

## TEMA 11 – LÍMITES, CONTINUIDAD, ASÍNTOTAS

### 11.1 – LÍMITE DE UNA FUNCIÓN

#### 11.1.1 – LÍMITE DE UNA FUNCIÓN EN UN PUNTO

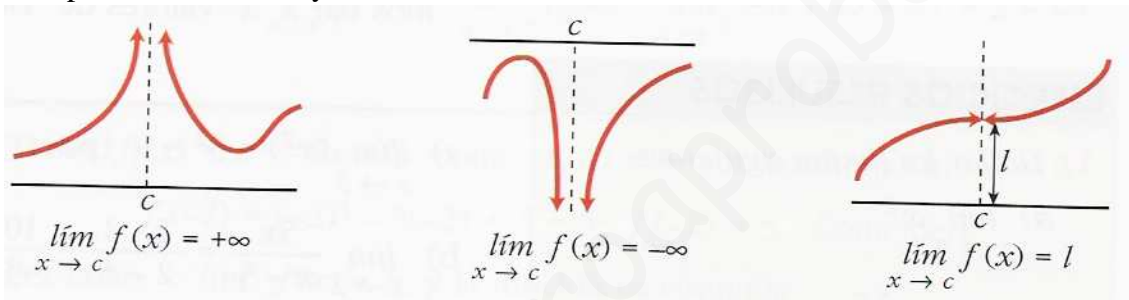
##### Límite de una función en un punto

$\lim_{x \rightarrow c} f(x) = \ell$  Se lee: El límite cuando  $x$  tiende a  $c$  de  $f(x)$  es  $\ell$

Significa:  $\ell$  es el valor al que se aproxima  $f(x)$  cuando  $x$  se aproxima a  $c$

Notas:

- Que  $x$  se aproxima a “ $c$ ” significa que toma valores muy cerca de “ $c$ ” (Se puede acercar por la izquierda o por la derecha).
- $\ell$  puede ser  $+\infty$  ó  $-\infty$  y entonces  $x = c$  es una **asíntota vertical**.

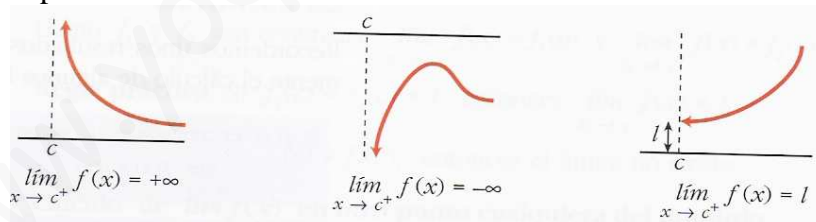


##### Límites laterales de una función en un punto

- Límite por la derecha:

$\lim_{x \rightarrow c^+} f(x) = \ell$  Se lee: El límite cuando  $x$  tiende a  $c$  por la derecha de  $f(x)$  es  $\ell$

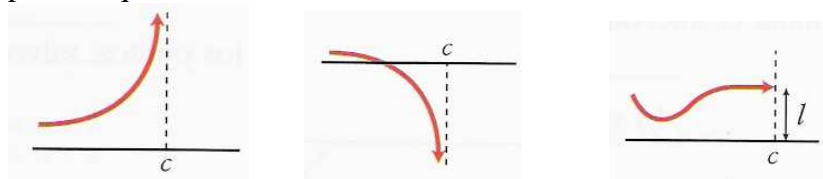
Significa:  $\ell$  es el valor al que se aproxima  $f(x)$  cuando  $x$  se aproxima a  $c$  por la derecha.



- Límite por la izquierda:

$\lim_{x \rightarrow c^-} f(x) = \ell$  Se lee: El límite cuando  $x$  tiende a  $c$  por la izquierda de  $f(x)$  es  $\ell$

Significa:  $\ell$  es el valor al que se aproxima  $f(x)$  cuando  $x$  se aproxima a  $c$  por la izquierda.



##### Existen del límite

Para que exista el límite de una función en un punto es necesario que existan los dos límites laterales y sean iguales.

## 11.1.2 – LÍMITES EN EL INFINITO

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$$

Se lee: El límite cuando  $x$  tiende a más infinito de  $f(x)$  es más infinito

Significa: la función toma valores grandes positivos cuando la  $x$  toma valores grandes positivos. (1º cuadrante)

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = -\infty$$

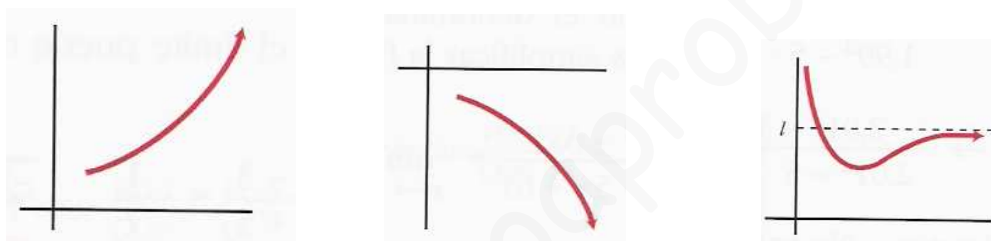
Se lee: El límite cuando  $x$  tiende a más infinito de  $f(x)$  es menos infinito.

Significa: la función toma valores grandes negativos cuando la  $x$  toma valores grandes positivos. (4º cuadrante)

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \ell$$

Se lee: El límite cuando  $x$  tiende a más infinito de  $f(x)$  es  $\ell$

Significa:  $\ell$  es el valor al que se aproxima  $f(x)$  cuando  $x$  toma valores muy grandes positivos:  $y = \ell$  es **una asíntota vertical**.



$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = +\infty$$

Se lee: El límite cuando  $x$  tiende a menos infinito de  $f(x)$  es más infinito

Significa: la función toma valores grandes positivos cuando la  $x$  toma valores grandes negativos. (2º cuadrante)

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty$$

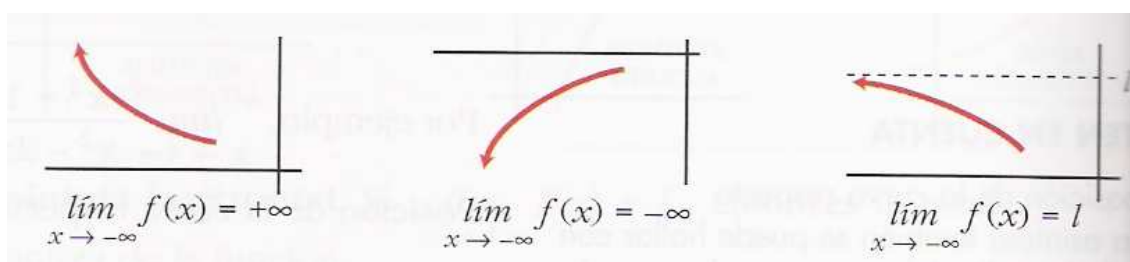
Se lee: El límite cuando  $x$  tiende a menos infinito de  $f(x)$  es menos infinito.

Significa: la función toma valores grandes negativos cuando la  $x$  toma valores grandes negativos. (3º cuadrante)

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \ell$$

Se lee: El límite cuando  $x$  tiende a menos infinito de  $f(x)$  es  $\ell$

Significa:  $\ell$  es el valor al que se aproxima  $f(x)$  cuando  $x$  toma valores muy grandes negativos:  $y = \ell$  es **una asíntota vertical**.



### 11.1.3 – CÁLCULO DE LÍMITES

1 – Se sustituye la “x” por el valor al que tiende

- |  |  |  |
|--|--|--|
| a) $\lim_{x \rightarrow 3} x^2$                      | b) $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{5x}{x-5}$           | c) $\lim_{x \rightarrow 7} \sqrt{3x+4}$              |
| d) $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}} (\sin x + 3)$ | e) $\lim_{x \rightarrow 0,1} \log_{10} x$            | f) $\lim_{x \rightarrow +\infty} 2x^2 + 4x + 7$      |
| g) $\lim_{x \rightarrow +\infty} -2x^2 - 4x + 7$     | h) $\lim_{x \rightarrow -\infty} 2x^2 - 4x + 7$      | i) $\lim_{x \rightarrow -\infty} -2x^2 + 4x + 7$     |
| j) $\lim_{x \rightarrow +\infty} 2x + x^3 - 3$       | k) $\lim_{x \rightarrow -\infty} 2x + x^3 - 3$       | l) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{3x}$       |
| m) $\lim_{x \rightarrow -\infty} -\frac{1}{x^2}$     | n) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^3 - 1}{-5}$ | ñ) $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^3 - 1}{-5}$ |

2 – Indeterminaciones:

$\frac{k}{0}$  **Hallar límites laterales**

- |  |  |  |
|--|--|--|
| a) $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{2}{x-2}$  | b) $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{-2}{x-2}$     | c) $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{3}{2-x}$      |
| d) $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{-3}{2-x}$ | e) $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{3x}{(x-2)^2}$ | f) $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{-3}{(x-2)^2}$ |

$\frac{0}{0}$  **Factorizar y simplificar**

- |  |   |   |
|--|---|---|
| a) $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 - 5x + 6}{x^2 + 3x - 10}$ | b) $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^3 - 5x^2 + 6x}{x^3 - 7x^2 + 16x - 12}$ | c) $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{x^3 - 5x^2 + 6x}{x^3 - 7x^2 + 16x - 12}$ |
|--|---|---|

$\left. \begin{array}{l} \pm \infty \\ \frac{\infty}{\infty} \\ 0 \end{array} \right\} \begin{array}{l} \text{Si grado del numerador} > \text{grado del denominador } r \text{ (El signo depende de los} \\ \text{coeficientes de la } x \text{ de mayor grado del numerador y del denominador } r) \\ \text{Si grado del numerador} = \text{grado del denominador } r \text{ (a y b son los coeficientes} \\ \text{de la } x \text{ de mayor grado del numerador y del denominador } r) \\ \text{Si grado del numerador} < \text{grado del denominador } r \end{array}$

- |   |   |
|---|---|
| a) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2 - 5x + 3}{3x - 5}$    | b) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2 + 3}{x^3}$  |
| c) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{3x^2 - 5x + 1}{2x^2 - 5}$ | d) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2 + 3}{-x^3}$ |

$\infty - \infty$  **Se hacen operaciones. Cuando aparecen radicales, multiplicamos y dividimos por la expresión conjugada.**

- |  |  |
|--|--|
| a) $\lim_{x \rightarrow \infty} \left( \frac{1}{x} - \frac{2x}{x^2 + 1} \right)$ | b) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \sqrt{1-x}}{x}$ |
|--|--|

1º : Tipo número e : Aplicar :  $\lim_{x \rightarrow \begin{cases} a \\ \infty \end{cases}} \left( 1 + \frac{1}{f(x)} \right)^{f(x)} = e$  ó

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x)^{g(x)} = e^{\lim_{x \rightarrow a} g(x) \cdot [f(x) - 1]}$$

3- En funciones definidas a trozos, en los puntos donde esté definida de distinta forma si me aproximo por valores más pequeños, que por valores más grandes, habrá que hacer límites laterales.

a) Dada la función  $f(x) = \begin{cases} 2x - 5 & \text{si } x < 3 \\ -x + 7 & \text{si } x \geq 3 \end{cases}$  Calcular su límite en los puntos 3, 1, 7

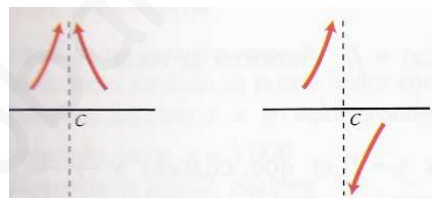
## 11. 2 – ASÍNTOTAS Y RAMAS INFINITAS

- **Asíntotas verticales:**  $x = c$  y  $\rightarrow \infty$

Cálculo: Puntos que anulan el denominador

Puntos que anulan lo que está dentro del logaritmo

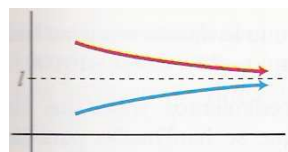
Aproximación: Calcular los límites laterales  $\begin{cases} -\infty & \text{Por abajo} \\ +\infty & \text{Por arriba} \end{cases}$



- **Asíntotas horizontales:**  $x \rightarrow \infty$  y  $y = b$  (Grado numerador  $\leq$  Grado denominador)

Cálculo:  $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = b$

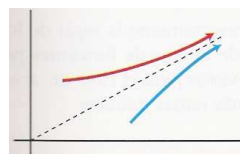
Aproximación:  $f(\pm 1000)$  – Asíntota  $\begin{cases} < 0 & \text{Por debajo} \\ > 0 & \text{Por encima} \end{cases}$



- **Asíntotas oblicuas:**  $y = mx + n$  (Grado Numerador – Grado denominador = 1)

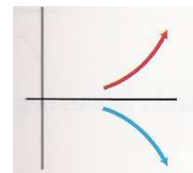
Cálculo:  $m = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{x}$  ;  $n = \lim_{x \rightarrow \infty} (f(x) - mx)$

Aproximación:  $f(\pm 1000)$  – Asíntota  $(\pm 1000)$   $\begin{cases} < 0 & \text{Por debajo} \\ > 0 & \text{Por encima} \end{cases}$



**RAMAS INFINITAS** (Grado Numerador – Grado denominador  $\geq 2$ )

Cálculo:  $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} f(x) = \pm\infty$



a)  $y = \frac{x^2 - 5x + 7}{x - 2}$

b)  $y = \frac{x^2 + 1}{x^2 - 2x}$

c)  $y = \frac{2x}{x^2 + 2x}$

d)  $y = \frac{3x - 5}{x^2 + 3x + 2}$

e)  $y = \frac{x^2 + 1}{x^2 - 2x}$

f)  $y = \frac{x^3 - 5x^2}{-x + 3}$

## 11.3 - CONTINUIDAD

La idea de función continua es la de que “puede ser construida con un solo trazo”.

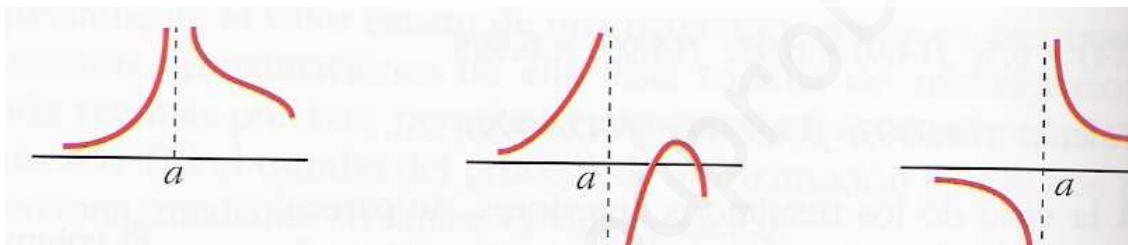
Una función  $f(x)$  es continua en el punto  $x = a$  si  $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = f(a)$

Todas las funciones definidas por expresiones analíticas elementales (es decir, todas las que conocemos hasta ahora, exceptuando las funciones a trozos), son continuas en todos los puntos de su dominio.

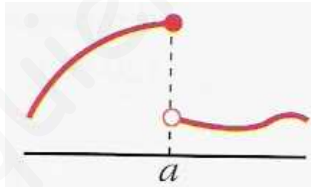
Las funciones a trozos habrá que estudiarlas en los extremos de sus trozos que pertenezcan al dominio.

### Tipos de discontinuidades

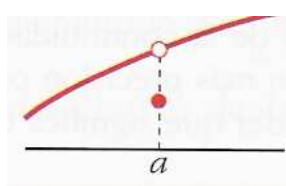
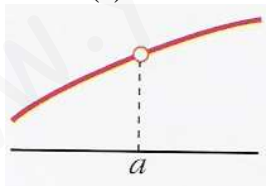
- **Discontinua inevitable de salto infinito:** Si alguno de los límites laterales es infinito o no existe.



- **Discontinua inevitable de salto finito:** Si los dos límites laterales son finitos pero distintos. El salto es la diferencia, en valor absoluto, de los límites laterales.



- **Discontinua evitable:** Si los dos límites laterales son finitos e iguales, pero su valor no coincide con  $f(a)$  o no existe  $f(a)$



a)  $y = x^2 - 5$

b)  $y = \frac{x^2 - 3}{x}$

c)  $y = \frac{x + 2}{x - 3}$

d)  $\log x$

e)  $y = \sqrt{x + 2}$

f)  $y = \begin{cases} 3x - 4 & \text{si } x < 3 \\ x + 1 & \text{si } x \geq 3 \end{cases}$

g)  $y = \begin{cases} 3 & \text{si } x \neq 4 \\ 1 & \text{si } x = 4 \end{cases}$

h) Calcular el valor de  $n$  para que la función  $f(x) = \begin{cases} x^2 - 5x + 1 & \text{si } x \leq 4 \\ 2x + n & \text{si } x > 4 \end{cases}$  sea continua en todo  $\mathbb{R}$ .

i) Calcular  $k$  para que  $y = \begin{cases} x^3 - 2x + k & \text{si } x \neq 3 \\ 7 & \text{si } x = 3 \end{cases}$  sea continua en  $\mathbb{R}$