- EJERCICIO 40

*Supón que en cierta población pediátrica, la presión sistólica de la sangre en reposo se distribuye normalmente con media de 115 mm HG y desviación típica de 15.*

*(a) Halla la probabilidad de que un niño elegido al azar en esta población tenga presión sistólica superior a 145 mm Hg.*

*(b) ¿Por debajo de qué valor de presión sistólica estará el 75% de los niños?*

*Sea X la variable que expresa en mm Hg la presión sistólica de la sangre en reposo. Se trata de una distribución* $N(115; 15)$.

(a) $P(X > 145) = P\left(Z > \frac{145-115}{15}\right) = P(Z > 2) = 1 - P(Z \leq 2) = 1 - 0'9772 = 0'0228$

(b) Hemos de calcular el valor de la abscisa, tal que:

$P(X \leq x) = 0'75 \Rightarrow P\left(Z \leq \frac{x-115}{15}\right) = 0'75$

En la tabla encontramos $P(Z \leq 0'67) = 0'7486$ y $P(Z \leq 0'68) = 0'7517$. Tomamos 0'67, ya quele corresponde la probabilidad que más se aproxima. $\frac{x-115}{15} = 0'67 \Rightarrow x = 125'05$. Por tanto, el 75% de los niños tendrá una presión sistólica inferior a 125 mm Hg.

- EJERCICIO 41

*Se sabe que los resulados de un examen de Filosofía se distribuyen según una distribución normal con una media de 7 y una varianza de 4. Se pide:*

*(a) La probabilidad de que un estudiante que se presenta al examen obtenga una calificación superior a 8.*

*(b) La calificación mínima para aprobar si se desea que solamente superen la prueba el 33% de los estudiantes.*

Sea X la variable que indica los resultados del examen, se trata de una $N(7; 2)$.

(a) $P(X > 8) = P\left(Z > \frac{8-7}{2}\right) = P(Z > 0'5) = 1 - P(Z \leq 0'5) = 1 - 0'6915 = 0'3085$

(b) Si $x_0$ es la puntuación mínima buscada, se desea que:

$0'33 = P(X > x_0) = 1 - P(X \leq x_0) \Rightarrow 0'67 = P(X \leq x_0) = P\left(Z \leq \frac{x_0-7}{2}\right)$

En la tabla encontramos $P(Z \leq 0'44) = 0'67 \Rightarrow \frac{x_0-7}{2} = 0'44 \Rightarrow x_0 = 7'88$. La calificación mínima para que apruebe el 33% de los alumnos es, por tanto, 7'88.

- EJERCICIO 42

*Una empresa fabrica 10.000 sacos de plástico diarios. El peso de cada saco sigue una distribución normal de media 200 gramos y desviación típica 5 gramos. Determina en la producción diaria:*

*(a) El número de sacos que pesan más de 215 gramos.*

*(b) El número de sacos que pesan entre 190 y 200 gramos.*

*(c) El intervalo de pesos que contienen los 2.981 sacos más ligeros.*

*Sea X la variable que indica el peso de los sacos. Se trata de una distribución normal* $N(200; 5)$.

(a) $P(X > 215) = P\left(Z > \frac{215-200}{5}\right) = P(Z > 3) = 1 - P(Z \leq 3) = 1 - 0'9987 = 0'0013$

(b) $P(190 < X < 200) = P\left(\frac{190-200}{5} < Z < 0\right) = P(-2 < Z < 0) = P(Z < 0) - P(Z \leq -2) =$

$= P(Z < 0) - [1 - P(Z \leq 2)] = 0'5 - 1 + 0'9772 = 0'4772$

Para 10.000 sacos: $10.000 \cdot 0'4772 = 4772$ sacos pesan entre 190 y 200 g.

(c) Hay que calcular el peso $x_0$ tal que $P(0 < X < x_0) = 0'2981$.

$0'2981 = P(0 < X < x_0) = P\left(\frac{0-200}{5} < Z < \frac{x_0-200}{5}\right) = P\left(-40 < Z < \frac{x_0-200}{5}\right)$

$P\left(Z < \frac{x_0-200}{5}\right) - P(Z < -40) = 0'2981$. Como $P(Z < -40) = 0 \Rightarrow P\left(Z < \frac{x_0-200}{5}\right) = 0'2981$. Buscamos en las tablas $P(Z \leq -A) = 0'7019$. Encontramos $P(Z \leq 0'53) = 0'7019$.

$\frac{x_0-200}{5} = -0'53$; $x_0 = -5 \cdot 0'53 + 200 = 197'35$. Por tanto, el intervalo pedido es $(0; 197'35)$ g.

- EJERCICIO 43

*Se ha aplicado un test de fluidez verbal a 500 alumnos de primero de ESO de un centro de secundaria. Se supone que las puntuaciones obtenidas se distribuyen según una normal de media 80 y desviación típica 12.*

*(a) ¿Qué puntuación separa al 25% de los alumnos con menos fluidez verbal?*

*(b) ¿A partir de qué puntuación se encuentra el 25% de los alumnos con mayor fluidez verbal?*

Sea X la variable que indica las puntuaciones obtenidas. Se trata de una distribución $N(80;12)$.

(a) Sea $x_1$ el valor de la variable que separa el 25% de los alumnos con menor fluidez verbal.

$0'25 = P(X \leq x_1) = P\left(Z \leq \frac{x_1-80}{12}\right)$. Buscamos en las tablas $P(Z \leq -A) = 0'75$. Encontramos $P(Z \leq 0'67) = 0'7486$ y $P(Z \leq 0'68) = 0'7517$. Tomamos 0'67, ya que es el valor cuya probabilidad más se aproxima.

$\frac{x_1-80}{12} = -0'67 \Rightarrow x_1 = -0'67 \cdot 12 + 80 = 71'96$. Por tanto, el 25% de los alumnos con menor fluidez verbal obtiene puntuaciones en el test inferiores a 71'96.

(b) Sea $x_2$ el valor de la variable que separa el 25% de los alumnos con mayor fluidez verbal.

$0'25 = P(X > x_2) = 1 - P(X \geq x_2) \Rightarrow 0'75 = P(X \leq x_2) = P\left(Z \leq \frac{x_2-80}{12}\right)$. Encontramos $P(Z \leq 0'67) = 0'7486$ y $P(Z \leq 0'68) = 0'7517$. tomamos 0'67, ya que el el valor cuya probabilidad más se aproxima.

$\frac{x_2-80}{12} = 0'67 \Rightarrow x_2 = 0'67 \cdot 12 + 80 = 88'04$. Por tanto, el 25% de los alumnos con mayor fluidez en el test obtendrán puntuaciones superiores a 88'04.

- EJERCICIO 44

*Varios test de inteligencia dieron una puntuación que sigue una ley normal con media 100 y desviación típica 15. Determina el porcentaje de población que obtendría un coeficiente entre 95 y 110. ¿Qué intervalo centrado en 100 contiene el 50% de la población? En una población de 2.500 individuos, ¿cuántos de ellos se espera que tengan un coeficiente superior a 125?*

Sea X la variable aleatoria que expresa el valor del coeficiente de inteligencia. Se trata de una distribución $N(100;15)$.

$P(95 \leq X \leq 110) = P\left(\frac{95-100}{15} \leq Z \leq \frac{110-100}{15}\right) = P(-0'33 \leq Z \leq 0'67) = P(Z \leq 0'67) - P(Z \leq -0'33) =$

$= 0'7486 - [1 - P(Z \leq 0'33)] = 0'7486 - 1 + 0'6293 = 0'3779$. Luego el 38% de la población tiene coeficientes de inteligencia entre 95 y 110.

$P(-z \leq Z \leq z) = 0'5 \Rightarrow P(0 \leq Z \leq z) = 0'25$

$0'25 = P(Z \leq z) - P(Z \leq 0) = P(Z \leq z) - 0'5 \Rightarrow P(Z \leq z) = 0'75$

Encontramos $P(Z \leq 0'67) = 0'7486$ y $P(Z \leq 0'68) = 0'7517$. Tomamos 0'67, ya que es el valor cuya probabilidad más se aproxima.

$\frac{x-100}{15} = 0'678;\ x = 0'67 \cdot 15 + 100 = 110'05$

Por tanto, el intervalo pedido es $(89'95; 110'05)$.

$P(X > 125) = P\left(Z > \frac{125-100}{15}\right) = P(Z > 1'67) = 1 - P(Z \leq 1'67) = 1 - 0'9525 = 0'0475$. En una población de 2.500 individuos se espera que haya aproximadamente $2.500 \cdot 0'0475 = 119$.

- EJERCICIO 45

*El peso de los adultos de una población numerosa se distribuye normalmente con media 65 kg y desviación típica 3 kg. Se eligen dos individuos al azar. Calculando las correspondientes probabilidades, justifica qué es más probable:*

*(a) Que cada uno de los individuos tenga un peso comprendido entre 63'5 y 66'5 kg.*

*(b) Que uno de ellos tenga un peso comprendido entre 62 y 68 kg y el otro tenga un peso no comprendido entre 62 y 68 kg.*

*Sea X la variable aleatoria que expresa el peso, en kg, de un adulto. Se trata de una distribución* $N(65;3)$.

(a) $P(2 \text{ individuos pesen entre } 63'5 \text{ y } 66'5) = P(63'5 \leq X \leq 66'5) \cdot P(63'5 \leq X \leq 66'5) =$

$= [P(63'5 \leq X \leq 66'5)]^2 = \left[P\left(\frac{63'5-65}{3}\right) \leq Z \leq \frac{66'5-65}{3}\right]^2 = [P(-0'5 \leq Z \leq 0'5]^2 =$

$= [P(Z \leq 0'5) - P(Z \leq -0'5)]^2 = [2 \cdot P(Z \leq 0'5) - 1]^2 = (2 \cdot 0'6915 - 1)^2 = 0'1467$

(b) $P(62 \leq X \leq 68) = P\left(\frac{62-65}{3} \leq Z \leq \frac{68-65}{3}\right) = P(-1 \leq Z \leq 1) = P(Z \leq 1) - P(Z \leq -1) =$

$= 2 \cdot P(Z \leq 1) - 1 = 2 \cdot 0'84213 - 0'1 = 0'6826$

$P(\text{uno pese entre 62 y 68, y el otro no}) = 2 \cdot P(62 \leq X \leq 68) \cdot [1 - P(62 \leq X \leq 68)] =$

$= 2 \cdot 0'6826 \cdot 0'3174 = 0'4333$

Multiplicamos por 2, ya que existen dos formas de que uno tenga su peso en el intervalo descrito y el otro no, y al revés. Luego es más probable el segundo caso que el primero.

- EJERCICIO 46

*En la ciudad A, la edad de sus 400.000 habitantes sigue una distribución normal con media de 41 años y desviación típica de 12 años. En la ciudad B, con el doble de habitantes, la edad se distribuye normalmente con media de 47 años y desviación típica de 8 años.*

*(a) ¿En cuál de las dos ciudades es mayor la proporción de habitantes mayores de 65 años?*

*(b) ¿Cuál de las dos ciudades tiene mayor número de habitantes con edad superior a 65 años?*

Ciudad A: $N(41\, años; 12\, años) \Rightarrow n = 400.000$ habitantes

Ciudad B: $N(47\, años; 8\, años) \Rightarrow n = 800.000$ habitantes

(a) Ciudad A:

$P(X > 65) = P\left(Z \geq \frac{65-41}{12}\right) = P(Z \geq 2) = 1 - P(Z \leq 2) = 1 - 0'9772 = 0'0228.$ El 2'28% de los habitantes de la ciudad A son mayores de 65 años.

Ciudad B:

$P(X > 65) = P\left(Z \geq \frac{65-47}{8}\right) = P(Z \geq 2'25) = 1 - P(Z \leq 2'25) = 1 - 0'9878 = 0'0122.$ El 1'22% de los habitantes de la ciudad B son mayores de 65 años.

Así, la ciudad A, en proporción, tiene más habitantes mayores de 65 años que la ciudad B.

(b) Ciudad A: $400.000 \cdot 0'0228 = 9.120$ habitantes mayores de 65 años.

Ciudad B: $800.000 \cdot 0'0122 = 9.760$ habitantes mayores de 65 años.

La ciudad B tiene más habitantes mayores de 65 años.

- EJERCICIO 47

*En una población de 25.000 individuos adultos, su perímetro torácico se distribuye normalmente con media de 90 cm y desviación típica de 4 cm.*

*(a) ¿Cuántos individuos tienen un perímetro torácico interior a 86'4 cm?*

*(b) ¿Cuántos individuos tienen un perímetro torácico entre 86'4 y 93'6 cm?*

*(c) ¿Qué perímetro torácico ha de tener un individuo de esa población para que el 23% lo tenga inferior a él?*

Sea X la variable aleatoria que expresa la medida en cm del perímetro torácico. Se trata de una distribución $N(90; 4)$.

(a) $P(X < 86'4) = P\left(Z < \frac{86'4-90}{4}\right) = P(Z < -0'9) = 1 - P(Z \leq 0'9) = 1 - 0'8159 = 0'1841.$ En 25.000 individuos habrá $25.000 \cdot 0'1841 = 4.602'5 \simeq 4.603$ con perímetro torácico inferior a 86'4 cm.

(b) $P(86'4 < X < 93'6) = P\left(\frac{86'4-90}{4} < Z < \frac{93'6-90}{4}\right) = P(-0'9 < Z < 0'9) = P(Z < 0'9) - P(Z < -0'9) =$

$= 0'8159 - 0'1841 = 0'6318.$ En 25.000 individuos habrá $25.000 \cdot 0'6318 = 15.795$ con perímetro torácico entre 86'4 cm y 93'4 cm.

(c) Hay que buscar el valor x tal que:

$0'23 = P(X < x).$ Buscamos en las tablas $P(Z \leq -A) = 0'77.$ Encontramos $P(Z \leq 0'73) = 0'7673$ y $P(Z \leq 0'74) = 0'7704.$ Tomamos 0'74.

$\frac{x-90}{4} = -0'74 \Rightarrow x = -4 \cdot 0'74 + 90 = 87'04$ cm

- EJERCICIO 48

*El tiempo empleado por los estudiantes con relación a cierta prueba se distribuye normalmente con media de 30 minutos y desviación típica de 5.*

*(a) ¿Cuál es la probabilidad de que un estudiante, elegido al azar, tarde menos de 28 minutos en finalizar la prueba?*

*(b) Calcula la proporción de estudiantes que emplean entre 25 y 35 minutos.*

*(c) ¿Qué tiempo emplea como máximo el 80% de los estudiantes?*

Sea X la variable que indica el tiempo, en minutos, en realizar la prueba. Se trata de una normal $N(30;5)$.

(a) $P(X<28)=P\left(Z<\frac{28-30}{5}\right)=P(Z<0'4)=0'6554$

(b) $P(25<X35)=P\left(\frac{25-30}{5}<Z<\frac{35-30}{5}\right)=P(-1\leq Z\leq 1)=P(Z\leq 1)-P(Z\leq -1)=$

$=2\cdot P(Z\leq 1)-1=2\cdot 0'84213-0'1=0'6826$. El 68'26% de los estudiantes emplea entre 25 y 35 minutos.

(c) $0'8=P(X<x)=P\left(Z<\frac{x-30}{5}\right)$. En las tablas encontramos $P(Z\leq 0'84)=0'7995$ y $P(Z\leq 0'85)=0'8023$. Tomamos $0'84\Rightarrow \frac{x-30}{5}=0'84\Rightarrow x=0'84\cdot 5+30=34'2$.

El 80% de los alumnos emplea aproximadamente 34 minutos.

- EJERCICIO 49

*Una normativa europea no permite que en los envases de yogur haya menos de 120 gramos. La máquina dosificadora de una empresa láctea hace los envases de yogur según una ley normal de desviación estándar de 2 gramos y media de 122 gramos.*

*(a) ¿Qué tanto por ciento de los envases de yogur de esta empresa cumplirá la normativa?*

*(b) ¿Cuál deberá ser la media $\mu$ de la ley normal con la cual la máquina dosificadora hace los envases para que el 98% de la producción de yogures de esta empresa cumpla la normativa?*

(a) Sea X la variable aleatoria que expresa el peso de los yogures. Se trata de una distribución $N(122;2)$.

$P(X\geq 120)=P\left(Z\geq \frac{120-122}{2}\right)=P(Z\geq -1)=P(Z\leq 1)=0'8413$. El 84'13% de los envases de yogur de esta empresa cumple la normativa.

(b) Sea $\mu$ la media buscada, $\frac{x-\mu}{2}=\frac{120-\mu}{2}$; $P\left(Z\geq \frac{120-\mu}{2}\right)=0'98$. Buscamos en la tabla y encontramos $P(Z\leq 2'05)=0'9798$ y $P(Z\leq 2'05)=0'9803$.

$\frac{120-\mu}{2}=-2'05\Rightarrow \mu=120+2'05\cdot 2=124'1$ gramos.

- EJERCICIO 50

*El diámetro medio de las piezas producidas en una fábrica es de 45 mm.*

*(a) Determina su desviación típica sabiendo que la probabilidad de que una pieza tenga su diámetro mayor de 50 mm es igual a 0'0062.*

*(b) Si se analizaron 820 piezas, ¿cuántas tendrán el diámetro comprendido entre 39'7 y 43'5 mm?*

Sea X la variable que indica el diámetro de las piezas fabricadas. Es una distribución normal de media 45 y desviación típica desconocida $\sigma$.

(a) Sabemos que $P(X>50)=0'0062\Rightarrow P(X\leq 50)=0'9938$

$P\left(Z\leq \frac{50-45}{\sigma}\right)=0'9938$; buscando en las tablas resulta $\frac{50-45}{\sigma}=2'5\Rightarrow \sigma=2$.

(b) $P(39'7\leq X\leq 43'5)=P\left(\frac{39'7-45}{2}\leq Z\leq \frac{43'5-45}{2}\right)=P(-2'65\leq Z\leq -0'75)=P(0'75\leq Z\leq 2'65)=$

$=P(Z\leq 2'65)-P(Z\leq 0'75)=0'996-0'7734=0'2226$

Por tanto, de 820 piezas se espera que haya aproximadamente $820\cdot 0'2226=183$ con diámetro comprendido entre 39'7 y 43'5 mm.

- EJERCICIO 51

*Dos componentes A y B de un sistema funcionan independientemente, distribuyéndose el rendimiento de A según una normal de media 6 y desviación típica 1'5; y el rendimiento de B, según una normal de media 43 y desviación típica 3'5. El sistema funciona si el rendimiento de A está entre 3 y 7'5, y el de B, entre 37'4 y 48'6. ¿Cuál es la probabilidad de que el sistema funcione?*

Llamamos:

$P$(rendimiento de A está entre 3 y 3'75) $=P(3<r_A<7'5)$

$P$(rendimiento de B está entre 37'4 y 48'6) $=P(37'4<r_B<48'6)$

$P(3<r_A<7'5)=P\left(\frac{3-6}{1'5}<Z<\frac{7'5-6}{1'5}\right)=P(-2<Z<1)=P(Z<1)-P(Z<-2)=0'8413-0'0228=0'8185$

$P(37'4<r_B<48'6)=P\left(\frac{37'4-43}{3'5}<Z<\frac{48'6-43}{3'5}\right)=P(-1'6<Z<1'6)=2\cdot P(Z<1'6)-1=0'8904$

Como son sucesos independientes, $P$(sistema funcione) $=P(r_A)\cdot P(r_B)=0'8185\cdot 0'8904=$

$=0'7288$.

- EJERCICIO 52

*La media de una variable aleatoria X con distribución normal es 5 veces la desviación típica. Además se verifica:* $P(X \leq 6) = 0'8413$. *Calcula la media y la desviación típica de la variable aleatoria X.*

Sea $\mu$ la media y $\sigma$ la desviación típica. Se sabe que $\mu = 5\sigma$, luego, tipificando la variable, se tiene que $P(X \leq 6) = P\left(Z \leq \frac{6-\mu}{\sigma}\right) = P\left(Z \leq \frac{6-5\sigma}{\sigma}\right) = 0'8413$.

Como, por la tabla normal, se sabe que $P(Z \leq 1) = 0'8413$, se tendrá que $\frac{6-5\sigma}{\sigma} = 1 \Rightarrow \sigma = 1$ y $\mu = 5$.

- EJERCICIO 53

*Una variable aleatoria X se distribuye según una ley normal con varianza 4. De esta variable aleatoria se sabe que* $P(X \leq 2) = 0'8051$.

*(a) Calcula la media de la variable X.*

*(b) Halla* $P(0'18 \leq X \leq 2'28)$.

Es una normal $N(\mu; 2)$.

(a) $P(X \leq 2) = P\left(Z < \frac{2-\mu}{2}\right) = 0'8051$. Por la tabla normal, $\frac{2-\mu}{2} = 0'86 \Rightarrow \mu = 0'28$

(b) $P(0'18 \leq Z \leq 2'28) = P\left(\frac{0'18-0'28}{2} \leq Z \leq \frac{2'28-0'28}{2}\right) = P(-0'05 \leq Z \leq 1) =$

$= P(Z \leq 1) - [1 - P(Z \leq 0'05)] = 0'8413 - (1 - 0'5199) = 0'3612$

- EJERCICIO 54

*Una compañía de autobuses conoce que el retraso en la llegada sigue una ley normal, de media $\mu$ minutos, y que el 68'26% de los autobuses llegan con un retraso comprendido entre 2 y 8 minutos.*

*(a) ¿Cuál es la desviación típica?*

*(b) ¿Cuál es la probabilidad de que un autobús llegue puntual o antes de la hora?*

*(c) ¿Cuál es la probabilidad de que un autobús llegue con un retraso de más de 10 minutos?*

(a) En una distribución $N(\mu; \sigma)$, el 68'26% del total de la población se encuentra en el intervalo $(\mu - \sigma, \mu + \sigma)$. Aplicando esta propiedad al problema se tiene:

$$(\mu - \sigma, \mu + \sigma) = (2, 8) \Rightarrow \left.\begin{array}{l} \mu - \sigma = 2 \\ \mu + \sigma = 8 \end{array}\right\} \Rightarrow 2\mu = 10 \Rightarrow \mu = 5;\ 2\sigma = 6 \Rightarrow \sigma = 3$$

(b) $P(X \leq 0) = P\left(Z > \frac{0-5}{3}\right) = P(Z \leq -1'67) = 1 - P(Z \leq 1'67) = 1 - 0'9525 = 0'0475$

(c) $P(X > 10) = P\left(Z > \frac{10-5}{3}\right) = P(Z > 1'67) = 1 - P(Z \leq 1'67) = 1 - 0'9525 = 0'0475$