

Apellidos:

Nombre:

Grupo:

1.- (10 puntos) Determinar la función inversa de $f(x) = 3^{x-2}$

$$y = 3^{x-2} \Rightarrow x = 3^{y-2} \Rightarrow \log_3 x = y - 2 \Leftrightarrow y = 2 + \log_3 x \Rightarrow f^{-1}(x) = 2 + \log_3 x$$

2.- (10 puntos) Dadas las funciones $f(x) = \sqrt{x+5}$ y $g(x) = x^2 - 6x$ Hallar $(f \circ g)(x)$ y su dominio.

$$(f \circ g)(x) = f(g(x)) = \sqrt{x^2 - 6x + 5}$$

$$x^2 - 6x + 5 = 0 \Rightarrow x = 1, x = 5 \xrightarrow{+} 1 \xleftarrow{-} 5 \xleftarrow{+} \Rightarrow \text{Dom}(f \circ g) = (-\infty, 1] \cup [5, \infty)$$

3.- (10 puntos) En un pueblo de alta montaña se repobló una zona con acebos hace 6 años. Inicialmente se pusieron 100 ejemplares y en estos momentos hay 2010 ejemplares de acebo. Si sabemos que $N = A \cdot e^{Bt}$ es la función que da el número N de acebos en función del tiempo que ha pasado, calcular A y B para este enunciado. ¿Cuántos años han de pasar para que haya 14850 ejemplares?

$$\text{para } t=0 \quad N = 100 \Rightarrow 100 = A = \text{valor inicial}$$

$$\text{para } t=6 \quad N = 2010 \Rightarrow 2010 = 100 \cdot e^{6B} \Rightarrow 20,1 = e^{6B} \Rightarrow \ln(20,1) = 6B \Rightarrow B \approx 0,5 \Rightarrow N = 100 \cdot e^{0,5t}$$

$$\text{para conseguir 14850 ejemplares } 14850 = 100 \cdot e^{0,5t} \Rightarrow 148,5 = e^{0,5t} \Rightarrow \ln(148,5) = 0,5t \Rightarrow t \approx 10 \text{ años}$$

4.- (40 puntos) Hallar los siguientes límites:

a) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{x^2+1}}{x+1} = \frac{\sqrt{1}}{1} = 1$

b) $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{x^2 - 5x + 6}{x^2 - 3x} = \left(\frac{0}{0} \text{ Ind.}\right) = \lim_{x \rightarrow 3} \frac{(x-2)(x-3)}{x(x-3)} = \frac{3-2}{3} = \frac{1}{3}$

c) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2x^3 - 4x^2 - 12}{2 - 3x^3} = \left(\frac{\infty}{\infty} \text{ Ind.}\right) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2x^3}{-3x^3} = -\frac{2}{3}$

d) $\lim_{x \rightarrow -3} \frac{x^2 - 9}{6\sqrt{x+3}} = \left(\frac{0}{0} \text{ Ind.}\right) = \lim_{x \rightarrow -3} \frac{(x-3)(x+3)\sqrt{x+3}}{6\sqrt{x+3}\sqrt{x+3}} = \frac{0}{6} = 0$

e) $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^4 - 5x^3 - 1}{x^3 + 12} \underset{C.V. t=-x}{=} \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{t^4 + 5t^3 - 1}{-t^3 + 12} = \left(\frac{\infty}{\infty} \text{ Ind.}\right) = \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{t^4}{-t^3} = \lim_{t \rightarrow \infty} -t = -\infty$

f) $\lim_{x \rightarrow 2} (5x - 6)^{x-2} = (10 - 6)^0 = 4^0 = 1$

g) $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{2x^2 - x}{x+1} - \frac{2x^2}{x-1} \right) = (\infty - \infty \text{ Ind.}) = \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{(2x^2 - x)(x-1) - 2x^2(x+1)}{(x+1)(x-1)} \right) = \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{-5x^2 + x}{x^2 - 1} \right) =$
 $= \left(\frac{\infty}{\infty} \text{ Ind.}\right) = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{-5x^2}{x^2} = -5$

$$\begin{aligned}
 \text{h) } \lim_{x \rightarrow \infty} (\sqrt{x^2 + 5x - 3} - x) &= (\infty - \infty \text{ Ind.}) = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{(\sqrt{x^2 + 5x - 3} - x)(\sqrt{x^2 + 5x - 3} + x)}{\sqrt{x^2 + 5x - 3} + x} = \\
 &= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2 + 5x - 3 - x^2}{\sqrt{x^2 + 5x - 3} + x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{5x - 3}{\sqrt{x^2 + 5x - 3} + x} = \left(\frac{\infty}{\infty} \text{ Ind.}\right) = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{5x}{\sqrt{x^2} + x} = \frac{5}{2}
 \end{aligned}$$

5.- (20 puntos) Estudiar la continuidad de la función y clasificar las discontinuidades si existen:

$$\text{a) } f(x) = \frac{x^2 - 2x + 1}{x^2 - 1}$$

$\text{Dom}(f) = \mathbb{R} - \{-1, 1\} \Rightarrow$ como es una función racional es continua en $\mathbb{R} - \{-1, 1\}$

$$\odot x = 1 \Rightarrow \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 - 2x + 1}{x^2 - 1} = \left(\frac{0}{0} \text{ Ind.}\right) = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(x-1)^2}{(x+1)(x-1)} = \frac{0}{2} = 0 \text{ y } \cancel{f(1)} \Rightarrow \text{discontinuidad evitable.}$$

$$\odot x = -1 \Rightarrow \lim_{x \rightarrow -1} \frac{x^2 - 2x + 1}{x^2 - 1} = \left(\frac{4}{0} \text{ Ind. de signo}\right) = \pm\infty \Rightarrow \text{discontinuidad no evitable de salto infinito.}$$

$$\text{b) } f(x) = \begin{cases} \frac{x+1}{x} & \text{si } x < -2 \\ 5 - 2x & \text{si } x \geq -2 \end{cases}$$

$$\odot y = \frac{x+1}{x} \text{ es continua en } \mathbb{R} - \{0\} \text{ y por tanto continua en } x < -2$$

$$\odot y = 5 - 2x \text{ es continua en } \mathbb{R} \text{ y por tanto en } x > -2$$

$$\odot x = -2 \left. \begin{array}{l} \rightarrow \lim_{x \rightarrow -2^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow -2^+} 5 - 2x = 9 \\ \rightarrow \lim_{x \rightarrow -2^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow -2^-} \frac{x+1}{x} = \frac{1}{2} \\ \rightarrow f(x) = \frac{1}{2} \end{array} \right\} \Rightarrow \text{discontinuidad no evitable de salto finito.}$$

$y=f(x)$ es continua en $\mathbb{R} - \{-2\}$

6.- (10 puntos) Hallar el valor del parámetro "a" para que la $f(x) = \begin{cases} x^2 + ax - 1 & \text{si } x \leq 1 \\ 2^x & \text{si } x > 1 \end{cases}$ sea continua en

todo \mathbb{R} .

$$\odot y = x^2 + ax - 1 \text{ y } y = 2^x \text{ son funciones continuas en } \mathbb{R}.$$

$$\odot x = 1 \left. \begin{array}{l} \rightarrow \lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^+} 2^x = 2 \\ \rightarrow \lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^-} x^2 + ax - 1 = a \\ \rightarrow f(1) = a \end{array} \right\} \Rightarrow a = 2$$

para $a=2$ la función es continua en todo \mathbb{R}

TODO EJERCICIO A LÁPIZ NO SERÁ EVALUADO