1 Números reales: operaciones

1. Se quiere calcular la longitud de la arista y la superficie de una de las caras de una serie de cubos cuyo volumen se conoce. Completa la siguiente tabla redondeando los resultados a dos cifras decimales.

Volumen (cm^3)	11	28	62,5	180
Longitud arista (cm)				
Superficie cara lateral (cm^2)				

2. Simplifica al máximo las expresiones siguientes:

a) $\dfrac{\left(2^{-\frac{1}{3}} \cdot 8^{\frac{2}{9}} \cdot 4^{\frac{1}{6}}\right)^9}{\left(\sqrt[6]{2} \cdot \sqrt[3]{\dfrac{1}{8}}\right)^6}$

b) $8\,000^{\frac{2}{3}} \cdot \sqrt[4]{0{,}0001 \cdot r^8 \cdot t^{12}}$

3. Estudios de laboratorio demuestran que la velocidad mínima que debe llevar el agua de un torrente para arrastrar partículas del cauce viene dada por $v_t = 0{,}152\, d^{\frac{4}{9}}\, (G - 1)^{\frac{1}{2}}$, donde d y G dependen de la partícula. Completa, por defecto, la siguiente tabla:

	Partícula A	Partícula B	Partícula C
v_t		0,25	0,55
d	3		2
G	2,56	1,73	

4. Señala, en cada una de las siguientes expresiones, la variación que experimenta y cuando x varía de la forma que se indica:

a) $y = 4\pi \sqrt[3]{x^2}$; x se triplica.

b) $y = \dfrac{a}{\sqrt{x}}$; x se divide por 5.

c) $y = \dfrac{x^2}{\sqrt[3]{2x}}$; x se multiplica por 3.

5. Demuestra que todos los números capicúas de cuatro cifras son múltiplos de 11.

6. En una clase, el 16,6666... % de los alumnos son varones, y el 22,2222... % tienen los ojos azules. Se sabe que el número total de alumnos está comprendido entre 30 y 40. ¿Cuántos alumnos hay en clase?

7. Se considera un triángulo equilátero cuyo lado mide a cm. Con centro en el punto medio de cada lado y radio igual a la mitad del mismo, se construyen semicircunferencias.

a) Encuentra una expresión del área de la figura suponiendo que solamente se conoce a.

b) Aplica el apartado anterior al caso en que $a = \sqrt{8}$ cm.

SOLUCIONES

1. Sea a la longitud de la arista. El volumen será $V = a^3 \Rightarrow a = \sqrt[3]{V}$, y la superficie de la cara lateral $S = a^2$.

Volumen (cm^3)	11	28	62,5	180
Longitud arista (cm)	2,22	3,04	3,97	5,65
Superficie cara lateral (cm^2)	4,95	9,22	15,75	31,88

2. a) $$\frac{\left(2^{-\frac{1}{3}}\cdot 8^{\frac{2}{9}}\cdot 4^{\frac{1}{6}}\right)^9}{\left(\sqrt[6]{2}\cdot\sqrt[3]{\frac{1}{8}}\right)^6} = \frac{\left(2^{-\frac{1}{3}}\cdot 2^{\frac{2}{3}}\cdot 2^{\frac{1}{3}}\right)^9}{\left(2^{\frac{1}{6}}\cdot 2^{-1}\right)^6} = \frac{\left(2^{\frac{2}{3}}\right)^9}{\left(2^{-\frac{5}{6}}\right)^6} = \frac{2^6}{2^{-5}} = 2^{11}$$

b) $8\,000^{\frac{2}{3}}\cdot\sqrt[4]{0{,}0001\cdot r^8\cdot t^{12}} =$

$= (2^3\cdot 10^3)^{\frac{2}{3}}\cdot\sqrt[4]{10^{-4}\cdot r^8\cdot t^{12}} =$

$= 2^2\cdot 10^2\cdot 10^{-1}\cdot r^2\cdot t^3 = 2^2\cdot 10\cdot r^2\cdot t^3 = 40r^2t^3$

3. $v_t = 0{,}152\, d^{\frac{4}{9}}\,(G-1)^{\frac{1}{2}} \Rightarrow v_t^{\frac{9}{4}} = 0{,}152^{\frac{9}{4}}\, d(G-1)^{\frac{9}{8}}$

$$d = \frac{v_t^{\frac{9}{4}}}{0{,}152^{\frac{9}{4}}\cdot(G-1)^{\frac{9}{8}}}$$

$$v_t^2 = 0{,}152^2 d^{\frac{8}{9}}\,(G-1) \Rightarrow G = \frac{v_t^2}{0{,}152^2\cdot d^{\frac{8}{9}}} + 1$$

Sustituyendo los datos, se obtiene:

	Partícula A	Partícula B	Partícula C
v_t	0,31	0,25	0,55
d	3	4,36	2
G	2,56	1,73	8,07

4. a) $4\pi\sqrt[3]{(3x)^2} = 4\pi\sqrt[3]{3^2x^2} = \sqrt[3]{3^2}\,(4\pi\sqrt[3]{x^2}) =$

$= 3^{\frac{2}{3}}\cdot y$

Solución: y queda multiplicada por $3^{\frac{2}{3}}$

b) $$\frac{a}{\sqrt{\frac{x}{5}}} = \frac{a}{\frac{\sqrt{x}}{\sqrt{5}}} = \frac{a\sqrt{5}}{\sqrt{x}} = \sqrt{5}y = 5^{\frac{1}{2}}y$$

Solución: y queda multiplicada por $5^{\frac{1}{2}}$

c) $$\frac{(3x)^2}{\sqrt[3]{2\cdot 3x}} = \frac{3^2x^2}{\sqrt[3]{3}\cdot\sqrt[3]{2x}} = 3^{2-\frac{1}{3}}y = 3^{\frac{5}{3}}y$$

Solución: y queda multiplicada por $3^{\frac{5}{3}}$

5. Sea xyyx un número capicúa de cuatro cifras. Se expresa:

$xyyx = 1\,000x + 100y + 10y + x =$
$= 1\,001x + 110y = 11(91x + 10y)$, lo que muestra que es múltiplo de 11.

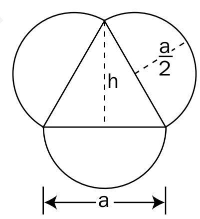
6. Sea x el número total de alumnos.

$$16{,}\widehat{6}\ \%\ \text{de}\ x = \frac{150x}{900} = \frac{x}{6}$$

$$22{,}\widehat{2}\ \%\ \text{de}\ x = \frac{200x}{900} = \frac{2x}{9}$$

Se observa que x debe ser múltiplo positivo de 6 y de 9, es decir, puede tomar los valores 18, 36, 54... Como además está comprendido entre 30 y 40, obligatoriamente tiene que ser 36.

7.



a) Conocida la medida en cm del lado a, se calcula la altura del triángulo:

$$h = \sqrt{a^2 - \left(\frac{a}{2}\right)^2}\ \text{cm} = a\frac{\sqrt{3}}{2}\ \text{cm}$$

El área de la figura se obtiene sumando el área del triángulo y el de los tres semicírculos construidos sobre los lados. (Nótese que las áreas de los tres semicírculos coinciden, por tratarse de un triángulo equilátero.)

$$A = \frac{a\cdot h}{2} + 3\cdot\frac{\pi\left(\frac{a}{2}\right)^2}{2}\ \text{cm}^2 =$$

$$= \frac{a\cdot a\frac{\sqrt{3}}{2}}{2} + 3\cdot\frac{\pi\cdot a^2}{8}\ \text{cm}^2 =$$

$$= \frac{a^2}{4}\left(\sqrt{3} + \frac{3\pi}{2}\right)\ \text{cm}^2$$

b) $$A_{(a=\sqrt{8})} = \frac{(\sqrt{8})^2}{4}\left(\sqrt{3} + \frac{3\pi}{2}\right) = 2\left(\sqrt{3} + \frac{3\pi}{2}\right)\ \text{cm}^2$$

2 Números reales: ordenación

1. Una compañía inglesa de alimentación quiere introducirse en el mercado español, para lo que es necesario que en las etiquetas de sus artículos figuren unidades del sistema métrico decimal. ¿Qué peso deberá imprimir en las etiquetas de los botes de una libra? ¿Cuál será la unidad adecuada?
Contesta a las mismas preguntas para el caso de los envases de 10 onzas.
Recuerda: 1 kg = 2,2046 libras; 1 kg = 35,274 onzas.

2. Un estudiante se ha presentado a una prueba tipo test que constaba de 150 preguntas. Un error de corrección hace que le den 125 aciertos, cuando en realidad tiene 129. Otra estudiante ha sido calificada con 6,5 puntos sobre 10, cuando la nota correcta era 7 puntos.

a) Calcula el error absoluto de cada medida.
b) Calcula el error relativo de cada medida.
c) ¿Cuál de las dos medidas es más precisa? Razona tu respuesta.

3. Ana, Bernardo, Cecilia y Daniel viven en la Avenida Central. Bernardo vive a 1 km de donde vive Ana, y Cecilia vive a 1,5 km de Bernardo. La casa de Daniel está a medio camino entre la de Cecilia y la de Bernardo. ¿A qué distancia viven Daniel y Ana? (Hay dos soluciones.)

4. Dada la siguiente tabla de equivalencias entre unidades del SMD y del sistema inglés:

1 kg	1 kg	1 m	1 m
2,2046 libras	35,2740 onzas	1,0936 yardas	39,3710 pulgadas

Expresa cada unidad del sistema inglés en la unidad adecuada del SMD.

5. a) Representa sobre la recta los conjuntos $|x - 1| < 3$ y $|x - 5| \geqslant 2$.
b) Escribe como intervalo la parte común de ambos conjuntos.

6. Calcula, en la unidad adecuada, la distancia entre dos ciudades A y B, sabiendo que un avión con viento a favor tarda 3,5 horas en volar de A hasta B, y si viaja con el viento en contra, en volar de B a A tarda cuatro horas. La velocidad del avión en ausencia de viento es de 600 millas/hora (1 milla = 1 639,34 metros).

7. Utilizando el principio de inducción, demuestra que la suma de los n primeros números impares es igual a n^2.

8. Un automóvil que se acelera de forma constante recorre 2 metros en el primer segundo, 6 metros en el siguiente, 10 metros el tercer segundo, y así sucesivamente, es decir, recorre 4 metros adicionales cada segundo. Calcula la distancia recorrida durante la primera hora, y expresa el resultado en la unidad adecuada.

SOLUCIONES

1. $1 \text{ kg} = 2{,}2046 \text{ lb} \Rightarrow 1 \text{ lb} = \dfrac{1}{2{,}2046} \text{ kg} =$
$= 0{,}4535... \text{ kg} = 453{,}6 \text{ g}$
El peso que deberá imprimir en los botes de 1 libra será 454 g.

$1 \text{ kg} = 35{,}274 \text{ oz} \Rightarrow 1 \text{ oz} = \dfrac{1}{35{,}274} \text{ kg} = 28{,}35 \text{ g}$

Si el envase es de 10 onzas deberá figurar un peso de 284 g.

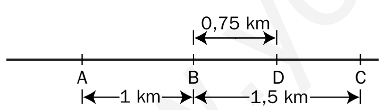
2. a) Error absoluto de la primera medida:
$129 - 125 = 4$ respuestas.
Error absoluto de la segunda medida:
$7 - 6{,}5 = 0{,}5$ puntos.

b) Error relativo de la primera medida:
$\dfrac{4}{129} = 0{,}0310 = 3{,}1\ \%$
Error relativo de la segunda medida:
$\dfrac{0{,}5}{7} = 0{,}0714 = 7{,}1\ \%$

c) Es más precisa la valoración del examen tipo test puesto que el error relativo es menor.

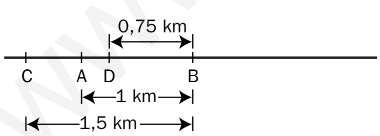
3. Se verán las dos posibles soluciones gráficamente.
Ana, Bernardo, Cecilia y Daniel se identifican con los puntos A, B, C y D respectivamente. Situar D a la izquierda o a la derecha de B proporcionará las dos soluciones al problema.

1.ª



Ana y Daniel viven a 1,75 kilómetros.

2.ª



Ana y Daniel viven a 250 metros.

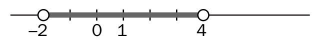
4. a) $1 \text{ lb} = \dfrac{1}{2{,}2046} \text{ kg} = 0{,}4535 \text{ kg} = 454 \text{ g}$

b) $1 \text{ oz} = \dfrac{1}{35{,}2740} \text{ kg} = 0{,}0283 \text{ kg} = 28 \text{ g}$

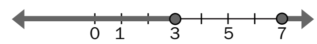
c) $1 \text{ yarda} = \dfrac{1}{1{,}0936} \text{ m} = 0{,}9144 \text{ m} = 91 \text{ cm}$

d) $1 \text{ pulgada} = \dfrac{1}{39{,}3710} \text{ m} = 0{,}0253 \text{ m} = 25 \text{ mm}$

5. a) $|x - 1| < 3 \Leftrightarrow -3 < x - 1 < 3 \Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow -2 < x < 4$



$|x - 5| \geqslant 2 \Leftrightarrow x - 5 \leqslant -2,\ x - 5 \geqslant 2 \Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow x \leqslant 3,\ x \geqslant 7$



b) La parte común de los conjuntos anteriores es el intervalo $(-2, 3]$.

6. Sea v la velocidad del viento en millas/hora. La velocidad del avión será $(600 + v)$ o $(600 - v)$ según vaya el viento a favor o en contra, respectivamente.
$(600 + v) \cdot 3{,}5 = (600 - v) \cdot 4 \Leftrightarrow 7{,}5v = 300 \Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow v = 40$ millas/hora.
640 millas/hora · 3,5 horas = 2 240 millas =
= 2 240 · 1 639,34 m = 3 672 121,6 m =
= 3 672,12 km
Se da como distancia de A a B 3 672 km, pues el error de 120 metros es despreciable frente al número entero que expresa los kilómetros.

7. Hay que probar, utilizando el principio de inducción, que $S(n) = 1 + 3 + 5 + ... + (2n - 1) = n^2$

1. La igualdad es cierta para $n = 1$: $S(1) = 1 = 1^2$
2. Se supone cierta para $n - 1$: $S(n - 1) = (n - 1)^2$
3. Se demuestra que es cierta para n:
$S(n) = S(n - 1) + (2n - 1) = (n - 1)^2 + 2n - 1 = n^2$

Queda demostrada la igualdad.

8. Se disponen los datos en la siguiente tabla:

Segundos	1	2	3	...	n
Metros recorridos	2	2 + 4 = = 2 + 1 · 4	6 + 4 = = 2 + 2 · 4	...	2 + (n − 1) · 4

Parece que la distancia recorrida en los n primeros segundos es $d(n) = 2 + 4(n - 1)$ metros.

1. Cierta para $n = 1$: $d(1) = 2 = 2 + 4 \cdot 0$
2. Se supone cierta para $n - 1$:
$d(n - 1) = 2 + 4(n - 2)$
3. Se demuestra que es cierta para n:
$d(n) = d(n - 1) + 4 = 2 + 4(n - 2) + 4 =$
$= 2 + 4(n - 2 + 1) = 2 + 4(n - 1)$

Queda demostrada la igualdad.
La distancia recorrida durante la primera hora es:
$d(3\,600) = 2 + 4 \cdot 3\,599 \text{ m} = 14\,398 \text{ m}$

3 Polinomios

1. Calcula a y b para que el polinomio $P(x) = x^4 + ax^3 + 2x^2 - 3x + b$ sea divisible por $(x - 1)$ y por $(x + 1)$.

2. Calcula a y b para que el polinomio $P(x) = x^3 + ax^2 + bx - 10$ sea divisible por $(x - 2)$ y dé de resto -5 al dividirlo por $(x - 1)$.

3. Calcula el máximo común divisor de los siguientes polinomios:

$P(x) = x^3 + 3x^2 - x - 3$ $\qquad Q(x) = x^3 - x^2 - 4x + 4$

4. Calcula el mínimo común múltiplo de los siguientes polinomios:

$P(x) = x^3 - 5x^2 + 7x - 3$ $\qquad Q(x) = x^3 - x^2 - 9x + 9$

5. Averigua si los polinomios $P(x) = x^3 - 2x^2 + x - 2$ y $Q(x) = x^2 + x - 2$ son primos entre sí.

6. Pon un ejemplo de un polinomio de grado cuatro que tenga al 2 como coeficiente del término de mayor grado y como únicas raíces $x = 0$ y $x = 2$.

7. Halla un polinomio de segundo grado sabiendo que es divisible por $(x + 3)$ y por $(x + 1)$ y el coeficiente del término de mayor grado es 3.

8. Halla el polinomio $P(x)$, sabiendo que $\dfrac{P(x)}{x^2 - 3x} = \dfrac{x + 1}{x}$.

9. Efectúa las siguientes operaciones:

a) $\dfrac{x}{x^2 - 1} + \dfrac{2}{x} - \dfrac{1}{x - 1}$ $\qquad$ b) $\dfrac{2x}{x + 2} - \dfrac{1}{x} + \dfrac{x^2}{x - 2}$

10. Simplifica las siguientes fracciones algebraicas:

a) $\dfrac{x^3 + x^2 - 4x - 4}{x^3 - 4x^2 + x + 6}$ $\qquad$ b) $\dfrac{x^3 + 2x^2 - 8x}{x^2 - 4}$

11. Una persona tiene un capital de 1 000 euros. Una parte la coloca en un fondo de inversiones que le produce un beneficio del 4 % anual y la otra parte la invierte en bolsa, perdiendo al cabo del año un 30 % del capital invertido.

a) Escribe, en forma de polinomio, el capital que tiene al finalizar el año, en función de la parte que invirtió en el fondo de inversiones.

b) Calcula la cantidad que invirtió en bolsa si, al cabo del año, su capital seguía siendo los 1 000 euros iniciales.

12. La suma de las dos cifras de un número es 12. Expresa dicho número, en función de:

a) La cifra de las decenas.

b) La cifra de las unidades.

SOLUCIONES

1.

$$\left.\begin{array}{r}P(1) = 1^4 + 1^3a + 2 \cdot 1^2 - 3 \cdot 1 + b = 0\\ P(-1) = (-1)^4 + (-1)^3a + 2 \cdot (-1)^2 - 3 \cdot (-1) + b = 0\end{array}\right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left.\begin{array}{r}a + b = 0\\ -a + b = -6\end{array}\right\} \Rightarrow a = 3;\ b = -3$$

2. $$\left.\begin{array}{l}P(2) = 2^3 + 2^2a + 2b - 10 = 0\\ P(1) = 1^3 + 1^2 \cdot a + 1 \cdot b - 10 = -5\end{array}\right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left.\begin{array}{r}2a + b = 1\\ a + b = 4\end{array}\right\} \Rightarrow a = -3;\ b = 7$$

3. $$\left.\begin{array}{l}P(x) = (x - 1)(x + 1)(x + 3)\\ Q(x) = (x - 1)(x - 2)(x + 2)\end{array}\right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \text{m.c.d.}(P(x),\ Q(x)) = x - 1$$

4. $$\left.\begin{array}{l}P(x) = (x - 1)^2(x - 3)\\ Q(x) = (x - 1)(x - 3)(x + 3)\end{array}\right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \text{m.c.m.}(P(x),Q(x)) = (x - 1)^2(x - 3)(x + 3) =$$
$$= x^4 - 2x^3 - 8x^2 + 18x - 9$$

5. $$\left.\begin{array}{l}P(x) = (x^2 + 1)(x - 2)\\ Q(x) = (x - 1)(x + 2)\end{array}\right\} \Rightarrow \text{m.c.d.}(P(x),Q(x)) = 1 \Rightarrow$$

$\Rightarrow$ P(x) y Q(x) son primos entre sí.

6. Respuesta múltiple.

Por ejemplo $P(x) = 2x^3(x - 2) = 2x^4 - 4x^3$

7. $P(x) = 3(x + 1)(x + 3) = 3x^2 + 12x + 9$

8. $$P(x) = \frac{(x^2 - 3x)(x + 1)}{x} = x^2 - 2x - 3$$

9. a) $$\frac{x}{x^2 - 1} + \frac{2}{x} - \frac{1}{x - 1} =$$

$$= \frac{x^2 + 2(x^2 - 1) - x(x + 1)}{x(x^2 - 1)} =$$

$$= \frac{2x^2 - x - 2}{x^3 - x}$$

b) $$\frac{2x}{x + 2} - \frac{1}{x} + \frac{x^2}{x - 2} =$$

$$= \frac{2x^2(x - 2) - (x - 2)(x + 2) + x^3(x + 2)}{x(x - 2)(x + 2)} =$$

$$= \frac{x^4 + 4x^3 - 5x^2 + 4}{x^3 - 4x}$$

10. a) $$\frac{x^3 + x^2 - 4x - 4}{x^3 - 4x^2 + x + 6} =$$

$$= \frac{(x + 1)(x - 2)(x + 2)}{(x + 1)(x - 2)(x - 3)} = \frac{x + 2}{x - 3}$$

b) $$\frac{x^3 + 2x^2 - 8x}{x^2 - 4} = \frac{x(x - 2)(x + 4)}{(x - 2)(x + 2)} =$$

$$= \frac{x^2 + 4x}{x + 2}$$

11. a) $$P(x) = x + \frac{4x}{100} + \frac{70(1\,000 - x)}{100} =$$

$$= \frac{17x + 35\,000}{50}$$

b) $$\frac{17x + 35\,000}{50} = 1\,000 \Rightarrow 17x = 15\,000 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x = \frac{15\,000}{17} \approx 882{,}35 \text{ euros.}$$

En bolsa invirtió: $1\,000 - 882{,}35 = 117{,}65$ euros.

12. Sea el número de dos cifras de la forma «ab» siendo «a» la cifra de las decenas y «b» la cifra de las unidades. Tenemos que $a + b = 12$.

Luego: $\begin{cases} a = 12 - b \\ b = 12 - a \end{cases}$

Por otro lado, la descomposición decimal del número es de la forma: $10a + b$, con lo que tenemos que:

a) $P(x) = 10x + (12 - x) = 9x + 12$

b) $P(x) = 10(12 - x) + x = 120 - 9x$

4 Ecuaciones e inecuaciones

1. Resuelve:

a) $\dfrac{2x}{2x+1} + \dfrac{3x-1}{3x-3} = 2$

b) $2ax - a^2 = a(x+1),\ a \neq 0$

c) $x^3 - 3x^2 - 3x + 9 = 0$

d) $x^3 - x^2 - 2x = 0$

e) $\sqrt{x+5} + \sqrt{4-3} = 3$

f) $2\sqrt{2-x} - \sqrt{6+x} = 2$

g) $\dfrac{x(1-x)}{x+2} > 0$

h) $\dfrac{2x^2}{3} \geqslant \dfrac{x+1}{2} + \dfrac{4x}{3}$

2. Demuestra que si r_1 y r_2 son soluciones reales de una ecuación de segundo grado de la forma $x^2 + bx + c = 0$, entonces $r_1 + r_2 = -b$ y $r_1 r_2 = c$.

3. Determina todos los valores posibles de r para que $3rx^2 - 4rx + r + 1 = 0$ tenga una única solución.

4. Si un número se disminuye 7 veces en cinco unidades, el resultado es menor que 47. ¿Qué puedes decir sobre este número?

5. Calcula tres números enteros consecutivos e impares sabiendo que el cuádruplo de la suma de los dos primeros es igual al doble de la suma de los dos últimos.

6. Un vendedor hace una mezcla con dos tipos de café: Arábica, de 5,70 euros el kilo, y Jamaica, de 6,60 euros el kilo. ¿Qué cantidad de cada tipo debe mezclar para obtener 30 kilos que se vendan a un precio de 6 euros el kilo?

7. En el mismo instante, dos trenes parten de la misma estación en sentidos contrarios. Calcula la velocidad de cada uno sabiendo que al cabo de 4 horas los separan 1 188 kilómetros y que la velocidad de uno de ellos es 3 km/h inferior al doble de la del otro. Se supone que las velocidades de los trenes son constantes.

8. Álvaro tiene una cierta cantidad de puntos en fichas de veinticinco y de cinco puntos. El número de fichas de 25 puntos es 3 veces el de fichas de 5 puntos, y su valor excede en 560 puntos al valor de las fichas de 5 puntos. ¿Cuántas tiene de cada tipo?

9. Un fabricante puede producir un determinado artículo de lujo a un coste de 200 euros la unidad. Cada artículo se vende a 500 euros y a este precio los consumidores han estado comprando 4 000 unidades mensuales. Estudios de mercado indican que por cada 100 euros de aumento en el precio de venta se venderán cada mes 400 unidades menos.

a) Encuentra una expresión del beneficio mensual en función del precio de venta.

b) Indica los posibles precios de venta para los que el fabricante obtendría un beneficio positivo.

SOLUCIONES

1. a) $\dfrac{2x(3x-3)+(3x-1)(2x+1)}{(2x+1)(3x-3)} = 2 \Leftrightarrow$

$12x^2 - 5x - 1 = 12x^2 - 6x - 6 \Leftrightarrow x = -5$

b) $2ax - a^2 = a(x+1) \Leftrightarrow 2ax - a^2 = ax + a \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow ax = a(a+1) \Leftrightarrow x = a + 1$

c) $x^3 - 3x^2 - 3x + 9 = 0 \Leftrightarrow (x+3)(x^2-3) = 0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow x = -3,\ x = \sqrt{3},\ x = -\sqrt{3}$

d) $x(x^2 - x - 2) = 0 \Leftrightarrow x(x+1)(x-2) = 0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow x = 0,\ x = -1,\ x = 2$

e) $(\sqrt{x+5})^2 = (3 - \sqrt{4-x})^2 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow x + 5 = 9 + 4 - x - 6\sqrt{4-x} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow (2x-8)^2 = (-6\sqrt{4-x})^2 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 4x^2 + 4x - 80 = 0 \Leftrightarrow x^2 + x - 20 = 0;$

$$x = \frac{-1 \pm \sqrt{1+80}}{2} = \frac{-1 \pm 9}{2} \begin{cases} x = 4 \\ x = -5 \end{cases}$$

Se comprueba que tanto $x = 4$ como $x = -5$ verifican la ecuación; por tanto, son soluciones válidas.

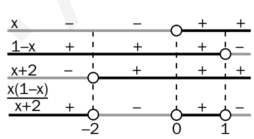
f) $(2\sqrt{2-x})^2 = (2 - \sqrt{6+x})^2 \Leftrightarrow$

$4(2-x) = 4 + 6 + x - \sqrt{6+x} \Leftrightarrow$

$(5x+2)^2 = (4\sqrt{6+x})^2 \Leftrightarrow$

$$25x^2 + 4x - 92 = 0;\ x = \frac{-4 \pm 96}{50} \begin{cases} x = \dfrac{46}{25} \\ x = -2 \end{cases}$$

g) $\dfrac{x(1-x)}{x+2} > 0$

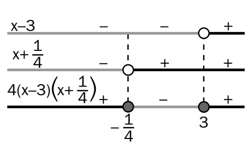


Solución: $x < -2$ o $0 < x < 1$

h) $\dfrac{4x^2}{6} \geqslant \dfrac{3(x+1)}{6} + \dfrac{8x}{6} \Leftrightarrow$

$4x^2 - 11x - 3 \geqslant 0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 4(x-3)\left(x + \dfrac{1}{4}\right) \geqslant 0$



Solución: $x \leqslant -\dfrac{1}{4}$ o $x \geqslant 3$

2. $x^2 + bx + c = (x - r_1)(x - r_2) =$

$= x^2 - (r_1 + r_2)x + r_1 r_2$

Igualando coeficientes: $r_1 + r_2 = -b$

$r_1 r_2 = c$

3. Para tener una única solución: $b^2 - 4ac = 0$.

$16r^2 - 4 \cdot 3r(r+1) = 0 \Leftrightarrow$

$4r^2 - 12r = 0 \Leftrightarrow r = 0$ o $r = 3$

$r = 0$ no es válido, pues la ecuación sería $1 = 0$.

Solución: $r = 3$.

4. Sea x el número. $x - 7 \cdot 5 < 47 \Rightarrow x < 82$

Solución: El número debe ser menor que 82.

5. Los números serán: $2n - 1$, $2n + 1$ y $2n + 3$ donde n es entero.

$4(2n - 1 + 2n + 1) = 2(2n + 1 + 2n + 3) \Leftrightarrow n = 1$

Solución: 1, 3 y 5 son los números buscados.

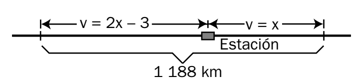
6. Sea A el número de kg de café tipo Arábica.

$5{,}7A + 6{,}6(30 - A) = 30 \cdot 6 \Leftrightarrow 0{,}9A = 18 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow A = 20$

Solución: Hay que mezclar 20 kg de café tipo Arábica y 10 kg tipo Jamaica.

7. Sea x la velocidad en km/h de uno de los trenes.



$4x + 4(2x - 3) = 1\,188 \Leftrightarrow x = 100$

Las velocidades son 100 km/h y 197 km/h.

8. Sea x el número de fichas de 25 puntos.

$25x - 560 = 5 \cdot \dfrac{x}{3} \Leftrightarrow 70x = 1\,680 \Leftrightarrow x = 24$

Álvaro tiene 24 fichas de veinticinco puntos y 8 fichas de cinco puntos.

9. a) Sea x el nuevo precio de venta. Según los datos, $x - 500$ tiene que ser múltiplo de 100. El beneficio mensual es la diferencia entre los ingresos y los gastos mensuales.

Ingresos: $I(x) = \left(4\,000 - \dfrac{x - 500}{100} \cdot 400\right) x$

Gastos: $G(x) = \left(4\,000 - \dfrac{x - 500}{100} \cdot 400\right) \cdot 200$

Beneficio mensual:

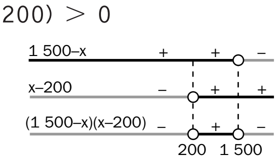
$B(x) = \left(4\,000 - \dfrac{x - 500}{100} \cdot 400\right)(x - 200)$

b) $B(x) > 0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow (6\,000 - 4x)(x - 200) > 0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow (1\,500 - x)(x - 200) > 0$

Solución: El precio tiene que ser superior a 200 euros e inferior a 1 500 euros.



5 Sistemas de ecuaciones lineales. Método de Gauss

1. Discute los siguientes sistemas y resuelve los que sean compatibles determinados:

a) $\begin{cases} x - 2y + z = 1 \\ -x + y - 2z = -1 \\ 2x - 3y + 3z = 1 \end{cases}$ b) $\begin{cases} x + 2y + 3z = 1 \\ x + 3y - z = 4 \\ x + 3y + z = 2 \end{cases}$

2. En unos grandes almacenes un señor compra 2 trajes de chaqueta, 1 cazadora y 2 pantalones. Paga 530 euros. En la caja contigua, otra persona está pagando 840 euros por 3 trajes de chaqueta, 3 cazadoras y unos pantalones. Al día siguiente hay una oferta en la que se hace un 10 % de descuento, y un chico ha pagado 225 euros por un traje de chaqueta y una cazadora. ¿Cuánto cuesta cada artículo?

3. Una ecuación lineal con dos incógnitas de la forma $ax + by + c = 0$ es la expresión de una recta en el plano. Según esto, las rectas del plano expresadas por las ecuaciones de los siguientes sistemas, ¿serán paralelas, secantes o coincidentes?

a) $\begin{cases} 2x - y + 5 = 0 \\ -6x + 3y - 15 = 0 \end{cases}$ b) $\begin{cases} 5x - 7y + 2 = 0 \\ 10x - 14y - 18 = 0 \end{cases}$ c) $\begin{cases} x - 2y - 5 = 0 \\ 2x - 7y - 4 = 0 \end{cases}$

4. Dadas las ecuaciones:

$$\begin{aligned} x + y - 2z &= 0 \\ x - 2y + z &= 0 \end{aligned}$$

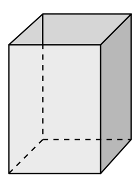
Escribe una tercera ecuación para que el sistema resultante sea incompatible.

5. Si se mezclan x partes de aceite de oliva virgen con y partes de aceite de oliva refinado ($y \neq x$), la mezcla resultante tiene un precio de A euros el litro. Si se mezclan y partes de aceite de oliva virgen y x partes de refinado, el precio del litro de la mezcla es de B euros.

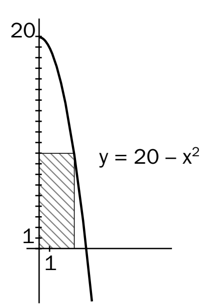
a) Halla el valor del litro de aceite de cada clase.

b) Si $A = B$, ¿qué se puede decir de los precios de los dos tipos de aceite?

6. Se quiere construir un depósito de 32 m^3, con forma de prisma cuadrangular, excavado en la tierra y sin cubrir. Si la superfice de la base y de las caras laterales debe ser de 68 m^2, calcula las dimensiones del lado de la base y de la altura.



7. Observa la figura adjunta. Se quiere construir un rectángulo en el primer cuadrante, limitado por los ejes de coordenadas y la gráfica de $y = 20 - x^2$. Calcula las dimensiones del rectángulo, si su área tiene que ser de 16 unidades cuadradas.



SOLUCIONES

1. a) $\begin{cases} x - 2y + z = 1 \\ -x + y - 2z = -1 \\ 2x - 3y + 3z = 2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x - 2y + z = 1 \\ -y - z = 0 \\ y + z = 0 \end{cases} \Rightarrow$

$\Rightarrow \begin{cases} x - 2y + z = 1 \\ y + z = 0 \end{cases}$

Tiene infinitas soluciones; por tanto, se trata de un sistema compatible indeterminado.

b) $\begin{cases} x + 2y + 3z = 1 \\ x + 3y - z = 4 \\ x + 3y + z = 2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x + 2y + 3z = 1 \\ y - 4z = 3 \\ y - 2z = 1 \end{cases} \Rightarrow$

$\Rightarrow \begin{cases} x + 2y + 3z = 1 \\ y - 4z = 3 \\ 2z = -2 \end{cases}$

Sistema compatible determinado.

Solución: $z = -1$; $y = -1$; $x = 6$.

2. Sean x, y, z los precios en euros del traje de chaqueta, la cazadora y los pantalones, respectivamente.

$\begin{cases} 2x + y + 2z = 530 \\ 3x + 3y + z = 840 \\ 0{,}9x + 0{,}9y = 225 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2x + y + 2z = 530 \\ 3x + 3y + z = 840 \\ 9x + 9y = 2\,250 \end{cases} \Rightarrow$

$\Rightarrow \begin{cases} 2x + y + 2z = 530 \\ 3y - 4z = 90 \\ 9y - 18z = -270 \end{cases} \Rightarrow$

$\Rightarrow \begin{cases} 2x + y + 2z = 530 \\ 3y - 4z = 90 \\ -6z = -540 \end{cases} \Rightarrow \begin{matrix} z = 90 \\ y = 150 \\ x = 100 \end{matrix}$

Solución: Los precios del traje de chaqueta, la cazadora y los pantalones son 100, 150 y 90 euros, respectivamente.

3. a) $\begin{cases} 2x - y + 5 = 0 \\ -6x + 3y - 15 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 6x - 3y + 15 = 0 \\ -6x + 3y - 15 = 0 \end{cases}$

Sistema compatible indeterminado. Las rectas son **coincidentes**, pues tienen en común infinitos puntos.

b) $\begin{cases} 5x - 7y + 2 = 0 \\ 10x - 14y - 18 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 5x - 7y + 2 = 0 \\ -22 = 0 \end{cases}$

Sistema incompatible. Las rectas no tienen ningún punto común, luego son **paralelas**.

c) $\begin{cases} x - 2y - 5 = 0 \\ 2x - 7y - 4 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x - 2y - 5 = 0 \\ -3y + 6 = 0 \end{cases}$

Sistema compatible determinado. Las rectas tienen un único punto en común; son **secantes**.

4. $\begin{cases} x + y - 2z = 0 \\ x - 2y + z = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x + y - 2z = 0 \\ -3y + 3z = 0 \end{cases}$

$y = z$; $x = -y + 2z = -z + 2z = z$

Las soluciones del sistema formado son de la forma: $x = y = z$. Para obtener un sistema incompatible se añade una ecuación en la que $x = y = z$ no sea solución; por ejemplo:

$x - 2y + z = 5$ (si $x = y = z$, $x - 2y + z = 0$)

5. Sean v y r los precios del litro de aceite de oliva virgen y refinado, respectivamente.

a) $\begin{cases} x\,v + y\,r = (x + y)A \\ x\,r + y\,v = (x + y)B \end{cases}$

Restando a la 1.ª multiplicada por x, la 2.ª por y:

$(x^2 - y^2)v = (x + y)(xA - yB) \Rightarrow$

$\Rightarrow (x + y)(x - y)v = (x + y)(xA - yB) \Rightarrow$

$\Rightarrow v = \dfrac{xA - yB}{x - y}$, pues $x - y \neq 0$

Restando a la 1.ª multiplicada por y, la 2.ª por x:

$(y^2 - x^2)r = (x + y)(yA - xB)$

$(y + x)(y - x)r = (x + y)(yA - xB) \Rightarrow$

$\Rightarrow r = \dfrac{yA - xB}{y - x}$, pues $y - x \neq 0$

Solución: El litro de aceite de oliva virgen cuesta $v = \dfrac{xA - yB}{x - y}$ euros y el de aceite de oliva refinado $r = \dfrac{yA - xB}{y - x}$ euros.

b) Si $A = B$, los precios de ambos tipos coinciden.

6. Sean x e y las medidas en metros del lado de la base y de la altura, respectivamente.

Volumen: x^2y. Superficie de la base: x^2

Superficie de las caras laterales: $4xy$

$\begin{cases} x^2y = 32 \\ x^2 + 4xy = 68 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y = \dfrac{32}{x^2} \\ x^2 + \dfrac{4 \cdot 32}{x} = 68 \end{cases} \Rightarrow$

$\Rightarrow x^3 - 68x + 128 = 0 \Leftrightarrow (x - 2)(x^2 + 2x - 64) = 0$

Soluciones del sistema:

$x = 2, x = -1 + \sqrt{65} = 7{,}06, x = -1 - \sqrt{65} = -9{,}06$

La última solución no es válida como medida del lado de un cuadrado. Así pues, hay dos soluciones: base 2 m y altura 8 m o base 7,06 m y altura 0,64 m.

7. $16 = xy = x(20 - x^2) \Leftrightarrow x^3 - 20x + 16 = 0$

Una solución de la ecuación es: $x = 4$

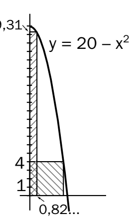
Factorizando: $(x-4)(x^2+4x-4)=0 \Leftrightarrow$

$\Rightarrow x = 4$, $x = -2 \pm 2\sqrt{2}$; la negativa no puede representar una longitud.

Se obtienen dos posibles rectángulos:

$\Leftrightarrow x = 4, y = 4$

$x = -2 + 2\sqrt{2} = 0{,}8284$, $y = 19{,}31$



6 Funciones

1. Halla el dominio de las siguientes funciones:

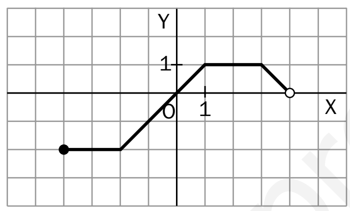
a) $f(x) = \dfrac{1}{|x^2 - 1|}$ b) $f(x) = \sqrt{\dfrac{x - 2}{x + 2}}$

2. Considera la función $f(x) = \sqrt{1 + \dfrac{1}{x}}$.

a) Calcula su función recíproca.

b) ¿Coincide el dominio de f con el de su recíproca?

3. Escribe la expresión algebraica de la función definida a trozos, representada por la siguiente gráfica:



4. Dadas las funciones $f(x) = \sqrt{x - 1}$ y $g(x) = x^2$, resuelve la ecuación $f(g(x)) = g(f(x))$.

5. Un grupo de alumnos que prepara su viaje de fin de curso encarga a una empresa la fabricación de camisetas con el logotipo de su centro. Esta les cobra 18 euros por el diseño y 1,20 euros por unidad fabricada.

a) ¿Cuánto les costaría encargar 225 camisetas?

b) Escribe la función que da el precio total a pagar según el número de camisetas pedidas.

c) Si los alumnos disponen de 540 euros, ¿cuál es el número máximo de camisetas que pueden encargar?

d) Los alumnos han encargado 300 camisetas para venderlas a 3 euros. Solo han conseguido vender 242 unidades. ¿Cuánto dinero han ganado o perdido en la operación?

6. Con una cuerda de 36 centímetros se quiere construir un rectángulo, sin que sobre ni falte cuerda.

a) ¿Qué área tendrá el rectángulo si la base mide 10 centímetros?

b) Escribe la función que da el área del rectángulo según la medida de la base del mismo.

c) ¿Cuál es el dominio de la función anterior?

d) Represéntala gráficamente.

7. Una empresa A de alquiler de coches cobra 30 euros por el contrato y 0,09 euros por kilómetro recorrido. Otra empresa B no cobra por formalizar el contrato pero su precio es de 0,15 euros por kilómetro recorrido.

a) Si una persona desea alquilar un coche para recorrer 150 kilómetros, ¿qué empresa le resulta más rentable?

b) Escribe las expresiones que representan las tarifas de las empresas A y B en función de los kilómetros recorridos.

c) ¿A partir de qué número de kilómetros es más rentable alquilar el coche en la empresa A?

8. Un vendedor comercial tiene un sueldo fijo de 600 euros al mes más una comisión del 15 % sobre las ventas que realice.

a) ¿Qué sueldo cobró un mes que vendió productos por importe de 4 808 euros?

b) Indica cuál es su sueldo en función de sus ventas mensuales.

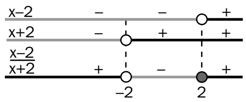
c) ¿Cuál fue el importe de las ventas un mes en el que cobró 1 502,53 euros?

9. Expresa el área de un triángulo isósceles, cuyo lado desigual mide 8 cm, en función de la medida de los otros dos lados.

SOLUCIONES

1. a) $|x^2 - 1| \neq 0 \iff x^2 - 1 \neq 0 \iff x \neq \pm 1$
$D(1) = \mathbb{R} - \{-1, 1\}$

b) $\dfrac{x-2}{x+2} \geqslant 0$

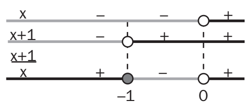


$D(f) = \mathbb{R} - [-2, 2)$

2. a) Intercambiando variables, $x = \sqrt{1 + \dfrac{1}{y}} \Rightarrow$

$\Rightarrow x^2 = 1 + \dfrac{1}{y} \Rightarrow y = f^{-1}(x) = \dfrac{1}{x^2 - 1}$

b) $1 + \dfrac{1}{x} \geqslant 0 \iff \dfrac{x+1}{x} \geqslant 0$



$D(f) = (-\infty, -1] \cup (0, +\infty)$

$x^2 - 1 \neq 0 \iff x \neq \pm 1$
$D(f^{-1}) = \mathbb{R} - \{-1, 1\}$

Solución: $D(f) \neq D(f^{-1})$

3. $f(x) = \begin{cases} -2 & \text{si } -4 \leqslant x \leqslant -2 \\ x & \text{si } -2 < x \leqslant 1 \\ 1 & \text{si } 1 < x \leqslant 3 \\ 4 - x & \text{si } 3 < x < 4 \end{cases}$

4. $f(g(x)) = f(x^2) = \sqrt{x^2 - 1}$

$g(f(x)) = g(\sqrt{x-1}) = (\sqrt{x-1})^2 = x - 1$

$\sqrt{x^2 - 1} = x - 1 \Rightarrow x^2 - 1 = (x-1)^2 \Rightarrow x = 1$

5. a) $18 + 1{,}2 \cdot 225 = 288$ euros.

b) $f(x) = 18 + 1{,}2x$ euros, siendo x el número de camisetas pedidas.

c) $f(x) \leqslant 540 \iff 18 + 1{,}2x \leqslant 540 \Rightarrow x \leqslant 435$
Pueden encargar como máximo 435 camisetas.

d) Han invertido $f(300) = 378$ euros, y con las ventas han obtenido $3 \cdot 242$ euros $= 726$ euros; por tanto, han ganado 348 euros.

6. a) La altura debe medir 8 cm; por tanto, el área será $A = 10 \times 8\ \text{cm}^2 = 80\ \text{cm}^2$.

b) Sea x la medida de la base en cm. La altura es:

$\dfrac{36 - 2x}{2}\ \text{cm} = 18 - x\ \text{cm}$

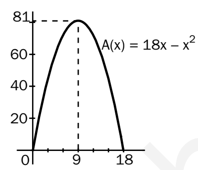
$A(x) = x(18 - x)\ \text{cm}^2 = 18x - x^2\ \text{cm}^2$

c) No se considera cero como posible valor del área, pues no sería un rectángulo propiamente dicho. Así pues:

$A(x) > 0$ y $x > 0 \iff$
$\iff 18x - x^2 = x(18 - x) > 0,\ x > 0 \iff$
$\iff 18 - x > 0,\ x > 0 \iff 0 < x < 18$

Solución: $D(A) = (0, 18)$

d)



7. a) En la empresa A le costaría: $30 + 0{,}09 \cdot 150 = 43{,}5$ euros y en la empresa B: $0{,}15 \cdot 150 = 22{,}5$ euros; por tanto, es más rentable la empresa B.

b) Siendo x el número de kilómetros recorridos, $A(x) = 30 + 0{,}09x$ y $B(x) = 0{,}15x$.

c) Se trata de saber para qué valores de x, $A(x) < B(x)$.
$30 + 0{,}09x < 0{,}15x \Rightarrow x > 500$

Solución: Superados los 500 km resulta más rentable la empresa A.

8. a) Ese mes cobró los 600 euros fijos más la comisión correspondiente a los 4 808 euros:

$600 + \dfrac{15 \cdot 4\,808}{100}$ euros $= 1\,321{,}2$ euros

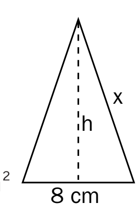
b) $f(x) = 600 + \dfrac{15x}{100}$, siendo x el importe de las ventas mensuales.

c) $f(x) = 1\,502{,}53 = 600 + \dfrac{15x}{100} \Rightarrow x = 6\,016{,}87$
El importe de las ventas fue de 6 016,87 euros.

9. Aplicando el teorema de Pitágoras:
$h^2 = x^2 - 4^2 \Rightarrow h = \sqrt{x^2 - 16}$

Por tanto:

$A(x) = \dfrac{8\sqrt{x^2 - 16}}{2}\ \text{cm}^2 = 4\sqrt{x^2 - 16}\ \text{cm}^2$



7 Funciones dadas por tablas

1. Escribe los cinco primeros términos de las sucesiones:

a) $a_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$

b) $b_n = 1 + 2^{n-2}$

2. Considera la sucesión $a_n = \frac{n^2 + 1}{3n}$. ¿A partir de qué término todos son mayores que 100?

3. Sabiendo que sen 45° = 0,7071 y que sen 48° = 0,7431, calcula mediante interpolación lineal sen 47°. Compara el resultado que obtienes por este procedimiento con el que te proporciona la calculadora y estima el error absoluto cometido.

4. Calcula $\sqrt{147}$ por interpolación cuadrática. Utiliza los números 145, 146 y 148 y redondea con cuatro decimales los valores que te da la calculadora. Compara el resultado que has obtenido con el valor que te da la calculadora y estima el error absoluto cometido.

5. Una empresa dedicada a la comercialización de vino necesita encargar las etiquetas que se adhieren a las botellas para la producción del año 2006. El director duda entre encargar 120 000 etiquetas o 150 000. Teniendo en cuenta que en las etiquetas figura el año de la cosecha (por tanto, no sirven de un año para otro), y que los datos de ventas de la empresa en los últimos años vienen dados por la tabla adjunta, ¿cuántas etiquetas le aconsejarías que encargase?

Año	1995	1997	1999
N.º de botellas vendidas (en miles)	72	80	90

6. El crecimiento demográfico de un pueblo está reflejado en la tabla siguiente:

Año	1930	1960	1990
N.º de habitantes	2 030	3 150	5 670

a) Mediante una función de interpolación de segundo grado, estima cuál era la población en 1975.
b) Estima cuál puede ser su población en el año 2070. ¿Encuentras fiable este dato?

7. El número de universitarios en España, redondeado a miles, en los años indicados está reflejado en la tabla siguiente:

Año	1976	1980	1990
N.º de licenciados (en miles)	28	41	70

Mediante interpolación cuadrática estima:

a) ¿Cuántos licenciados había en 1985?
b) ¿Cuántos licenciados habrá en el año 2010?

SOLUCIONES

1. a) $a_1 = 2$

$a_2 = 2{,}25$

$a_3 = 2{,}3703...$

$a_4 = 2{,}4414...$

$a_5 = 2{,}4883...$

b) $b_1 = \dfrac{3}{2}$

$b_2 = 2$

$b_3 = 3$

$b_4 = 5$

$b_5 = 9$

2. $a_n > 100 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \dfrac{n^2+1}{3n} > 100 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow n^2-300n+1 > 0 \Leftrightarrow$

$n \geqslant 300$

Solución: A partir de a_{300}.

3. Se necesita una función $f(x) = ax + b$ que pase por los puntos (45; 0,7071) y (48; 0,7431).

$$\begin{cases} f(45) = 45a + b = 0{,}7071 \\ f(48) = 48a + b = 0{,}7431 \end{cases} \Rightarrow \quad \begin{matrix} a = 0{,}012 \\ b = 0{,}1671 \end{matrix}$$

$f(x) = 0{,}012x + 0{,}1671$

Por interpolación sen 47° = f(47) = 0,7311.

Con la calculadora se obtiene sen 47° = 0,73135, luego el error absoluto cometido es menor que $|0{,}73135 - 0{,}7311| = 2{,}5370 \cdot 10^{-4}$.

4. Si se redondea con 4 cifras decimales se obtiene: $\sqrt{145} = 12{,}0416$; $\sqrt{146} = 12{,}0830$; $\sqrt{148} = 12{,}1655$

La función de interpolación es $f(x) = ax^2 + bx + c$.

$$\begin{cases} f(145) = 21\,025a + 145b + c = 12{,}0416 \\ f(146) = 21\,316a + 146b + c = 12{,}0830 \\ f(148) = 21\,904a + 148b + c = 12{,}1655 \end{cases} \Rightarrow$$

$\Rightarrow a = -0{,}00005;\ b = 0{,}05595;\ c = 4{,}9801$

Por interpolación $\sqrt{147} = f(147) = 12{,}1243$.

Con la calculadora se obtiene $\sqrt{147} = 12{,}12435$.

El error absoluto cometido es menor que $|12{,}12435 - 12{,}1243| < 0{,}000056$.

5. Para simplificar los cálculos, se puede tomar 1995 como «año cero».

La función de interpolación $f(x) = ax^2 + bx + c$ pasa por los puntos (0, 72), (2, 80) y (4, 90).

$$\begin{cases} f(0) = c = 72 \\ f(2) = 4a + 2b + c = 80 \\ f(4) = 16a + 4b + c = 90 \end{cases} \Rightarrow$$

$\Rightarrow f(x) = \dfrac{1}{4}x^2 + \dfrac{7}{2}x + 72$

Para conocer el número de miles de botellas que se venderían el año 2006, se calcula f(11) = 141.

El director debe encargar 150 000 etiquetas.

6. Se toma 1930 como «año cero»; $f(x) = ax^2 + bx + c$

$$\begin{cases} f(0) = c = 2\,030 \\ f(30) = 900a + 30b + c = 3\,150 \\ f(60) = 3\,600a + 60b + c = 5\,670 \end{cases} \Rightarrow$$

$\Rightarrow f(x) = \dfrac{7}{9}x^2 + 14x + 2\,030$

a) Como f(45) = 4 235, se deduce que la población en 1975 fue de 4 235 habitantes.

b) Calculando f(140) se puede predecir para el año 2070 una población de 19 234 habitantes. Aunque el cálculo matemático es correcto, la extrapolación se hace para datos muy lejanos de los dados. El resultado obtenido no es muy fiable.

7. Se toma 1976 como «año cero»; $f(x) = ax^2 + bx + c$

$$\begin{cases} f(0) = c = 28 \\ f(4) = 16a + 4b + c = 41 \\ f(14) = 196a + 14b + c = 70 \end{cases} \Rightarrow$$

$\Rightarrow f(x) = \dfrac{-x^2 + 134x + 1\,120}{40}$

a) f(9) = 56,125.

En 1985 había en España 56 000 licenciados.

b) f(34) = 113. Se estima que el año 2010 habrá en España 113 000 licenciados.

8 Progresiones. Matemática financiera

1. El término que ocupa el lugar 15 en una progresión geométrica es 28 y el que ocupa el lugar 51 es 88. Encuentra:

a) La diferencia de la progresión.

b) El primer término.

c) El término vigésimo primero.

d) El término general.

2. Un conductor iba por una carretera y, de pronto, vio una enorme piedra cruzada en el medio de la calzada. En ese momento pisó a fondo el pedal del freno. En el primer segundo recorrió 10 metros; en el segundo, la mitad de esa distancia, y así sucesivamente. Sabiendo que la piedra se encontraba a 21 metros del coche en el instante en que la vio, calcula:

a) ¿Qué espacio recorrió en el séptimo segundo?

b) ¿Consiguió evitar el choque?

3. Calcula el número de años en los que se duplicará un capital depositado al 6 % de interés compuesto.

4. ¿Qué anualidad habrá que depositar durante 6 años al 7 % anual para amortizar una deuda de 15 000 euros?

5. En un laboratorio existe un cultivo de bacterias que inicialmente se componía de 20 000 individuos. Al cabo de 12 horas, se contabilizan 130 000 bacterias. ¿Cuál es el porcentaje de crecimiento del cultivo por hora?

6. Se quiere obtener un capital de 25 000 euros en 20 años y para ello se concierta la operación con un banco que nos da el 8 % anual. ¿Cuál es la anualidad de capitalización que debemos depositar?

7. ¿Cuántos años serán necesarios para devolver un crédito de 32 000 euros a una entidad bancaria que nos lo ha prestado al 6 % si las anualidades que podemos pagar son de 4 000 euros?

8. Para comprar un equipo de música mi abuelo me ha prestado 2 500 euros al 3 % de interés compuesto. ¿Qué cantidad le tengo que devolver mensualmente si me ha dado un plazo de 2 años para amortizar la deuda?

9. El precio de una vivienda aumenta cada año a razón del 4 % respecto al año anterior.

a) ¿Cuál es el porcentaje de aumento al cabo de 5 años?

b) ¿Cuál será el precio de una vivienda después de 5 años si su precio inicial era de 150 000 euros?

10. El índice anual del coste de la vida a lo largo de 4 años consecutivos ha aumentado un 2,5 %, 3,2 %, 2,3 % y 1,8 %, respectivamente. Calcula cuánto ha aumentado de precio al cabo de esos años un objeto que inicialmente costaba 560 euros.

11. Depositamos en un banco un capital de 16 000 euros al 4 % de interés compuesto con períodos de capitalización trimestrales. Calcula el capital final que obtendremos al cabo de 5 años sabiendo que Hacienda retiene el 18 % de los intereses en cada pago.

12. Se llama tasa anual equivalente (TAE) a la tasa de interés anual resultante que produce un capital que se liquida por períodos inferiores o superiores a un año. Se calcula por la fórmula $\text{TAE} = [(1 + i)^n - 1)] \cdot 100$, donde n son los períodos de liquidación que contiene el año.

a) Halla la TAE de un préstamo que se amortiza a razón de un interés del 1 % mensual.

b) ¿Es igual que la entidad financiera nos aplique al crédito un interés del 1 % mensual que del 12 % anual?

13. Una tarjeta de crédito de una entidad bancaria nos aplica un interés de demora por aplazamiento de pago del 1,25 % bimensual. Calcula la tasa anual equivalente.

SOLUCIONES

1. a) $\left.\begin{array}{l} a_{15} = a_1 + 14d \\ a_{51} = a_1 + 50d \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} 28 = a_1 + 14d \\ 88 = a_1 + 50d \end{array}\right\} \Rightarrow$

$\Rightarrow d = \dfrac{5}{3}$

b) $a_1 = 28 - 14 \cdot \dfrac{5}{3} = \dfrac{14}{3}$

c) $a_{21} = a_1 + 20d = \dfrac{14}{3} + 20 \cdot \dfrac{5}{3} = 38$

d) $a_n = a_1 + (n-1)d = \dfrac{14}{3} + (n-1) \cdot \dfrac{5}{3} =$

$= \dfrac{9 + 5n}{3}$

2. Los espacios recorridos en cada segundo forman una progresión geométrica de razón $r = \dfrac{1}{2}$.

El termino general es:

$a_n = a_1 \cdot r^{n-1} = 10 \cdot \left(\dfrac{1}{2}\right)^{n-1} = 20 \cdot \left(\dfrac{1}{2}\right)^n$

a) $a_7 = 20 \cdot \left(\dfrac{1}{2}\right)^7 = 0{,}15625$ m

b) Para evitar el choque, el espacio recorrido desde que toca el freno hasta que se para debe ser inferior a 21 m. Este espacio se obtiene sumando los infinitos términos de la progresión geométrica.

$S = \dfrac{a_1}{1-r} = \dfrac{10}{1 - \dfrac{1}{2}} = 20,$

luego evitó el choque.

3. $C_n = 2C \Rightarrow 2C = C \cdot (1 + 0{,}06)^n \Rightarrow$

$\Rightarrow 2 = 1{,}06^n \Rightarrow$

$\Rightarrow n = 11{,}89566 \approx n = 11$ años 10 meses 22 días

4. $A = \dfrac{15\,000 \cdot 0{,}07(1 + 0{,}07)^6}{(1 + 0{,}07)^6 - 1} = 3\,146{,}94$ euros.

5. $N_n = N(1 + i)^n \Rightarrow$

$\Rightarrow 130\,000 = 20\,000 \cdot (1 + i)^{12} \Rightarrow$

$\Rightarrow (1 + i)^{12} = 6{,}5 \Rightarrow 1 + i = 6{,}5^{\frac{1}{12}} = 1{,}169 \Rightarrow$

$\Rightarrow i = 0{,}169.$

La población crece a razón del 16,9 % a la hora.

6. $25\,000 = A(1 + 0{,}08)\dfrac{(1 + 0{,}08)^{20} - 1}{0{,}08} \Rightarrow$

$\Rightarrow A = \dfrac{25\,000}{49{,}42} = 505{,}84$ euros.

7. $32\,000 = \dfrac{4\,000[(1 + 0{,}06)^n - 1]}{0{,}06(1 + 0{,}06)^n} \Rightarrow$

$\Rightarrow 8 \cdot 0{,}06 = \dfrac{1{,}06^n - 1}{1{,}06^n}$

Si llamamos $x = 1{,}06^n$, se trata de resolver la siguiente ecuación:

$0{,}48 = \dfrac{x - 1}{x} \Rightarrow$

$\Rightarrow 0{,}52x = 1 \Rightarrow x = 1{,}92 = 1{,}06^n \Rightarrow$

$\Rightarrow n = \dfrac{\log 1{,}92}{\log 1{,}06} \approx 11{,}22.$

Es decir, 11 años, 2 meses y 20 días.

8. $M = \dfrac{D\dfrac{i}{12}\left(1 + \dfrac{i}{12}\right)^{12n}}{\left(1 + \dfrac{i}{12}\right)^{12n} - 1} \Rightarrow$

$\Rightarrow M = \dfrac{2\,500 \cdot 0{,}0025 \cdot 1{,}0025^{24}}{1{,}0025^{24} - 1} \Rightarrow$

$\Rightarrow M = 107{,}46$ euros mensuales.

9. a) $1{,}04^5 = 1{,}2167 \Rightarrow$ el porcentaje de aumento es del 21,67 % al cabo de los 5 años.

b) $150\,000 \cdot 1{,}2167 = 182\,505$ euros.

10. $P = 560 \cdot 1{,}025 \cdot 1{,}032 \cdot 1{,}023 \cdot 1{,}018 =$
$= 616{,}90$ euros.

11. $C_n = C\left(1 + 0{,}82\dfrac{i}{4}\right)^{4n} \Rightarrow$

$\Rightarrow C_5 = 16\,000\left(1 + 0{,}82 \cdot \dfrac{0{,}04}{4}\right)^{4 \cdot 5} =$

$= 16\,000 \cdot 1{,}0082^{20} = 18\,838{,}83$ euros.

12. a) $TAE = [(1 + 0{,}01)^{12} - 1)] \cdot 100 = 12{,}68$ %

b) No, porque para un 12 % anual, la tasa anual equivalente sería:

$TAE = [(1 + 0{,}12)^1 - 1)] \cdot 100 = 12$ %

13. $TAE = [(1 + 0{,}0125)^6 - 1)] \cdot 100 = 7{,}74$ %

9 Transformaciones geométricas y funciones

1. Razona si las siguientes afirmaciones son verdaderas o falsas:

a) Una función tiene que ser necesariamente par o impar.

b) Si el dominio de f es $[0, +\infty)$, entonces f no puede ser par.

c) Una función que tiene un eje de simetría es necesariamente par.

d) La función $f(x) = 0$ es par e impar a la vez.

e) Si $f(x)$ es una función par, entonces $-f(x)$ es impar.

2. Estudia el tipo de simetría que tiene la siguiente función definida a trozos:

$$f(x) = \begin{cases} x^2 - 1 & \text{si } |x| \geqslant 3 \\ 8 & \text{si } x \in (-3, 3) \end{cases}$$

3. Sea $f(x)$ una función par. ¿Cómo es, si existe, la función definida $y = \dfrac{1}{f(x)}$?

4. ¿Cuál es la función simétrica de $f(x) = x^3 - 2x^2 + x - 5$ respecto al eje de ordenadas?

5. ¿Cuál es el eje de simetría de la función $f(x) = x^2 + 2x - 15$?

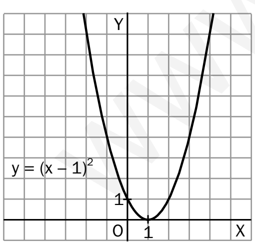
6. Considera la función $f(x) = \dfrac{3}{x}$.

a) Halla la expresión algebraica de la función que resulta al trasladarla oblicuamente según el vector $\vec{v} = (1, 1)$.

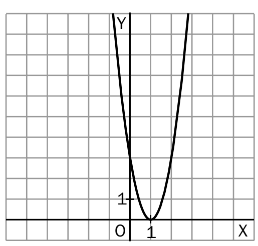
b) Al ser f una función impar, tiene su centro de simetría en el punto O(0, 0). ¿Es impar la función trasladada? ¿Tendrá la función trasladada centro de simetría? ¿En qué punto?

7. Si quieres que la gráfica de la función $f(x) = 2x^2 + 1$ se transforme en la gráfica de la función $g(x) = \dfrac{3x^2}{2} + 3$, ¿qué escala de dilatación debes aplicar en cada eje?

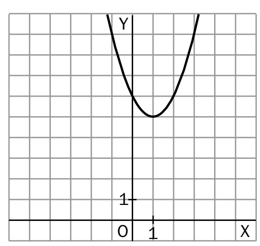
8. La primera gráfica representa la función $f(x) = (x - 1)^2$. Escribe a partir de ella la expresión algebraica de las funciones representadas en los apartados a, b y c.



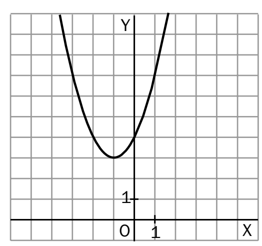
a)



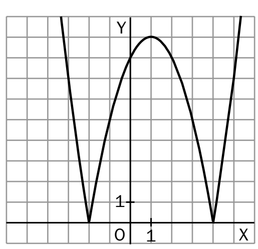
b)



c)



9. La siguiente gráfica representa el valor absoluto de una función de la forma $f(x) = ax^2 + bx + c$. Calcula los valores de a, b y c.



SOLUCIONES

1. a) Falso. La función $f(x) = x^2 + x$ no es ni par ni impar.
b) Verdadero. Si $D(f) = [0, +\infty)$, entonces $f(-x)$ no tiene sentido para $x > 0$ y, por tanto, no puede cumplirse que $f(x) = f(-x)$, es decir, f no puede ser par.
c) Falso. La función $f(x) = x^2 - 6x + 8$ tiene como eje de simetría el eje de la parábola y no es par.
d) Verdadero. $f(x) = 0 = f(-x)$.
e) Falso. $f(x) = |x|$ es par y, sin embargo, $-f(x)$ no es impar.

2. Se estudia la simetría en cada trozo:

$$f(-x) = \begin{cases} (-x)^2 - 1 & \text{si } |x| \geqslant 3 \\ 8 & \text{si } x \in (-3, 3) \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow f(-x) = \begin{cases} x^2 - 1 & \text{si } |x| \geqslant 3 \\ 8 & \text{si } x \in (-3, 3) \end{cases}$$

Solución: f es par, pues $f(x) = f(-x)$.

3. $\dfrac{1}{f(-x)} = \dfrac{1}{f(x)}$, pues $f(x) = f(-x)$.

Por tanto, $y = \dfrac{1}{f(x)}$ es par.

4. $g(x) = f(-x) = -x^3 - 2x^2 - x - 5$

5. Por tratarse de una parábola, el eje de simetría es el eje de la parábola. Como las raíces de la función son $x = 3$ y $x = -5$, se tiene que $x = -1$ es el eje de simetría de la función, pues $x = -1$ es el punto medio del intervalo $[-5, 3]$.

6. a) $g(x) = f(x - 1) + 1 = \dfrac{3}{x-1} + 1 =$

$$= \frac{3 + x - 1}{x - 1} = \frac{x + 2}{x - 1}$$

b) $g(-x) \neq -g(x)$; por tanto, $g(x)$ no es impar. Sin embargo, $g(x)$ tiene como centro de simetría el trasladado del origen, esto es, $C(1, 1)$.

7. Por ser una dilatación, $g(x)$ es de la forma:

$$g(x) = k\,f\left(\frac{x}{m}\right) = \frac{2kx^2}{m^2} + k$$

Hay que resolver: $\dfrac{2kx^2}{m^2} + k = \dfrac{3x^2}{2} + 3$

Igualando coeficientes se obtiene que $k = 3$ y $m = \pm 2$. Se toma solo la solución positiva de m, por la naturaleza de las transformaciones.

Solución: La dilatación oblicua es según la escala $x = 200\ \%$, $y = 300\ \%$.

8. a) $f(x) = 3(x - 1)^2$
b) $f(x) = (x - 1)^2 + 5$
c) $f(x) = (x - 1 + 2)^2 + 3 = (x + 1)^2 + 3$

9. Los puntos $(-2, 0)$ y $(4, 0)$ pertenecen a la gráfica de la función. Además, $|f(0)| = 8$; por tanto:

$$\begin{cases} f(-2) = 4a - 2b + c = 0 \\ f(4) = 16a + 4b + c = 0 \\ |f(0)| = |c| = \pm c = 8 \end{cases} \Rightarrow$$

$\Rightarrow a = -1;\ b = 2;\ c = 8$ o $a = 1;\ b = -2;\ c = -8$

Según c sea -8 u 8 se obtiene $f(x) = x^2 - 2x - 8$ o $f(x) = -x^2 + 2x + 8$, respectivamente.

Nótese que las dos posibles soluciones corresponden a funciones opuestas y, por tanto, ambas tienen la misma función valor absoluto.

10 Funciones exponenciales y logarítmicas

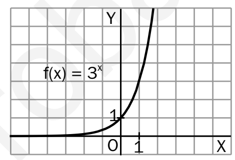
1. Una función exponencial de la forma $f(x) = k\,a^x$, $a > 0$, es tal que $f(2) = 20$ y $f(-1) = 2{,}5$.

a) Escribe su expresión algebraica.
b) Represéntala gráficamente.

2. Razona si son verdaderas o falsas las siguientes expresiones:

a) $1 < \log 20 < 2$
b) $\log 100x = 2 \log x$
c) $3 < \log_2 7 < 4$
d) $\log_9 1 = 0$
e) $\log_2 3 \cdot \log_3 2 = 1$
f) $\log 6 - \log 2 = \log 4$

3. A partir de la gráfica de la función $f(x) = 3^x$ construye las gráficas de:



a) $f_1(x) = \left(\dfrac{1}{3}\right)^x$
b) $f_2(x) = \log_3 x$

4. a) Calcula a sabiendo que $\log_a 9 + \log_a 4 = 2$.
b) Calcula el menor número entero x que verifica que $(1{,}34)^x > 5$.

5. Calcula el valor de la expresión $\dfrac{(0{,}16)^3 \cdot 2\,000}{\sqrt{128}}$ sin usar la calculadora. Utiliza logaritmos y toma 0,3 como valor de log 2.

6. Resuelve las siguientes ecuaciones exponenciales:

a) $2^x + 2^{x+1} + 2^{x+2} = 56$
b) $5^{2x} + 4 \cdot 5^x - 5 = 0$
c) $4^{x+3} = \dfrac{1}{2^{x-3}}$

7. Resuelve las siguientes ecuaciones logarítmicas:

a) $\log(x + 1) - \log x = 1$
b) $2 \log x - \log(6 - x) = 0$
c) $\log(4x - 1) - \log(x - 2) = \log 5$

8. Resuelve los siguientes sistemas de ecuaciones:

a) $\begin{cases} 2^x + 2^y = 10 \\ 2^{x-y} = 4 \end{cases}$
b) $\begin{cases} \log x + \log y = 3 \\ \log x - \log y = 1 \end{cases}$
c) $\begin{cases} x - y = 4 \\ \log_2 x - \log_2 y = 1 \end{cases}$

9. El crecimiento aproximado de la población de un país viene dado por la fórmula $P(t) = P_0 \cdot (2{,}7)^{\frac{m \cdot t}{100}}$, siendo $P(t)$ la población final, P_0 la población inicial, m la tasa media de crecimiento anual (en tanto por cien) y t el tiempo transcurrido (en años).

Un país A tenía en 1990 una población de 14 000 000 de habitantes. Sabiendo que su tasa media de crecimiento anual es del 2,5 %, calcula:

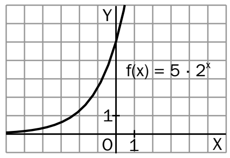
a) Cuántos habitantes tendrá en el año 2010.
b) Cuántos años tienen que pasar para que duplique su población respecto a la del año 1990.
c) La tasa media de crecimiento que tendría si la población pasase de los 14 millones de habitantes de 1990 a 20 millones de habitantes en el año 2020.

SOLUCIONES

1. a) $\begin{cases} f(2)=20 \\ f(-1)=2,5 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} ka^2=20 \\ ka^{-1}=2,5 \end{cases} \Rightarrow$ b)

$\Rightarrow a^3 = \dfrac{20}{2,5} = 8 \Rightarrow \begin{matrix} a = 2 \\ k = 5 \end{matrix}$

$f(x) = 5 \cdot 2^x$



2. a) Verdadero, pues $1 = \log 10$, $2 = \log 100$ y $\log x$ es creciente.

b) Falso (excepto para $x = 100$), pues $2 \log x = \log x^2$, que es en general distinto de $\log 100x$. Coinciden si $x^2 = 100x$, es decir, si $x = 100$ o $x = 0$ (solución no válida pues no existe $\log 0$).

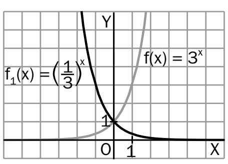
c) Falso, pues $\log_2 7 = \dfrac{\log 7}{\log 2} = 2,8073$.

d) Verdadero, pues $9^0 = 1$.

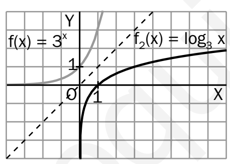
e) Verdadero, $\log_2 3 \cdot \log_3 2 = \dfrac{\log 3}{\log 2} \cdot \dfrac{\log 2}{\log 3} = 1$.

f) Falso, $\log 6 - \log 2 = \log \dfrac{6}{2} = \log 3 \neq \log 4$.

3. a)



b)



4. a) $\begin{cases} \log_a 9 + \log_a 4 = 2 \\ \log_a 9 + \log_a 4 = \log_a 9 \cdot 4 = \log_a 36 \end{cases} \Rightarrow$

$\Rightarrow \log_a 36 = 2 = \log_a a^2 \Rightarrow 36 = a^2 \Rightarrow a = 6$

Observación: Se desprecia $a = -6$ porque la base de un logaritmo debe ser mayor que cero.

b) $(1,34)^x > 5 \iff x > \log_{1,34} 5 \iff$

$\iff x > \dfrac{\log 5}{\log 1,34} \iff x > 5,4991...$

Solución: $x = 6$.

5. $\log \dfrac{(0,16)^3 \cdot 2\,000}{\sqrt{128}} = 3\log 0,16 + \log 2\,000 - \dfrac{1}{2}\log 128 =$

$= 3 \log \dfrac{2^4}{100} + \log(2 \cdot 1\,000) - \dfrac{1}{2} \log 2^7 =$

$= 3(4 \log 2 - \log 100) + \log 2 + \log 1\,000 - \dfrac{7}{2} \log 2 =$

$= 3(1,2 - 2) + 0,3 + 3 - \dfrac{2,1}{2} = -0,15$

6. a) $2^x(1 + 2 + 4) = 56 \iff 2^x = 8 \iff x = 3$

b) Haciendo el cambio de variable $5^x = a$ se obtiene: $a^2 + 4a - 5 = 0 \iff a = 1, a = -5$.
Se desprecia la solución negativa, pues $5^x > 0$.
Se tiene que $5^x = 1$ y, por tanto, $x = 0$.

c) $4^{x+3} = 2^{2(x+3)} = 2^{-(x-3)} \Rightarrow 2x + 6 = -x + 3 \Rightarrow$
$\Rightarrow x = -1$

7. a) $\log \dfrac{x+1}{x} = \log 10 \Rightarrow \dfrac{x+1}{x} = 10 \Rightarrow x = \dfrac{1}{9}$

b) $\log \dfrac{x^2}{6-x} = \log 1 \Rightarrow \dfrac{x^2}{6-x} = 1 \Rightarrow$
$\Rightarrow x^2 + x - 6 = 0 \Rightarrow x = 2, x = -3$

La solución $x = -3$ no vale pues no existe $\log -3$.

c) $\log \dfrac{4x-1}{x-2} = \log 5 \Rightarrow \dfrac{4x-1}{x-2} = 5 \Rightarrow$
$\Rightarrow 4x - 1 = 5x - 10 \Rightarrow x = 9$

8. a) Cambio de variable $2^x = a$ y $2^y = b$:

$\begin{cases} a + b = 10 \\ \dfrac{a}{b} = 4 \end{cases} \Rightarrow 4b + b = 10 \Rightarrow$

$\begin{cases} b = 2 \Rightarrow 2^y = 2 \\ a = 8 \Rightarrow 2^x = 8 \end{cases} \Rightarrow x = 3, y = 1$

b) $\begin{cases} \log xy = \log 1\,000 \\ \log \dfrac{x}{y} = \log 10 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} xy = 1\,000 \\ \dfrac{x}{y} = 10 \end{cases} \Rightarrow$

$\Rightarrow 10y^2 = 1\,000 \Rightarrow y = \pm 10;\ x = 10y = \pm 100$

c) $\begin{cases} x - y = 4 \\ \log_2 \dfrac{x}{y} = \log_2 2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x - y = 4 \\ \dfrac{x}{y} = 2 \end{cases} \Rightarrow$

$\Rightarrow \begin{cases} 2y - y = 4 \\ x = 2y \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y = 4 \\ x = 8 \end{cases}$

9. a) $P(20) = 14\,000\,000(2,7)^{\frac{2,5 \cdot 20}{100}}$ habitantes $=$
$= 22\,135\,943$ habitantes.

b) $28\,000\,000 = 14\,000\,000(2,7)^{\frac{2,5t}{100}} \iff$
$\iff 2 = (2,7)^{0,025t} \iff \log_{2,7} 2 = 0,025t \iff$
$\iff t = \dfrac{\log_{2,7} 2}{0,025} = \dfrac{\log 2}{0,025 \log 2,7} = 27,91$

Solución: 27 años y 11 meses.

c) $20\,000\,000 = 14\,000\,000(2,7)^{\frac{30\,m}{100}} \iff$
$\iff 2 = (2,7)^{0,3m} \iff \log_{2,7} 2 = 0,3\,m \iff$
$\iff m = \dfrac{\log_{2,7} 2}{0,3} = \dfrac{\log 2}{0,3 \log 2,7} = 2,3261$

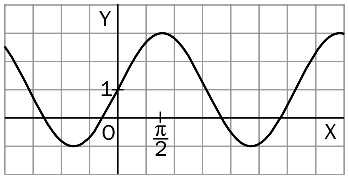
La tasa media de crecimiento sería de un 2,3 %.

11 Funciones periódicas

1. Halla el valor de x en cada una de las siguientes expresiones, teniendo en cuenta que en los dos primeros apartados x es un ángulo del primer cuadrante:

a) $\text{sen } 2x = 0{,}5$ b) $3\cos x = 2$ c) $5 \text{ tg } (43° \ 34') = x$ d) $\cos 0{,}75 \text{ rad} = \dfrac{x}{4}$

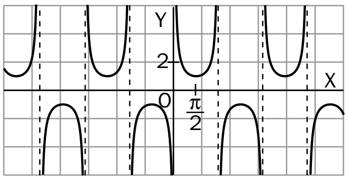
2. Escribe la expresión algebraica de la función trigonométrica cuya gráfica es:



3. Dibuja la gráfica de la función $f(x) = |\cos x|$ e indica:

a) El dominio.
b) El recorrido.
c) El período.
d) Si es o no es simétrica, y señala en caso afirmativo el tipo de simetría.
e) Los puntos en los que corta los ejes coordenados en el intervalo $[0, \pi]$.
f) Los intervalos de crecimiento y decrecimiento en $[0, \pi]$.

4. A partir de la gráfica de la función $y = \text{cosec } x$, señala:



a) Los puntos en los que no está definida.
b) El período.
c) El tipo de simetría.
d) Los puntos en los que la gráfica corta los ejes coordenados.

5. Indica el período de las siguientes funciones:

a) $y = \text{sen}^2 x$ b) $y = \text{sen } x \cdot \cos x$

6. Dos lados de un paralelogramo miden 8 y 5 centímetros, respectivamente. Escribe la función que indica el área de este paralelogramo en función del ángulo que forman sus lados.

7. El regulador de la calefacción de una casa está programado durante el invierno de modo que su consumo, en kw/h a lo largo del día, viene dado por la función: $c(t) = 1 + \cos \dfrac{\pi(t - 3)}{12}$, donde t indica la hora, siendo la «hora cero» la medianoche.

a) ¿Cuál es el consumo a las 7 de la mañana? ¿Y a las 2 de la tarde?
b) ¿En qué momento del día se consume más?
c) ¿Hay algún momento en el que el aparato se apague?
d) ¿Cuál es el período de la función c(t)?

SOLUCIONES

1. Para resolver los tres primeros apartados, la calculadora debe estar en modo DEG; sin embargo, en el último apartado será necesario el modo RAD. En los dos primeros hay que utilizar la función recíproca.

a) $2x = 30° \Rightarrow x = 15°$

b) $\cos x = \frac{2}{3} \Rightarrow x = 48°\ 11'\ 23''$

c) $x = 5 \cdot 0{,}95 = 4{,}76$

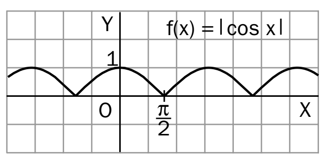
d) $\frac{x}{4} = 0{,}73 \Rightarrow x = 2{,}92$

2. $y = 2\ \text{sen}(x) + 1$

3. a) $D(f) = R$

b) $f(D) = [0, 1]$

c) Período: π



d) $f(x) = |\cos x| = |\cos(-x)| = f(-x)$
$\Rightarrow$ por tanto es una función par.

e) $\left(\frac{\pi}{2}, 0\right)$, $(0, 1)$.

f) Es decreciente en $\left(0, \frac{\pi}{2}\right)$, y creciente en $\left(\frac{\pi}{2}, \pi\right)$.

4. a) La función no está definida para $x = k\pi$, siendo k un número entero. Nótese que $\text{cosec}\ x = \frac{1}{\text{sen}\ x}$, y que en estos puntos $\text{sen}\ x = 0$.

b) Período: 2π.

c) Se trata de una función impar.

d) La gráfica nunca corta los ejes coordenados.

5. a)

x	0	$\frac{\pi}{2}$	π	$\frac{3\pi}{2}$	2π
$\text{sen}^2 x$	0	1	0	1	0

Parece que el período es π. Se comprueba aplicando la definición:

$\text{sen}^2(x + \pi) = [\text{sen}(x + \pi)]^2 = (-\text{sen}\ x)^2 =$
$= \text{sen}^2 x$

Además, el período no puede ser inferior a π, pues la función tendría que anularse en $(0, \pi)$, y esto no sucede. En resumen, $T = \pi$.

b)

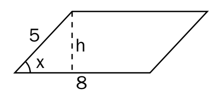
x	0	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{3\pi}{4}$	π	$\frac{5\pi}{4}$	$\frac{3\pi}{2}$	$\frac{7\pi}{4}$	2π
$\text{sen}\ x \cdot \cos x$	0	$\frac{1}{2}$	0	$-\frac{1}{2}$	0	$\frac{1}{2}$	0	$-\frac{1}{2}$	0

Parece que el período es π. Se comprueba aplicando la definición:

$\text{sen}(x + \pi) \cdot \cos(x + \pi) = (-\text{sen}\ x)(-\cos x) =$
$= \text{sen}\ x \cdot \cos x$

Además, el período no puede ser inferior a π, pues la función tendría que anularse en $(0, \pi)$, y esto no sucede, luego $T = \pi$.

6. Sea x el ángulo que forman los lados y sea h la altura en cm.



$h = 5\ \text{sen}\ x$ cm

$\text{Área}(x) = 8 \cdot 5\ \text{sen}\ x\ \text{cm}^2 = 40\ \text{sen}\ x\ \text{cm}^2$

7. a) $c(7) = 1 + \cos\frac{4\pi}{12}$ kw/h $= 1{,}5$ kw/h

$c(14) = 1 + \cos\frac{11\pi}{12}$ kw/h $= 0{,}03$ kw/h

b) El consumo es máximo cuando $\cos\frac{\pi(t-3)}{12} = 1$

$\cos\frac{\pi(t-3)}{12} = 1 \Leftrightarrow \frac{\pi(t-3)}{12} = 2k\pi,\ k \in Z \Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow t - 3 = 24k,\ k \in Z \Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow t = 3 + 24k,\ k \in Z$

Como t es una hora del día debe pertenecer al intervalo $[0, 24]$, luego $k = 0$.

Solución: A las 3 de la mañana.

c) El aparato se apaga si $c(t) = 0$.

$c(t) = 0 \Leftrightarrow \cos\frac{\pi(t-3)}{12} = -1 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \frac{\pi(t-3)}{12} = \pi + 2k\pi$, k entero $=$
$= \pi(2k + 1)$, k entero $\Leftrightarrow t - 3 = 24k + 12 \Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow t = 15 + 24k$, k entero.

Solución: El regulador se apaga a las 3 de la tarde.

d) $T = \dfrac{2\pi}{\frac{\pi}{12}} = 24$

$c(t)$ tiene un período de 24 horas.

12 Tendencia y continuidad

1. Calcula los siguientes límites:

a) $\lim\limits_{x \to 1} \dfrac{\sqrt{x} - 1}{x - 1}$ b) $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{x}{1 - \sqrt{1 - x}}$ c) $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\sqrt{9 - x} - 3}{\sqrt{x + 4} - 2}$

2. Calcula los siguientes límites:

a) $\lim\limits_{x \to \infty} \dfrac{(x + 1)^2 - 4}{x^2}$ b) $\lim\limits_{x \to +\infty} \left(\dfrac{\sqrt{x^2 - 2x}}{x - 1} - x\right)$ c) $\lim\limits_{x \to +\infty} (\sqrt{x + 2} - \sqrt{x})$

3. Calcula los siguientes límites:

a) $\lim\limits_{x \to 0^+} \log x$ b) $\lim\limits_{x \to +\infty} \left(\dfrac{1}{2}\right)^x$ c) $\lim\limits_{x \to -\infty} 2^x$

4. Estudia la continuidad de la función $f(x) = |x|$ en $x = 0$.

5. Estudia la continuidad de la siguiente función:

$$f(x) = \begin{cases} 3x - 1 & \text{si } x \leq 2 \\ x^2 + 2 & \text{si } x > 2 \end{cases}$$

6. Establece los puntos de continuidad e indica las características de las discontinuidades de la siguiente función:

$$f(x) = \begin{cases} x^2 - 1 & \text{si} \quad x \leq 0 \\ 3x - 1 & \text{si} \quad x \in (0, 1) \\ 2x & \text{si} \quad x \in (1, 3) \\ x + 2 & \text{si} \quad x \in [3, 7] \\ \dfrac{1}{x - 7} & \text{si} \quad x > 7 \end{cases}$$

7. Sea $f(x) = \begin{cases} x + 1 & \text{si} \quad x \leq 1 \\ 3 - ax^2 & \text{si} \quad x > 1 \end{cases}$. ¿Qué valor debe tomar a para que la función sea continua en $\mathbb{R}$?

8. Razona si son verdaderas o falsas las siguientes afirmaciones:

a) Si $a \notin D(f)$, entonces es imposible que exista $\lim\limits_{x \to a} f(x)$.

b) Si f es una función par y $\lim\limits_{x \to 3} f(x) = 4$, entonces $\lim\limits_{x \to -3} f(x) = 4$.

c) Si $\lim\limits_{x \to 2} f(x) = 6$, entonces $f(2) = 6$.

SOLUCIONES

1. a) $\lim\limits_{x \to 1} \dfrac{\sqrt{x} - 1}{x - 1} = \dfrac{0}{0} =$

$= \lim\limits_{x \to 1} \dfrac{(\sqrt{x} - 1)(\sqrt{x} + 1)}{(x - 1)(\sqrt{x} + 1)} =$

$= \lim\limits_{x \to 1} \dfrac{(x - 1)}{(x - 1)(\sqrt{x} + 1)} = \lim\limits_{x \to 1} \dfrac{1}{\sqrt{x} + 1} = \dfrac{1}{2}$

b) $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{x}{1 - \sqrt{1 - x}} = \dfrac{0}{0} =$

$= \lim\limits_{x \to 0} \dfrac{x(1 + \sqrt{1 - x})}{(1 - \sqrt{1 - x})(1 + \sqrt{1 - x})} =$

$= \lim\limits_{x \to 0} \dfrac{x(1 + \sqrt{1 - x})}{1 - (1 - x)} = \lim\limits_{x \to 0} (1 + \sqrt{1 - x}) = 2$

c) $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\sqrt{9 - x} - 3}{\sqrt{x + 4} - 2} = \dfrac{0}{0} =$

$= \lim\limits_{x \to 0} \dfrac{(\sqrt{9 - x} - 3)(\sqrt{9 - x} + 3)(\sqrt{x + 4} + 2)}{(\sqrt{x + 4} - 2)(\sqrt{9 - x} + 3)(\sqrt{x + 4} + 2)} =$

$= \lim\limits_{x \to 0} \dfrac{(9 - x - 9)(\sqrt{x + 4} + 2)}{(x + 4 - 4)(\sqrt{9 - x} + 3)} =$

$= \lim\limits_{x \to 0} \dfrac{-x(\sqrt{x + 4} + 2)}{x\sqrt{9 - x} + 3} =$

$= \lim\limits_{x \to 0} \dfrac{-(\sqrt{x + 4} + 2)}{\sqrt{9 - x} + 3} = \dfrac{-4}{6} = \dfrac{-2}{3}$

2. a) $\lim\limits_{x \to \infty} \dfrac{1 + \dfrac{2}{x} - \dfrac{3}{x^2}}{1} = \dfrac{1 + 0 - 0}{1} = 1$

b) $\lim\limits_{x \to +\infty} \left(\dfrac{\sqrt{1 - \dfrac{2}{x}}}{1 - \dfrac{1}{x}} - x \right) = \dfrac{\sqrt{1 - 0}}{1 - 0} - \infty = -\infty$

c) $\lim\limits_{x \to +\infty} (\sqrt{x + 2} - \sqrt{x}) = \infty - \infty =$

$= \lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{(\sqrt{x + 2} - \sqrt{x})(\sqrt{x + 2} + \sqrt{x})}{\sqrt{x + 2} + \sqrt{x}} =$

$= \lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{2}{(\sqrt{x + 2} + \sqrt{x})} = \dfrac{2}{\infty + \infty} = 0$

3. a) $\lim\limits_{x \to 0^+} \log x = -\infty$

b) $\lim\limits_{x \to +\infty} \left(\dfrac{1}{2}\right)^x = \dfrac{1}{2^\infty} = \dfrac{1}{\infty} = 0$

c) $\lim\limits_{x \to -\infty} 2^x = 2^{-\infty} = \dfrac{1}{2^\infty} = \dfrac{1}{\infty} = 0$

4. $f(x) = \begin{cases} -x & \text{si } x < 0 \\ x & \text{si } x \geqslant 0 \end{cases}$

$\lim\limits_{x \to 0^-} (-x) = \lim\limits_{x \to 0^+} x = f(0) = 0$; por tanto, es continua en $x = 0$.

5. Es una función a trozos. Cada una de las funciones parciales es continua en su dominio; por tanto, f es continua en $(-\infty, 2)$ y $(2, +\infty)$. Se trata de estudiar la continuidad en el punto de unión, $x = 2$.

$f(2) = 5,\ \lim\limits_{x \to 2^-} (3x - 1) = 5 \neq \lim\limits_{x \to 2^+} (x^2 + 2) = 6$

En $x = 2$ hay una discontinuidad de salto finito.

6. Es una función a trozos. Cada una de las funciones parciales es continua en su dominio; por tanto, f es continua en $(-\infty, 0)$, $(0, 1)$, $(1, 3)$, $(3, 7)$ y $(7, +\infty)$.

$f(0) = -1,\ \lim\limits_{x \to 0^-} (x^2 - 1) = \lim\limits_{x \to 0^+} (3x - 1) = -1$

Por tanto, en $x = 0$ f es continua.

En $x = 1$ la función no está definida; por tanto, no es continua.

$f(3) = 5,\ \lim\limits_{x \to 3^-} (2x) = 6 \neq \lim\limits_{x \to 3^+} (x + 2) = 5$

En $x = 3$ hay una discontinuidad de salto finito.

$f(7) = 9,\ \lim\limits_{x \to 7^-} (x + 2) = 9 \neq \lim\limits_{x \to 7^+} \dfrac{1}{x - 7} = +\infty$

En $x = 7$ hay una discontinuidad de salto infinito.

7. Es una función a trozos. Cada una de las funciones parciales es continua en su dominio; por tanto, f es continua en $(-\infty, 1)$ y $(1, +\infty)$. Se trata de calcular el valor de a para que f sea continua en $x = 1$.

$f(1) = 2;\ \lim\limits_{x \to 1^-} f(x) = 2;\ \lim\limits_{x \to 1^+} f(x) = 3 - a$

Por tanto, $3 - a = 2 \Rightarrow a = 1$

Solución: $a = 1$.

8. a) Falso. Puede existir el límite en un punto en el que la función no esté definida.

b) Verdadero. Las funciones pares son simétricas respecto al eje de ordenadas.

c) Falso. Puede existir el límite en un punto en el que la función no esté definida.

13 Tasas de variación y derivadas

1. Halla la ecuación de la recta tangente a la curva $f(x) = \frac{1}{x}$ en el punto de abscisa $x = 2$.

2. La recta tangente a la curva $f(x) = 4x^2 - x$ en un determinado punto tiene de pendiente 7. Halla el punto de tangencia.

3. ¿En qué punto son paralelas la recta de ecuación $x - y = 0$ y la recta tangente a la curva $y = 2x^2 - x$?

4. ¿En qué punto la recta tangente a la curva $y = x^2 + 2x - 1$ es paralela al eje OX?

5. El crecimiento, en centímetros, de una planta durante sus primeros ocho días de vida viene dado por la función $f(x) = 3^{x-8}$, que indica la medida de la planta transcurridos x días desde su nacimiento.

a) ¿Cuánto mide la planta finalizado el cuarto día? ¿Y si ha finalizado el octavo día?
b) ¿Cuál fue la tasa de crecimiento en esos cuatro días?
c) ¿Cuál fue la tasa media de crecimiento en ese período?
d) ¿Crees que la función dada puede representar el crecimiento de la planta a lo largo de toda su vida? Razona la respuesta.

6. La población activa de un país es el conjunto de personas que trabajan (ocupados) y aquellas que buscan trabajo (parados). La tabla muestra la evolución de la población activa en España, en miles de personas, en los años que se indican:

Año	1993	1994	1995	1996	1997
Ocupados	13 878,8	11 730,0	12 142,7	12 543,6	12 914,6
Parados	3 573,4	3 738,2	3 579,4	3 491,8	3 292,6
Total (activos)					
Tasa de paro (%)					

a) Halla la población activa en cada año y completa las casillas correspondientes de la tabla.
b) ¿Cuál fue la variación de la población activa entre 1993 y 1994? ¿Y entre 1993 y 1997?
c) ¿Cuál fue la variación media de la población activa entre 1993 y 1997?
d) Se llama tasa de paro anual, medida en tanto por uno, a la relación entre el número de parados y el de activos de cada año. Halla la tasa de paro correspondiente a cada uno de los años reflejados en la tabla y exprésala en tanto por ciento.
e) ¿Cuál fue el peor año para el empleo durante el período 1993-1997? ¿Cuál fue el mejor?
f) ¿Cuál fue la variación de la tasa media de paro entre 1993 y 1997?

7. El espacio que recorre un coche en los primeros diez minutos desde que sale de un garaje hasta que entra en una autopista sigue la ecuación $e(t) = \frac{t^2}{12}$, donde el tiempo viene dado en minutos y el espacio en kilómetros.

a) ¿Cuál es la velocidad media del coche en estos diez minutos?
b) ¿A qué velocidad circula en el momento en que entra en la autopista? Exprésala en km/h.
c) Un día el conductor recibe una multa porque, según el radar de la policía, en el minuto ocho rebasó el límite de 70 km/h existente en el lugar por el que pasaba. ¿Puede recurrir la multa?

8. Considera la función $f(x) = \begin{cases} 2x + 3 & \text{si } x \leq 2 \\ x^2 + 4 & \text{si } x > 2 \end{cases}$. Calcula $f'(0)$ y $f'(3)$.

SOLUCIONES

1. La ecuación de la recta tangente es:

$y - f(2) = f'(2)(x - 2)$

$f'(x) = -\dfrac{1}{x^2}$

Solución: $y - \dfrac{1}{2} = -\dfrac{1}{4}(x - 2) \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \quad 4y - 2 = -x + 2 \Leftrightarrow x + 4y - 4 = 0$

2. La pendiente de la recta tangente en el punto es la derivada de la función en dicho punto.

$f'(x) = 8x - 1 = 7 \Leftrightarrow x = 1$

Solución: El punto es $P(1, f(1)) = (1, 3)$.

3. Dos rectas paralelas tienen la misma pendiente.

La recta $x - y = 0$ tiene pendiente $y = 1$, y la recta tangente a la curva $y = f(x) = 2x^2 - x$ tiene como pendiente en un punto la derivada de la función en el punto, es decir, $y' = 4x - 1$.

$4x - 1 = 1 \Rightarrow x = \dfrac{1}{2}$

Solución: El punto es $P\left(\dfrac{1}{2}, f\left(\dfrac{1}{2}\right)\right) = \left(\dfrac{1}{2}, 0\right)$

4. En el punto buscado, la recta tangente a la curva $y = f(x) = x^2 + 2x - 1$ tiene la misma pendiente que el eje OX, es decir:

$y' = 2x + 2 = 0 \Rightarrow x = -1$

Solución: El punto es: $P(-1, f(-1)) = P(-1, -2)$. Nótese que se trata del vértice de la parábola.

5. a) $f(4) = 3^{-4} = 0{,}012$ cm
$f(8) = 3^0 = 1$ cm

b) La tasa de crecimiento fue: $f(8) - f(4) = 0{,}988$ cm

c) $\text{TVM}[4, 8] = \dfrac{f(8) - f(4)}{8 - 4} = \dfrac{0{,}988}{4} = 0{,}247$ cm/día

d) No. Supondría que la planta crece indefinidamente, pues $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$, y este comportamiento no es propio de los seres vivos.

Este es un ejemplo claro de la importancia que tiene restringir el dominio de una función.

6. a) y d)
tasa de paro $= \dfrac{\text{población parada}}{\text{población activa}}$ en tanto por uno

Año	1993	1994	1995	1996	1997
Ocupados	13 878,8	11 730,0	12 142,7	12 543,6	12 914,6
Parados	3 573,4	3 738,2	3 579,4	3 491,8	3 292,6
Total (activos)	17 452,2	15 468,2	15 722,1	16 035,4	16 207,2
Tasa de paro (%)	20,5	24,2	22,8	21,8	20,3

b) Activos (1994) − Activos (1993) = −1 984. Entre 1993 y 1994 la población activa disminuyó en 1 984 000 personas.

Activos (1997) − Activos (1993) = −1 245. Entre 1993 y 1997 la población activa disminuyó en 1 245 000 personas.

c) $\text{TVM}\ [1993,\ 1997] = \dfrac{f(1997) - f(1993)}{1997 - 1993} =$

$= \dfrac{1\,245}{4} = 311{,}25$ miles de personas/año

e) El año 1994 fue el peor, pues tuvo la tasa de paro más alta. La menor tasa de paro se alcanzó en 1997; por tanto, fue el mejor año para el empleo.

f) Al restar a la tasa de paro de 1997 la de 1993 se obtiene −0,02, que es la variación pedida.

7. a) $v_m = \dfrac{e(10) - e(0)}{10 - 0} = \dfrac{5}{6}$ km/minuto $= 50$ km/h

b) $e'(t) = \dfrac{t}{6} \Rightarrow e'(10) = \dfrac{10}{6}$ km/minuto $= 100$ km/h

c) En el minuto 8 iba a $e'(8) = 4/3$ km/m $=$ $= 80$ km/h; por tanto, la multa estaba justificada.

8. Se trata de una función a trozos. Las funciones parciales son polinomios y por tanto se pueden calcular sus funciones derivadas sin necesidad de utilizar la definición (el único punto en el que habría que recurrir a la definición es el punto $x = 2$).

$$f'(x) = \begin{cases} 2 & \text{si} \quad x < 2 \\ 2x & \text{si} \quad x > 2 \end{cases}$$

Solución: $f'(0) = 2$ y $f'(3) = 6$.

14 Cálculo de tasas de variación y derivadas

1. Considera la función $f(x) = 2x^3 - 9x^2 - 60x + 5$. Halla los puntos de su gráfica en los que la recta tangente es paralela al eje OX.

2. Halla los valores de x para los que la pendiente de la curva $y = 2x^2 - 6x + 3$ se encuentra comprendida entre 2 y 6.

3. Dada la función $f(x) = \begin{cases} x^2 + 1 & \text{si } x \leq 1 \\ 2x & \text{si } x > 1 \end{cases}$, calcula si es posible $f'(1)$.

4. ¿Para qué valor de x la recta tangente a la curva $y = Lx$ pasa por el origen de coordenadas?

5. Un determinado agente químico está siendo utilizado para combatir una plaga de insectos de unos 36 000 individuos. A los t días de tratamiento la población de insectos resultante es de $p(t) = 36\,000 - 250t^2$ individuos.

a) ¿Cuántos días tarda el insecticida en acabar con la plaga?

b) Halla la tasa de variación de la población de insectos entre el cuarto y el séptimo día.

c) Halla la velocidad media de eliminación de los insectos en dicho período.

d) ¿Cuál es la velocidad media de eliminación de insectos durante el tiempo que dura la plaga?

e) ¿Cuál es la velocidad instantánea de eliminación de insectos al octavo día?

f) ¿A partir de qué día mueren más de 5 000 insectos diarios?

6. La distancia de un avión a la pista de despegue, medida en kilómetros, viene dada por la función $d(t) = \dfrac{t^3}{2\,000} + 15t$, siendo t el tiempo, en minutos, transcurrido desde que despega.

a) ¿Cuántos kilómetros recorre el avión en una hora?

b) ¿Qué velocidad lleva el avión a la media hora del despegue? Exprésala en km/h.

c) ¿Qué aceleración lleva el avión a los 5 minutos de despegar?

7. El número de bacterias, en miles, de un cierto cultivo varía en función del tiempo según la función $P(t) = 5e^{\frac{t}{30}}$, donde t viene expresado en minutos.

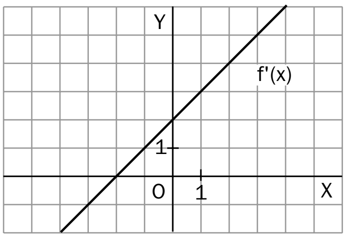
a) ¿Cuál es el número de bacterias en el instante inicial?

b) ¿Cuántas bacterias tendrá el cultivo pasada una hora?

c) ¿Cuál es la velocidad de crecimiento de la población de bacterias a los quince minutos?

8. El movimiento de un péndulo sigue la ecuación $s(t) = 20 \operatorname{sen} 5t$. Justifica que en cada instante el espacio recorrido es proporcional a la aceleración que lleva el péndulo hallando el factor de proporcionalidad. (El problema tiene sentido siempre que $\operatorname{sen} 5t \neq 0$.)

9. La gráfica adjunta corresponde a la función derivada de una función f(x). ¿Cuál es esta función si sabemos que pasa por el punto (0, 5)?



SOLUCIONES

1. Si la tangente es paralela al eje OX, debe tener la misma pendiente que este, es decir, pendiente cero.

$f'(x) = 0 \Leftrightarrow 6x^2 - 18x - 60 = 0 \Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow x^2 - 3x - 10 = 0 \Leftrightarrow x = 5, x = -2$

Solución: (5, f(5)) y (−2, f(−2)), es decir, (5, −270) y (−2, 73).

2. $2 < y' < 6 \Leftrightarrow 2 < 4x - 6 < 6 \Leftrightarrow$
$2 < 4x - 6 \quad \text{y} \quad 4x - 6 < 6 \Leftrightarrow 2 < x < 3$

3. Se trata de una función a trozos y el punto en el que hay que estudiar si existe o no la derivada es el punto de unión; por tanto, hay que recurrir a la definición de derivada.

$$f'(1) = \lim_{h \to 0} \frac{f(1 + h) - f(1)}{h}$$

Calculando los límites laterales se obtienen las derivadas laterales de la función en el punto:

$$f'(1)^- = \lim_{h \to 0^-} \frac{f(1 + h) - f(1)}{h}$$

$$f'(1)^+ = \lim_{h \to 0^+} \frac{f(1 + h) - f(1)}{h}$$

Estas derivadas laterales se pueden calcular directamente a partir de las funciones parciales de f.

Si coinciden, su valor es la derivada de la función en el punto; en otro caso no existe la derivada de la función en el punto.

$f'(1)^- = 2(1) = 2 = f'(1)^+$; por tanto, existe la derivada de f en $x = 1$ y vale 2.

4. La recta tangente a la curva en el punto (a, f(a)), con $a > 0$ por tratarse de $y = Lx$, tiene como ecuación:

$$y - La = \frac{1}{a}(x - a)$$

Pasa por (0, 0), luego $La = 1 \Rightarrow a = e$.

Solución: $x = e$.

5. a) $P(t) = 0 \Leftrightarrow 36\,000 - t^2 = 0 \Leftrightarrow t = \pm 12$

Se desprecia $t = -12$, pues t indica los días de tratamiento.

b) $P(7) - P(4) = (23\,750 - 32\,000)$ insectos $=$
$= -8\,250$ insectos.

La plaga de insectos ha disminuido en 8 250 individuos.

c) $\dfrac{P(7) - P(4)}{7 - 4} = -2\,750$ insectos/día

Se eliminan de media 2 750 insectos diarios.

d) $\dfrac{P(12) - P(0)}{12 - 0} = \dfrac{0 - 36\,000}{12} =$
$= -3\,000$ insectos/día

Se eliminan de media 3 000 insectos diarios.

e) $P'(t) = -500t \Rightarrow P'(8) = -4\,000$

El octavo día son eliminados 4 000 insectos.

f) $|P'(t)| > 5\,000 \Leftrightarrow |-500t| > 5\,000 \Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow 500t > 5\,000 \Leftrightarrow t > 10$

Solución: A partir del undécimo día de tratamiento.

6. a) $d(60) = 1\,008$ km

b) $d'(t) = \dfrac{3t^2}{2\,000} + 15$

$d'(30) = 16{,}35$ km/minuto $= 981$ km/h

c) $d''(t) = \dfrac{6t}{2\,000} \Rightarrow d''(5) = \dfrac{3}{200}$ km/minuto^2

7. a) $P(0) = 5$

En el instante inicial hay 5 000 bacterias.

b) $P(60) = 5e^2$

Transcurrida una hora hay 36 945 bacterias.

c) $P'(t) = \dfrac{t}{6} e^{\frac{1}{30}} \Rightarrow P'(15) = 0{,}27$ bacterias/minuto

8. La aceleración del péndulo es:

$s''(t) = (100 \cos 5t)' = -500 \text{ sen } 5t$

$\dfrac{s(t)}{s''(t)} = \dfrac{25 \text{ sen } 5t}{500 \text{ sen } 5t} = -\dfrac{1}{25}$, luego queda demostrado que el espacio es proporcional a la aceleración, siendo $-\dfrac{1}{25}$ el factor de proporcionalidad.

Nótese que el cociente solo tiene sentido cuando $\text{sen } 5t \neq 0$.

9. Por ser f′ (x) lineal, f(x) será de la forma:

$f(x) = ax^2 + bx + c$, y por tanto $f'(x) = 2ax + b$

Se sabe que f pasa por el punto (0, 5), y a la vista de la gráfica se tiene que f′ pasa por el punto (0, 0).

Por tanto: $f(0) = 5 = c \quad \text{y} \quad f'(0) = b = 0$

Solución: $f(x) = x^2 + 5$.

15 Monotonía y curvatura

1. Halla el área del triángulo que forman los ejes coordenados y la recta tangente a la curva $y = x^3 - 3x^2$ en su punto de inflexión.

2. Considera la función $f(x) = \dfrac{x^3}{x^2 - 1}$ y determina:

a) El dominio.
b) Los intervalos de crecimiento y decrecimiento y los máximos y mínimos.
c) Los puntos de inflexión y los intervalos de concavidad y convexidad.

3. Sebastián fabrica bloques de turrón que vende a un precio proporcional al cuadrado del peso. Un bloque de 1 kilo cuesta 12 euros.

a) Si un bloque de 1 kilo lo parte en dos trozos, uno de 300 gramos y otro de 700 gramos, ¿a cuánto vende cada trozo?
b) Demuestra que siempre que parta un bloque de 1 kilo en dos trozos, sean del peso que sean, ganará menos dinero que vendiéndolo entero.
c) Calcula cuál será la partición en dos trozos con la que obtendría el mínimo beneficio al vender un bloque de 1 kilo de turrón.

4. Un fabricante de zumos de frutas quiere comercializarlos en envases prismáticos de cartón con base cuadrada y cuya capacidad sea de 1 litro. ¿Cuáles deben ser las dimensiones del envase para que el gasto de cartón sea mínimo?

5. Los alumnos de un centro escolar quieren organizar una excursión. La agencia de viajes a la que han acudido cobra un precio de 110 euros por alumno, ofertando un descuento individual de 1 euro por cada alumno que se apunte. Halla el número de alumnos que deben ir de excursión para que, con esa oferta, los beneficios de la empresa sean máximos.

6. La relación entre los beneficios, en miles de euros, obtenidos por la venta de un determinado producto y el tiempo en años que está en el mercado viene dada por la función $B(t) = \dfrac{100t}{t^2 + 81}$.

a) Estudia los períodos en los que los beneficios crecen y en los que decrecen.
b) Indica el número de años que debe estar el producto en el mercado para que el beneficio sea máximo.
c) ¿Hay algún momento en que la venta de este producto produzca pérdidas?

SOLUCIONES

1. $f'(x) = 3x^2 - 6x$, $f'' = 6x - 6$

$f''(x) = 0 \iff x = 1$

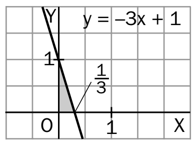
Si $x < 1 \Rightarrow f''(x) < 0$; si $x > 1 \Rightarrow f''(x) > 0$

El punto de inflexión es $(1, -2)$ y la recta tangente a la curva en él, $y + 2 = -3(x-1)$.

La recta corta los ejes en $\left(\frac{1}{3}, 0\right)$ y $(0, 1)$.

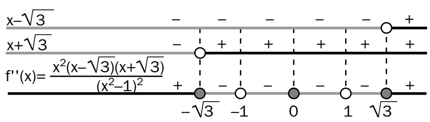
El área del triángulo es

$A = \frac{1}{6}$ unidades de medida.



2. a) $D(f) = R - \{-1, 1\}$

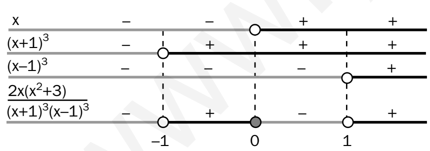
b) $f'(x) = \dfrac{x^4 - 3x^2}{(x^2 - 1)^2} = \dfrac{x^2(x - \sqrt{3})\,(x + \sqrt{3})}{(x^2 - 1)^2}$



f es creciente en $(-\infty, -\sqrt{3})$ y $(\sqrt{3}, +\infty)$; f es decreciente en $(-\sqrt{3}, -1)$, $(-1, 0)$, $(0, 1)$ y $(1, \sqrt{3})$.

$\left(-\sqrt{3}, \dfrac{-3\sqrt{3}}{2}\right)$ máximo; $\left(\sqrt{3}, \dfrac{3\sqrt{3}}{2}\right)$ mínimo.

c) $f''(x) = \dfrac{2x^3 + 6x}{(x^2 - 1)^3} = \dfrac{2x(x^2 + 3)}{(x^2 - 1)^3}$, que se anula solo para $x = 0$.



f es cóncava en $(-\infty, -1)$ y $(0, 1)$; f es convexa en $(-1, 0)$ y $(1, +\infty)$. $(0, 0)$ punto de inflexión.

3. La función que indica el precio en euros para un trozo de turrón que pese x kg es: $P(x) = 12x^2$

a) $P(0{,}3) = 1{,}08$ euros; $P(0{,}7) = 5{,}88$ euros

b) Sean los pesos de los trozos en kg, x y $(1 - x)$. Nótese que $0 < x < 1$. La función que expresa el dinero que Sebastián obtendrá por la venta de esos trozos es:

$f(x) = P(x) + P(1-x) = 12x^2 + 12(1+x^2 - 2x) = 24x^2 - 24x + 12$, que para $0 < x < 1$ es menor que 12.

c) $f'(x) = 48x - 24$; $f''(x) = -24$

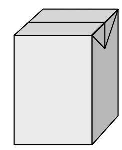
$f'(x) = 0 \iff x = 0{,}5$, que es mínimo, pues $f''(0{,}5) < 0$

Solución: Obtendrá el mínimo beneficio si divide el bloque en dos trozos de 500 gramos.

4. Sean x y h las longitudes en cm del lado de la base y de la altura, respectivamente.

El volumen es $V = x^2 h$ cm^3.

$x^2 h = 1\,000 \Rightarrow h = \dfrac{1\,000}{x^2}$



La superficie de cartón es:

$S(x) = 2x^2 + 4x \cdot \dfrac{1\,000}{x^2}$ cm^2 $= \dfrac{2x^3 + 4\,000}{x}$ cm^2

$S'(x) = \dfrac{4x^3 - 4\,000}{x^2}$; $S'(x) = 0 \iff x = 10$

$S''(x) = \dfrac{4x^3 + 8\,000}{x^3} \Rightarrow S''(10) > 0$

por tanto, para $x = 10$ se obtiene el mínimo.

El lado de la base y la altura miden 10 cm, luego el envase debe ser un cubo de 10 cm de arista.

5. Si x representa el número de alumnos que van a la excursión, el precio total a pagar es:

$P(x) = x(110 - 1x)$ euros

$P'(x) = 110 - 2x$; $P''(x) = -2$

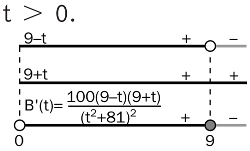
$P'(x) = 0 \iff x = 55$, que es mínimo, pues $P''(55) < 0$

Solución: Deben ir de excursión 55 alumnos.

6. Hay que tener en cuenta que $t > 0$.

a) $B'(t) = \dfrac{100(9 - t)(9 + t)}{(t^2 + 81)^2}$

$B'(t) = 0 \iff t = 9$



B crece en $(0, 9)$ y decrece en $(9, +\infty)$.

b) B alcanza el máximo para $t = 9$, pues pasa de creciente a decreciente.

c) No, ya que $B(t)$ es siempre positiva; si bien a largo plazo los beneficios serán prácticamente nulos, pues $\lim\limits_{t \to +\infty} B(t) = 0$.

16 Estudio y representación de funciones

1. Halla, cuando existan, las asíntotas horizontales, verticales y oblicuas las siguientes funciones:

a) $f(x) = \dfrac{x - 1}{x - 2}$

b) $f(x) = \dfrac{(x - 2)^2}{x - 1}$

Calcula, si existen, los puntos en los que las asíntotas cortan la gráfica de la función.

2. Considera la función $f(x) = \begin{cases} x^2 - 2 & \text{si } x < 1 \\ \dfrac{1 - 2x}{x} & \text{si } x \geqslant 1 \end{cases}$

a) ¿Cuál es su dominio?

b) ¿Es continua en $x = 1$?

c) ¿Es derivable en $x = 1$?

d) ¿Cuáles son sus intervalos de crecimiento y decrecimiento?

e) ¿Cuáles son sus extremos?

f) ¿Tiene asíntotas?

g) Dibuja su gráfica.

3. Una empresa lanza al mercado una película de vídeo. Calcula invertir en publicidad una cantidad que, en euros, viene dada por la función $f(x) = 64x + \dfrac{25}{x}$, donde x representa, en miles de unidades, el número de cintas que hay en el mercado.

a) ¿Qué número de cintas de vídeo corresponde a la mínima inversión publicitaria? ¿A cuánto asciende esta inversión?

b) ¿Cuál es la tendencia del gasto publicitario según aumenta el número de películas en el mercado?

4. Representa la función $f(x) = 3x^5 - 5x^3$.

5. Representa la función $f(x) = \dfrac{x}{x^2 - 2x + 1}$.

6. Representa la función $f(x) = \sqrt{x^2 + 1}$.

SOLUCIONES

1. a) $x - 2 = 0 \iff x = 2$

$x = 2$ es la única asíntota vertical.

$\lim\limits_{x \to \pm\infty} f(x) = 1 \Rightarrow y = 1$ es asíntota horizontal.

La función no puede tener asíntotas oblicuas, pues tiene una asíntota horizontal.

Ninguna asíntota corta la gráfica de la función.

b) $x - 1 = 0 \iff x = 1$

$x = 1$ es la única asíntota vertical.

La función no tiene asíntotas horizontales.

Como $\lim\limits_{x \to \pm\infty} \dfrac{f(x)}{x} = 1$, $\lim\limits_{x \to \pm\infty} (f(x) - x) = -3$, la recta $y = x - 3$ es una asíntota oblicua.

Ninguna asíntota corta la gráfica de la función.

2. a) $D(f) = \mathbb{R}$

b) Sí, pues $\lim\limits_{x \to 1^-} f(x) = \lim\limits_{x \to 1^+} f(x) = f(1) = -1$

c) No, pues $f'(1)^- = 2 \neq f'(1)^+ = -1$

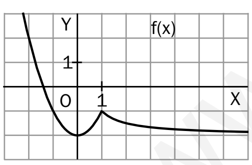
d) $f'(x) = \begin{cases} 2x & \text{si } x < 1 \\ \dfrac{-1}{x^2} & \text{si } x > 1 \end{cases}$

f es creciente en $(0, 1)$; es decreciente en $(-\infty, 0)$ y en $(1, +\infty)$.

e) El punto $(0, -2)$ es un mínimo.

f) $\lim\limits_{x \to \pm\infty} f(x) = -2 \Rightarrow y = -2$ es asíntota horizontal.

g)



3. a) $f'(x) = 64 - \dfrac{25}{x^2}$ siendo $x > 0$

$f'(x) = 0 \iff x^2 = \dfrac{25}{64} \iff x = \dfrac{5}{8}$

$f''(x) = \dfrac{50}{x^3}$; por tanto, $f''\left(\dfrac{5}{8}\right) > 0$

f tiene un mínimo en $\left(\dfrac{5}{8}, f\left(\dfrac{5}{8}\right)\right) = (0{,}6;\ 80)$; así, si la empresa lanza 600 películas al mercado, la inversión publicitaria es mínima y asciende a 80 euros.

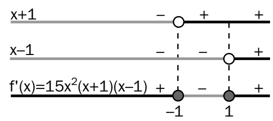
b) Como f tiene una asíntota oblicua en $y = 64x$, la empresa tiende a gastar 0,06 euros por película.

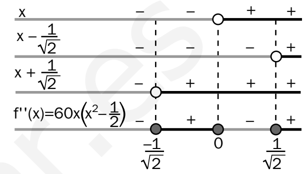
4. $D(f) = \mathbb{R}$

$f'(x) = 15x^4 - 15x^2$, $f''(x) = 60x^3 - 30x$

$f'(x) = 0 \iff x = 0,\ x = 1,\ x = -1$

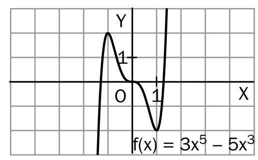
$f''(x) = 0 \iff x = 0,\ x = \dfrac{1}{\sqrt{2}},\ x = -\dfrac{1}{\sqrt{2}}$





Creciente en $(-\infty, -1)$ y $(1, +\infty)$; decreciente en el intervalo $(-1, 1)$. Máximo: $(-1, 2)$. Mínimo: $(1, 2)$.

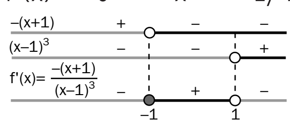
Cóncava en $\left(-\infty, -\dfrac{1}{\sqrt{2}}\right)$ y $\left(0, \dfrac{1}{\sqrt{2}}\right)$; convexa en $\left(\dfrac{-1}{\sqrt{2}}, 0\right)$ y $\left(\dfrac{1}{\sqrt{2}}, +\infty\right)$. Puntos de inflexión: $(0, 0)$, $\left(\dfrac{-1}{\sqrt{2}}, \dfrac{7}{4\sqrt{2}}\right)$, $\left(\dfrac{1}{\sqrt{2}}, \dfrac{-7}{4\sqrt{2}}\right)$

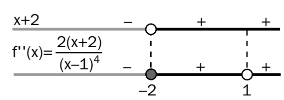


5. $D(f) = \mathbb{R} - \{1\}$; $x = 1$ asíntota vertical.

$f'(x) = \dfrac{-(x + 1)}{(x - 1)^3}$; $f''(x) = \dfrac{2(x + 2)}{(x - 1)^4}$

$f'(x) = 0 \iff x = -1$; $f''(x) = 0 \iff x = -2$



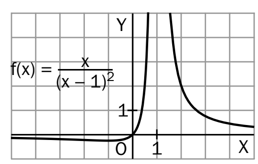


Decreciente en $(-\infty, -1)$ y $(1, +\infty)$; creciente en $(-1, 1)$. Mínimo en $\left(-1, -\dfrac{1}{4}\right)$.

Cóncava en $(-\infty, -2)$;
convexa en $(-2, 1)$ y $(1, +\infty)$.

Punto de inflexión $\left(-2, -\dfrac{2}{9}\right)$.

Asíntota horizontal: $y = 0$.

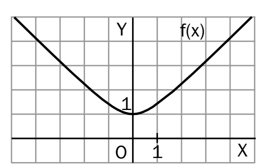


6. $D(f) = \mathbb{R}$

$f'(x) = \dfrac{x}{\sqrt{x^2 + 1}}$; $f''(x) = \dfrac{1}{(x^2 + 1)\sqrt{x^2 + 1}} > 0$

$f'(x) = 0 \iff x = 0$

Decreciente en $(-\infty, 0)$
y creciente en $(0, +\infty)$.
Mínimo en $(0, 1)$.
Siempre convexa.
$y = x$ e $y = -x$ asíntotas oblicuas.



17 Distribuciones unidimensionales y bidimensionales

1. La tabla siguiente muestra las puntuaciones que han obtenido, en matemáticas y latín, 10 estudiantes elegidos al azar. Se ha puntuado sobre 100.

Matemáticas	75	88	93	65	87	81	98	68	84	77
Latín	82	78	86	72	91	80	95	72	89	74

a) Halla las rectas de regresión.

b) Si un estudiante tiene una puntuación de 75 en latín, ¿cuál será la puntuación esperada en matemáticas?

2. A partir de los siguientes datos relativos a la edad y presión sanguínea de 12 mujeres:

Edad (años)	56	42	72	36	63	47	55	49	38	42	68	60
P. sanguínea (mm Hg)	147	125	160	118	149	128	150	145	115	140	152	155

a) Calcula el coeficiente de correlación. ¿Qué se puede decir sobre la dependencia de las variables?

b) Halla la recta de regresión de la presión sanguínea sobre la edad.

c) Estima la edad de una mujer cuya presión sanguínea es de 135 mm Hg. ¿Es fiable tal estimación?

3. Dada la siguiente tabla de una distribución bidimensional con coeficiente de correlación $\sigma = -0{,}92$:

X	2	4	5	6	8	11
Y	18	12	10	8	7	5

a) Halla el coeficiente de correlación de las variables: $Z = 2X + 6$ y $T = 3Y - 15$.

b) ¿Qué te sugiere el resultado obtenido en el apartado anterior?

4. De una variable bidimensional se conocen: $r = -0{,}5$; $S_x = 2$ y $S_y = 3$. Razona si alguna de las siguientes rectas de regresión de Y sobre X corresponde a los datos conocidos:

a) $y = -x + 2$ b) $y = 0{,}5x - 1$ c) $3x + 4y - 4 = 0$

5. De una variable bidimensional se conocen: $\overline{x} = 16{,}6$; $\overline{y} = 47{,}1$; $S_x = 3{,}81$; $S_y = 6{,}43$ y $S_{xy} = -23{,}36$.

a) Determina, antes de calcularlo, el signo del coeficiente de correlación.
b) Halla la recta de regresión de Y sobre X. Comprueba que pasa por el punto determinado por las medias.

6. Con relación a una distribución bidimensional:

a) Razona por qué las pendientes de las dos rectas de regresión tienen el mismo signo.
b) ¿Puede deducirse el grado de relación estadística entre variables a partir de las rectas de regresión?
c) ¿Qué ocurre si las dos rectas de regresión tienen la misma pendiente?

7. De una variable bidimensional se conocen las dos rectas de regresión: $y = \left(\frac{1}{2}\right)x + 2$; $x = 2y - 4$.

a) ¿Se puede determinar el centro de gravedad (x, y)?

b) Calcula S_{xy} sabiendo que $S_y = 2$.

c) Si $\overline{y} = 3$, ¿qué valor toma $\overline{x}$?

SOLUCIONES

1. a) Las variables M y L representan las puntuaciones en matemáticas y latín, respectivamente.

$$\overline{m} = \frac{\Sigma m_i f_i}{N} = \frac{816}{10} = 81{,}6 \qquad \overline{l} = \frac{\Sigma l_i f_i}{N} = 81{,}9$$

$$S_{ml} = \frac{\Sigma m_i l_i f_i}{N} - \overline{m}\,\overline{l} = 6\,746{,}9 - 6\,683{,}04 = 63{,}86$$

$$S_m^2 = \frac{\Sigma m_i^2 f_i}{N} - \overline{m}^2 = 6\,758{,}6 - 6\,658{,}56 = 100{,}04$$

$$S_l^2 = \frac{\Sigma l_i^2 f_i}{N} - \overline{l}^2 = 6\,767{,}5 - 6\,707{,}61 = 59{,}89$$

La recta de regresión de F sobre M es:

$$l - \overline{l} = \frac{S_{ml}}{S_m^2}(m - \overline{m});\ l - 81{,}9 = 0{,}64\,(m - 81{,}6)$$

La recta de regresión de M sobre F es:

$$m - \overline{m} = \frac{S_{ml}}{S_l^2}(l - \overline{l});\ m - 81{,}6 = 1{,}07\,(l - 81{,}9)$$

b) Se sustituye $l = 75$ en la recta de regresión de M sobre L. Se obtiene $m = 74{,}217$, luego la puntuación esperada en matemáticas será 74.

2. a) Sean E y P las variables que representan la edad y presión de la sangre, respectivamente.

$$\overline{e} = \frac{\Sigma e_i f_i}{N} = \frac{628}{12} = 52{,}33;\ \overline{p} = \frac{\Sigma p_i f_i}{N} = 140{,}33$$

$$S_{ep} = \frac{\Sigma e_i p_i f_i}{N} - \overline{e}\,\overline{p} = 7\,491{,}2 - 7\,343{,}47 = 147{,}73$$

$$S_e^2 = \frac{\Sigma e_i^2 f_i}{N} - \overline{e}^2 = 2\,868 - 2\,738{,}43 = 129{,}57$$

$$S_e = \sqrt{129{,}57} = 11{,}38$$

$$S_p^2 = \frac{\Sigma p_i^2 f_i}{N} - \overline{p}^2 = 19\,901{,}83 - 19\,692{,}51 =$$
$$= 209{,}32 \Rightarrow S_p = 14{,}47$$

$$r = \frac{S_{ep}}{S_e S_p} = \frac{147{,}33}{11{,}38 \cdot 14{,}47} = \frac{147{,}33}{164{,}67} = 0{,}89$$

La dependencia será positiva y muy fuerte.

b) $p - \overline{p} = \frac{S_{ep}}{S_e^2}(e - \overline{e});\ p - 140{,}33 = 1{,}14\,(e - 52{,}33)$

c) Se sustituye $p = 135$ en la recta de regresión de P sobre E, y se obtiene $e = 48{,}55$. La mujer tendrá 49 años. La estimación es muy fiable por ser el coeficiente de correlación muy próximo a 1.

3. a) $\overline{z} = \frac{108}{6} = 18;\ \overline{t} = \frac{90}{6} = 15;$

$$S_z = \sqrt{\frac{2\,144}{6} - 18^2} = 5{,}77$$

$$S_t = \sqrt{\frac{2\,304}{6} - 15^2} = 12{,}61$$

$$S_{zt} = \frac{1\,218}{6} - 18 \cdot 15 = -67$$

$$r = \frac{S_{zt}}{S_z S_t} = -\frac{67}{5{,}77 \cdot 12{,}61} = -\frac{67}{72{,}76} = -0{,}92$$

b) El coeficiente de correlación lineal no varía si las variables se someten a transformaciones lineales.

4. Como $r < 0$, la covarianza, $S_{xy} < 0$, y por tanto la pendiente de la recta de regresión, es negativa.

Se puede descartar la recta $y = 0{,}5x - 1$.

$$r = \frac{S_{xy}}{S_x \cdot S_y} \Rightarrow S_{xy} = r \cdot S_x \cdot S_y = -0{,}5 \cdot 2 \cdot 3 = -3$$

La pendiente es: $\frac{S_{xy}}{S_x^2} = -\frac{3}{4}$

Queda descartada $y = -x + 2$. Se comprueba que $3x + 4y - 4 = 0$ tiene pendiente $-\frac{3}{4}$:

$$3x + 4y - 4 = 0 \Rightarrow y = \frac{4 - 3x}{4} = -\frac{3}{4}x + 1$$

La recta de regresión de Y sobre X es:

$3x + 4y - 4 = 0$

5. a) El signo de r es negativo, pues la covarianza es negativa.

b) $y - \overline{y} = \frac{S_{xy}}{S_x^2}(x - \overline{x});\ y - 47{,}1 = -1{,}61(x - 16{,}6)$

Para $x = \overline{x} = 16{,}6$ $y = 47{,}1 = \overline{y}$

6. a) Porque este coincide con el de la covarianza.

b) No, el grado de relación estadística lo indica el coeficiente de correlación.

c) Ambas rectas coinciden puesto que tienen la misma pendiente y el punto $(\overline{x}, \overline{y})$ en común.

7. a) Bastaría hallar el punto de corte de las rectas de regresión, pero en este caso no puede determinarse pues las dos rectas coinciden.

b) $S_y = 2$, y la pendiente de la recta de regresión de X sobre Y (coeficiente de regresión) es 2.

$$2 = \frac{S_{xy}}{S_y^2} \Rightarrow S_{xy} = 2 \cdot 2^2 = 8$$

c) Como las dos rectas de regresión pasan por el punto $(\overline{x}, \overline{y})$, para calcular $\overline{x}$ se sustituye en cualquiera de las dos rectas el valor $y = \overline{y} = 3$.

Se obtiene $\overline{x} = 2$.

18 Distribuciones discretas. Distribución binomial

1. Una variable aleatoria X representa el número de hembras en una camada de cuatro crías.

a) Determina la función de probabilidad de la variable X y represéntala gráficamente.

b) Calcula sus parámetros.

2. De una urna que contiene 4 bolas rojas y 6 blancas se extraen 3 sin reemplazamiento. Se considera la variable aleatoria X que representa el número de bolas rojas extraídas. Construye la distribución de probabilidad de X y calcula sus parámetros.

3. ¿Cuánto dinero sería justo apostar para participar en un juego en el que uno puede ganar 15 euros con probabilidad 0,2, ganar 6 euros con probabilidad 0,4 o perder el dinero apostado?

4. En una determinada facultad, la probabilidad de que un estudiante se gradúe es 0,4. Determina la probabilidad de que de 5 estudiantes elegidos al azar:

a) Ninguno se gradúe.

b) Al menos uno se gradúe.

5. Un vendedor de seguros vende pólizas a 5 personas del mismo sexo y edad y con buena salud. La probabilidad de que una de esas personas viva treinta años más es $\frac{2}{3}$. Halla la probabilidad de que pasados treinta años:

a) Hayan fallecido a lo sumo dos de ellas.

b) Solamente vivan dos.

6. Una máquina produce un tornillo defectuoso con probabilidad 0,05. Calcula la media de tornillos defectuosos que habrá en un lote de 500.

7. Un examen tipo test consta de 10 preguntas con 3 respuestas cada una, de las que solamente una es correcta. Una persona que desconoce la materia objeto del examen se presenta. Calcula la probabilidad de que:

a) Acierte exactamente cuatro preguntas.

b) Falle todas.

c) Acierte todas.

8. Estudios de medio ambiente han determinado que en el 65 % de los hogares de una comunidad se separan los residuos orgánicos del resto. Se eligen 10 hogares de forma aleatoria. Calcula la probabilidad de que al menos en la mitad de ellos se separen los residuos.

9. Se ha hecho un seguimiento a 100 personas elegidas al azar para saber el número de veces que operan en un cajero automático durante una semana, y se han obtenido estos resultados:

N.º de personas	2	30	41	20	7
N.º de veces	0	1	2	3	4

a) Ajusta, si es posible, una distribución binomial a estos datos.

b) Calcula la probabilidad teórica de que una persona opere dos o más veces en un cajero.

c) Compara el resultado del apartado anterior con el que se obtiene experimentalmente.

SOLUCIONES

1. a) Es equiprobable que una cría sea macho o hembra. La variable X sigue una distribución $B\left(4, \frac{1}{2}\right)$ con función de probabilidad:

$p(X = 0) = 0{,}0625$; $p(X = 1) = 0{,}2500$;
$p(X = 2) = 0{,}3750$; $p(X = 3) = 0{,}2500$;
$p(X = 4) = 0{,}0625$

b) $\mu = n \cdot p = 4 \cdot \frac{1}{2} = 2$; $\sigma^2 = n \cdot p \cdot q = 1$; $\sigma = 1$

2. Distribución de probabilidad:

$p(X = 0) = \frac{6}{10} \cdot \frac{5}{9} \cdot \frac{4}{8} = \frac{1}{6}$;

$p(X = 1) = 3 \cdot \frac{4}{10} \cdot \frac{6}{9} \cdot \frac{5}{8} = \frac{1}{2}$

$p(X = 2) = 3 \cdot \frac{4}{10} \cdot \frac{3}{9} \cdot \frac{6}{8} = \frac{3}{10}$;

$p(X = 3) = \frac{4}{10} \cdot \frac{3}{9} \cdot \frac{2}{8} = \frac{1}{30}$

$\mu = \sum x_i p_i = 1{,}2$

$\sigma^2 = \sum x_i p_i - \mu^2 = 2 - 1{,}44 = 0{,}56$

$\sigma = \sqrt{0{,}56} = 0{,}75$

3. Se considera justo pagar lo que se espera ganar a la larga; lo justo sería pagar μ euros.
$\mu = 15 \cdot 0{,}2 + 6 \cdot 0{,}4 + 0 \cdot 0{,}4 = 5{,}40$

4. Si X indica el número de estudiantes que se gradúan, X sigue una distribución B(5; 0,4).

a) $p(X = 0) = \binom{5}{0} \cdot 0{,}4^0 \cdot 0{,}6^5 = 0{,}0778$

b) $p(X \geqslant 1) = 1 - p(X < 1) = 1 - p(X = 0) =$
$= 1 - 0{,}0778 = 0{,}9222$

5. La variable aleatoria X que indica el número de personas del grupo que viven después de treinta años sigue una distribución $B\left(5, \frac{2}{3}\right)$.

a) $p(X \geqslant 3) = p(X = 3) + p(X = 4) + p(X = 5) =$
$= 0{,}3292 + 0{,}3292 + 0{,}1317 = 0{,}7901$

b) $p(X = 2) = \binom{5}{2} \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^2 \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^3 = 0{,}1646$

6. La distribución de la variable aleatoria que indica el número de tornillos defectuosos es B(n; 0,05), donde n = 500, y por tanto: $\mu = 500 \cdot 0{,}05 = 25$.

7. La variable aleatoria discreta X que indica el número de respuestas acertadas es $B\left(10, \frac{1}{3}\right)$.

a) $p(X = 4) = \binom{10}{4} \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^4 \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^6 = 0{,}2276$

b) $p(X = 0) = \binom{10}{0} \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^0 \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^{10} = 0{,}0173$

c) $p(X = 10) = \binom{10}{10} \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^{10} \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^0 = 0$

8. La variable X que indica el número de hogares en los que se separan los residuos es B(10; 0,65).

$p(X \geqslant 5) = \sum_{i=5}^{10} \binom{10}{i} \cdot (0{,}65)^i \cdot (0{,}35)^{10-i}$

En las tablas de la binomial no se encuentran los valores relativos a esta distribución; por tanto:

— Se considera la variable Y que indica el número de hogares en los que no separan los residuos. Y sigue una distribución B (10; 0,35).

— Se relacionan X e Y: $P(X \geqslant 5) = P(Y \leqslant 4) =$
$= \sum_{j=0}^{4} \binom{10}{j} \cdot 0{,}35^j \cdot 0{,}65^{10-j} = 0{,}7516$

9. a) Es posible el ajuste, pues:

— Para cada persona solo son posibles dos resultados: visita el cajero (éxito) o no lo visita.
— El resultado obtenido para una persona un día es independiente del obtenido otro día.
— La probabilidad de visitar o no el cajero es constante y no varía de una persona a otra.

La binomial que mejor se ajusta a los datos es la que tiene por media μ la media observada $\overline{x} = 2$.

Como $\mu = n \cdot p$, se tiene que $p = \frac{2}{4} = 0{,}5$ y, por tanto, la binomial es B(4; 0,5).

b) La variable X que expresa el número de veces que una persona visita el cajero se distribuye según una B(4; 0,5).
$p(X \geqslant 2) = p(X = 2) + p(X = 3) + p(X = 4) =$
$= 0{,}3750 + 0{,}2500 + 0{,}0625 = 0{,}6875$

c) Experimentalmente, la frecuencia relativa para $X \geqslant 2$ es: $\frac{41}{100} + \frac{20}{100} + \frac{7}{100} = 0{,}68$

Los valores obtenidos experimental y teóricamente son muy parecidos.

19 Distribuciones continuas. Distribución normal

1. Se considera la función: $f(x) = \begin{cases} \dfrac{3-x}{16} & \text{si } -3 \leqslant x < 1 \\ 0 & \text{si } x \notin [-3, 1) \end{cases}$

a) Represéntala gráficamente y comprueba que es la función de densidad de una variable aleatoria continua X.

b) Calcula $p(0 \leqslant X \leqslant 1)$ a partir del gráfico.

2. Una cierta compañía produce jarras cuyas capacidades, en litros, se distribuyen normalmente con media $\mu = 2$ litros, y desviación típica $\sigma = 0,05$ litros. Halla la probabilidad de que la capacidad de una jarra elegida al azar esté comprendida entre 1,96 y 2,04 litros.

3. Los errores de medida, en gramos, de una cierta balanza se distribuyen según una N(0; 0,1). Se selecciona aleatoriamente un objeto. Halla la probabilidad de que el peso medido del objeto difiera de su peso verdadero en más de 0,12 gramos.

4. Una variable aleatoria continua X sigue una distribución N(140, 25). Calcula:

a) $p(X \leqslant 150)$

b) $p(100 \leqslant X \leqslant 130)$

5. Halla el valor de t para que $p(X \geqslant t) = 0,58$, sabiendo que la variable aleatoria X se distribuye según una N(12, 5).

6. Si una serie de medidas se distribuye normalmente, halla qué porcentaje de medidas diferirán de la media en más de la mitad de la desviación típica.

7. Calcula la probabilidad de que, en un examen con respuestas del tipo verdadero-falso, un estudiante elegido al azar conteste correctamente 12 o más preguntas de un total de 20.

8. La tabla siguiente muestra la carga máxima, en toneladas, que soporta una serie de vigas:

Carga máxima	[9,3; 9,7)	[9,7; 10,1)	[10,1; 10,5)	[10,5; 10,9)	[10,9; 11,3)	[11,3; 11,7)	[11,7; 12,1)	[12,1; 12,5)
N.º de vigas	2	5	12	17	14	6	3	1

a) Representa el histograma y el polígono de frecuencias.

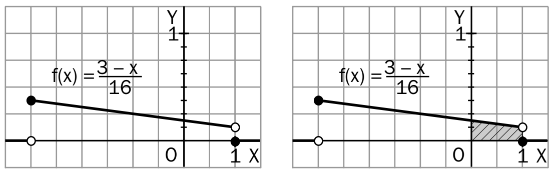
b) Calcula la media y la desviación típica de la variable estadística carga máxima.

c) A la vista del gráfico del apartado a, ¿te parece apropiado un ajuste mediante una distribución normal?

d) Halla la distribución normal que mejor ajusta la distribución empírica dada por la tabla anterior.

e) Calcula la probabilidad de que una viga, elegida al azar, soporte una carga máxima inferior a 11 toneladas.

SOLUCIONES

1. a) 

Se trata de una función de densidad, pues:

$f(x) \geqslant 0$ y el área encerrada bajo la gráfica es igual a la unidad.

b) $p(0 \leqslant X \leqslant 1)$ = Área de un trapecio de bases $\frac{1}{8}$ y $\frac{3}{16}$, y altura $1 = 0{,}1563$ u.m.

2. En este ejercicio y los siguientes en que sea necesario se utilizará la igualdad:
$p(-a < Z < a) = 2[p(Z < a) - 0{,}5] =$
$= 2p(Z < a) - 1$, siendo $a > 0$
Demostración: $p(-a < Z < a) = 1 - 2p(Z > a) =$
$= 1 - 2[1 - p(Z < a)] = -1 + 2p(Z < a)$

$$p(1{,}96 \leqslant X < 2{,}04) = p\left(\frac{1{,}96 - 2}{0{,}05} \leqslant Z < \frac{2{,}04 - 2}{0{,}05}\right) =$$
$$= p(-0{,}8 \leqslant Z < 0{,}8) = 0{,}5762$$

3. Sea X la variable que indica la diferencia entre el peso medido y el verdadero. La probabilidad pedida:
$p(|X| > 0{,}12) = p(X < -0{,}12) + p(X > 0{,}12) =$
$= 2p(X > 0{,}12) = 2[1 - p(X \leqslant 0{,}12)] =$
$= 2[1 - p(Z \leqslant 1{,}2)] = 2(1 - 0{,}8849) = 0{,}2302$

4. a) $p\left(Z \leqslant \frac{150 - 140}{25}\right) = p(Z \leqslant 0{,}4) = 0{,}6554$

b) $p(100 \leqslant X \leqslant 130) =$
$$= p\left(\frac{100 - 140}{25} \leqslant Z \leqslant \frac{130 - 140}{25}\right) =$$
$= p(Z \leqslant -0{,}4) - p(Z \leqslant -1{,}6) =$
$= 1 - p(Z \leqslant 0{,}4) - [1 - p(Z \leqslant 1{,}6)] =$
$= p(Z \leqslant 1{,}6) - p(Z \leqslant 0{,}4) = 0{,}2898$

5. $p(X \geqslant t) = p\left(Z \geqslant \frac{t - 12}{5}\right) = 0{,}58$

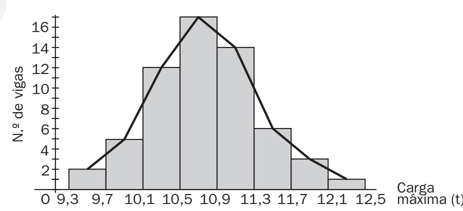
Como $0{,}58 > 0{,}5$, $\frac{t - 12}{5}$ debe ser negativo.

$$p\left(Z \geqslant \frac{t - 12}{5}\right) = p\left(Z \leqslant -\frac{t - 12}{5}\right) =$$
$$= p\left(Z \leqslant \frac{12 - t}{5}\right) = 0{,}58 \Rightarrow \frac{12 - t}{5} = 0{,}2 \Rightarrow t = 11$$

6. La diferencia se mide en valor absoluto; por tanto:
$$p\left(|Z - \mu| > \frac{\sigma}{2}\right) = p\left(|Z - 0| > \frac{1}{2}\right) =$$
$$= 1 - p\left(|Z| \leqslant \frac{1}{2}\right) = 1 - p\left(-\frac{1}{2} \leqslant Z < \frac{1}{2}\right) =$$
$$= 1 - 2\left[p\left(Z < \frac{1}{2}\right) - 0{,}5\right] = 0{,}6170$$
El porcentaje es del 61,7.

7. La variable aleatoria X que indica el número de respuestas contestadas correctamente de un total de 20 sigue una distribución B(20; 0,5).
Como $n \cdot p = 10 \geqslant 5$ y $n \cdot q = 10 \geqslant 5$, la variable X se aproxima por la variable continua X′, que se distribuye según una $N(n \cdot p, \sqrt{n \cdot p \cdot q}) =$
$= N(10, \sqrt{5})$.

$p(X \geqslant 12) = p(X' \geqslant 11{,}5) =$
$$= p\left(Z \geqslant \frac{11{,}5 - 10}{\sqrt{5}}\right) = p(Z \geqslant 0{,}67) = 0{,}2514$$

8. a) 

b) Sea x_i la marca de clase del intervalo i-ésimo.

Media: $\bar{x} = \frac{\sum x_i f_i}{N} = \frac{646{,}4}{60} = 10{,}77$

Varianza: $S^2 = \frac{\sum x_i f_i}{N} - \bar{x}^2 =$

$= \frac{6\,984{,}52}{60} - 10{,}77^2 = 0{,}42$

Desviación típica: $S = \sqrt{0{,}42} = 0{,}65$

c) Sí, ya que el polígono de frecuencias relativas se parece mucho a la campana de Gauss.

d) N(10,77; 0,65)

e) $p(X < 11) = p\left[Z < \frac{11 - 10{,}77}{0{,}65}\right] =$
$= p(Z < 0{,}35) = 0{,}6368$