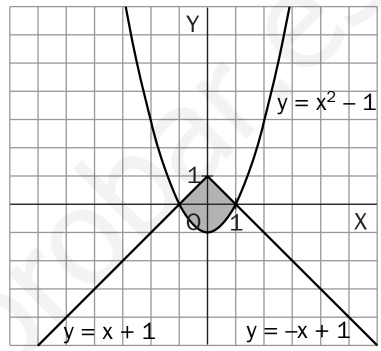
$= \pi\left[\dfrac{1}{\sqrt{2}}\operatorname{arctg}\dfrac{x}{\sqrt{2}}\right]_0^{\sqrt{2}} = \dfrac{\pi^2}{4\sqrt{2}}$ unidades cúbicas.



6. a) Puntos de corte en $x = -1$ si $x \leqslant 0$ y $x = 1$ si $x > 0$.

b) Área $= 2 \cdot \left(\dfrac{1 \cdot 1}{2} - \displaystyle\int_0^1 (x^2 - 1)\,dx\right) =$

$= 2 \cdot \left(\dfrac{1}{2} + \dfrac{2}{3}\right) = \dfrac{7}{3}$ uc



7. $V = \displaystyle\int_0^{\pi} \pi(\sqrt{x \operatorname{sen} x})^2\,dx = \pi\int_0^{\sqrt{2}} x \operatorname{sen} x\,dx =$

$= \pi[-x\cos x + \operatorname{sen} x]_0^{\pi} = \pi^2$ unidades cúbicas

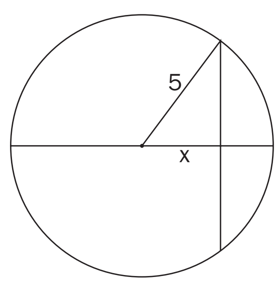
8. Las secciones que se obtienen al cortar el cilindro por planos paralelos a la base son siempre elipses de área

$A(x) = 4 \cdot 5 \cdot \pi = 20\pi$. Por tanto:

$V = \displaystyle\int_0^{10} 20\pi\,dx = 20\pi \cdot [x]_0^{10} = 20\pi \cdot 10 =$

$= 200\pi$ unidades cúbicas.

9. Las secciones que se obtienen al cortar el cuerpo por planos perpendiculares al diámetro son cuadrados de lado $2\sqrt{25 - x^2}$ y por tanto:



$A(x) = 4 \cdot (25 - x^2)$

El volumen se puede calcular mediante la integral:

$V = \displaystyle\int_{-5}^{5} 4 \cdot (25 - x^2) \cdot dx = 4\left(25x - \frac{x}{3}\right)$