1. Dada la función racional $y=\dfrac{2x+4}{x+3}$:

a) Halla los puntos de corte con los ejes. **(0,5 puntos)**

b) Haz las transformaciones oportunas en la función y di cuál es su asíntota vertical y su asíntota horizontal. **(0,5 puntos)**

c) Represéntala gráficamente **(1 punto)**

2. Representa gráficamente la siguiente función definida por trozos: **(1,5 puntos)**

$$f(x)=\begin{cases} x^2+4x+3 & \text{si} \quad x\le -1 \\ -x & \text{si} \quad -1<x<1 \\ \dfrac{-1}{x} & \text{si} \quad x\ge 1 \end{cases}$$

3. Dada la siguiente función $g(x)=\dfrac{2x^2-8}{x^2-2x-3}$, se pide:

a) Puntos de corte con los ejes. **(0,5 puntos)**

b) Asíntotas (verticales, horizontales y oblicuas). **(1 punto)**

c) Representación gráfica de la función. **(0,5 puntos)**

d) Dominio e imagen o recorrido de la función. **(0,5 puntos)**

4. Calcular los siguientes límites, indicando la indeterminación correspondiente:

a) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^3+2x^2+x-4}{x-1}$ **(0,5 puntos)**

b) $\lim\limits_{x\to +\infty}\dfrac{2x^3-3x^2+1}{3x^3+\sqrt{x^6-2}}$ **(0,5 puntos)**

c) $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{\sqrt{x+2}-2}{x-2}$ **(0,5 puntos)**

d) $\lim\limits_{x\to +\infty}\left(\sqrt{x^2+1}-x\right)$ **(0,5 puntos)**

Pregunta teórica

Contesta a las siguientes cuestiones:

1. Las funciones exponenciales de base a son de la forma f(x) =

2. Las propiedades de las funciones exponenciales son las siguientes:

a) Dominio:

b) Recorrido o imagen:

c) Puntos de corte con el eje X:

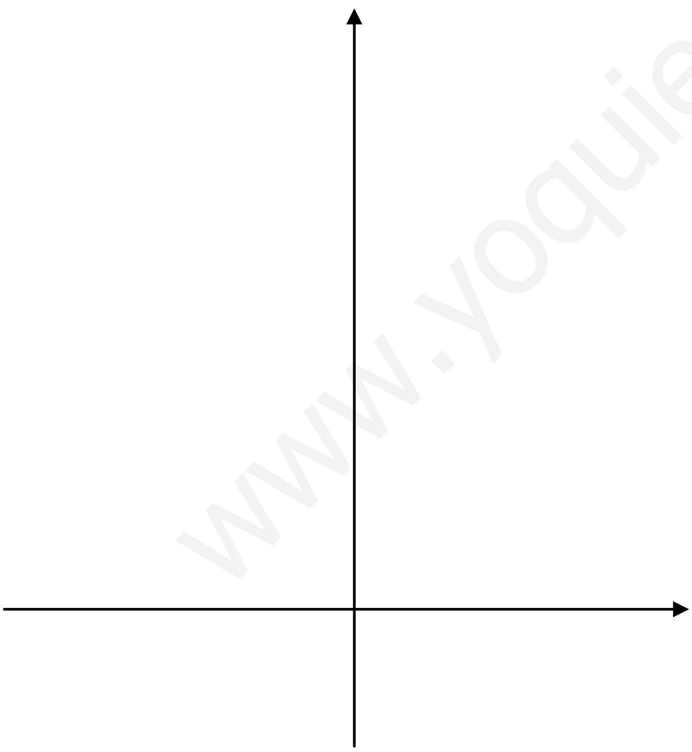
d) Puntos de corte con el eje Y:

e) Son estrictamente crecientes cuando:

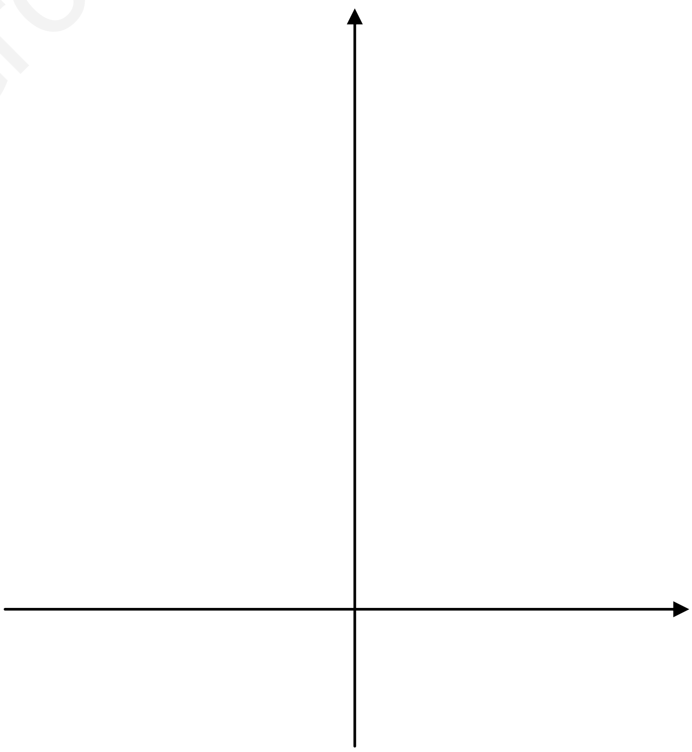
f) Son estrictamente decrecientes cuando:

3. Representa gráficamente las funciones exponenciales siguientes (sin tabla de valores)

$f(x) = 2^x$



$g(x) = \left(\frac{1}{2}\right)^x$



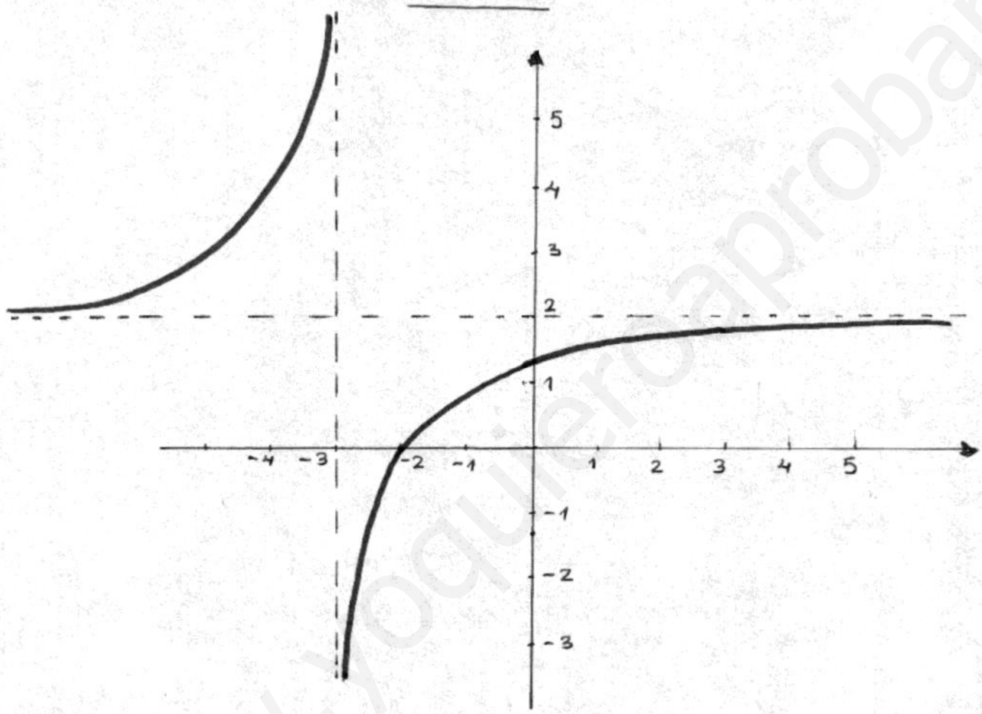
<u>**Nota**</u>**:** El valor de la pregunta teórica es de **dos puntos** repartidos de la siguiente manera:

1. 0,2 puntos.
2. 1,2 puntos (0,2 puntos cada uno de los apartados).
3. 0,6 puntos (0,3 puntos cada uno de los apartados).

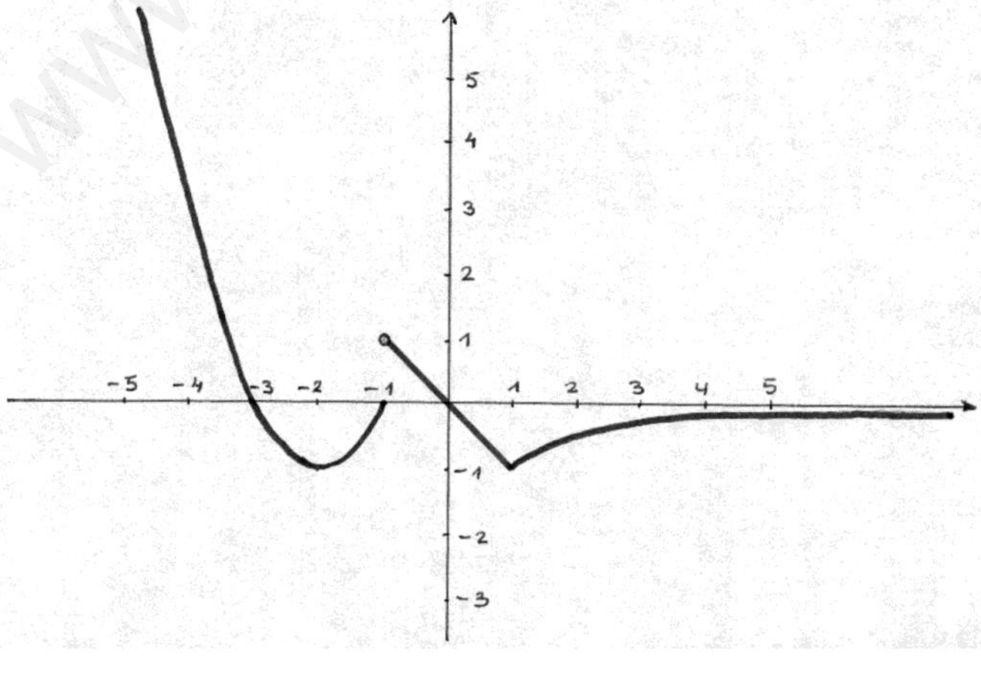
① a) Puntos de corte con el eje X: $y = 0 \Rightarrow \frac{2x+4}{x+3} = 0 \Rightarrow 2x + 4 = 0$ $\Rightarrow x = -2$. Por tanto el punto de corte con el eje X es: $(-2, 0)$

Puntos de corte con el eje Y: $x = 0 \Rightarrow y = \frac{2\cdot 0 + 4}{0+3} = \frac{4}{3}$. Por tanto el punto de corte con el eje Y es: $\left(0, \frac{4}{3}\right)$.

b) $y = \frac{2x+4}{x+3} = 2 + \frac{-2}{x+3}$. Esto quiere decir que la gráfica se desplaza dos unidades hacia arriba y tres hacia la izquierda. Por tanto la asíntota horizontal es $y = 2$ y la asíntota vertical es $x = -3$



②



a) Con el eje X: $y=0 \Rightarrow \frac{2x^2-8}{x^2-2x-3}=0$

$\Rightarrow 2x^2-8=0 \Rightarrow x^2=4 \Rightarrow x=\pm 2$. Por tanto los puntos de corte con el eje X son: $(2,0)$ y $(-2,0)$.

Con el eje Y: $x=0 \Rightarrow y=\frac{8}{3}$. Por tanto el punto $(0,\frac{8}{3})$ es el de corte con el eje Y.

b) $x^2-2x-3=0 \iff x=-1,\ x=3$

Entonces:

$$\lim_{x\to -1}\frac{2x^2-8}{x^2-2x-3}=\begin{cases}-\infty & \text{si } x\to -1^-\\ +\infty & \text{si } x\to -1^+\end{cases}$$

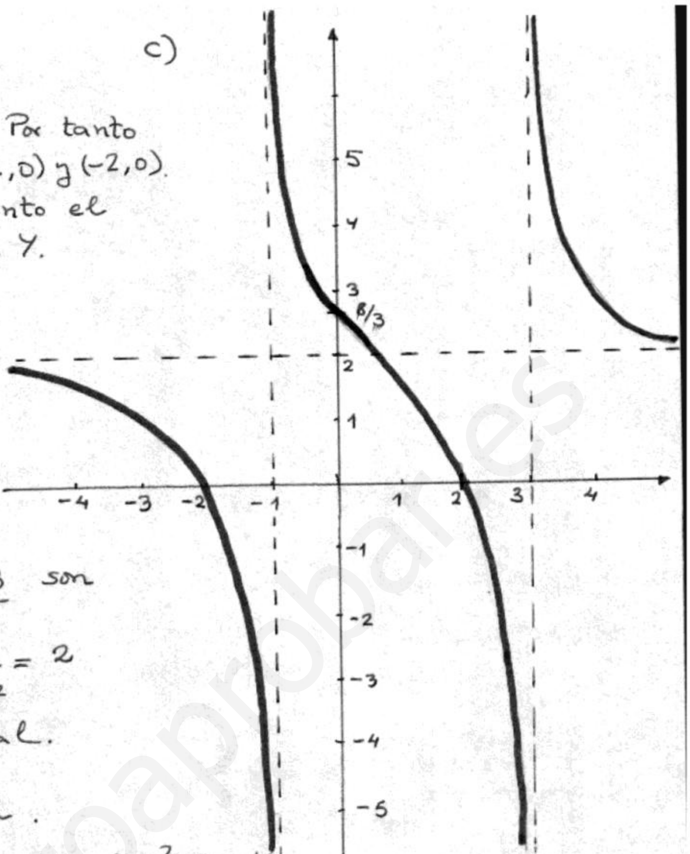
$$\lim_{x\to 3}\frac{2x^2-8}{x^2-2x-3}=\begin{cases}-\infty & \text{si } x\to 3^-\\ +\infty & \text{si } x\to 3^+\end{cases}$$

Esto quiere decir que $x=-1$ y $x=3$ son asíntotas verticales.

$$\lim_{x\to\infty}\frac{2x^2-8}{x^2-2x-3}=\left[\frac{\infty}{\infty}\right]=\lim_{x\to\infty}\frac{2-8/x^2}{1-2/x-3/x^2}=2$$

$\Rightarrow y=2$ es una asíntota horizontal.

c)



d) $\mathrm{Dom}\, g=\mathbb{R}-\{-1,1\}$; $\mathrm{Im}\, g=\mathbb{R}$.

(4) a) $$\lim_{x\to 1}\frac{x^3+2x^2+x-4}{x-1}=\left[\frac{0}{0}\right]=\lim_{x\to 1}\frac{(x-1)(x^2+3x+4)}{x-1}=\lim_{x\to 1}(x^2+3x+4)=\underline{\underline{8}}$$

b) $$\lim_{x\to +\infty}\frac{2x^3-3x^2+1}{3x^3+\sqrt{x^6-2}}=\left[\frac{\infty}{\infty}\right]=\lim_{x\to+\infty}\frac{2-\frac{3}{x}+\frac{1}{x^3}}{3+\sqrt{1-\frac{2}{x^6}}}=\frac{2-0+0}{3+\sqrt{1-0}}=\frac{2}{4}=\underline{\underline{\frac{1}{2}}}$$

c) $$\lim_{x\to 2}\frac{\sqrt{x+2}-2}{x-2}=\left[\frac{0}{0}\right]=\lim_{x\to 2}\frac{(\sqrt{x+2}-2)(\sqrt{x+2}+2)}{(x-2)(\sqrt{x+2}+2)}=$$

$$=\lim_{x\to 2}\frac{\sqrt{x+2}^2-2^2}{(x-2)(\sqrt{x+2}+2)}=\lim_{x\to 2}\frac{x+2-4}{(x-2)(\sqrt{x+2}+2)}=\lim_{x\to 2}\frac{x-2}{(x-2)(\sqrt{x+2}+2)}$$

$$=\lim_{x\to 2}\frac{1}{\sqrt{x+2}+2}=\underline{\underline{\frac{1}{4}}}$$

d) $$\lim_{x\to +\infty}\left(\sqrt{x^2+1}-x\right)=[\infty-\infty]=\lim_{x\to+\infty}\frac{(\sqrt{x^2+1}-x)(\sqrt{x^2+1}+x)}{\sqrt{x^2+1}+x}=$$

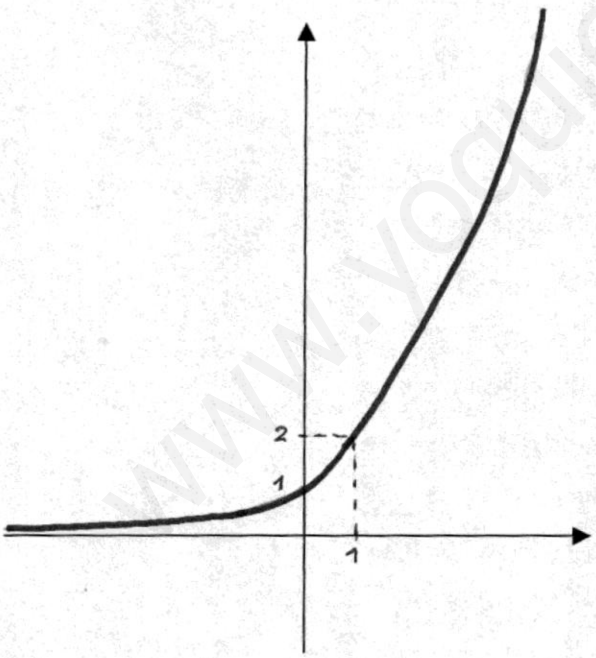
$$=\lim_{x\to+\infty}\frac{\sqrt{x^2+1}^2-x^2}{\sqrt{x^2+1}+x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{x^2+1-x^2}{\sqrt{x^2+1}+x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{\sqrt{x^2+1}+x}=\frac{1}{\infty}=\underline{\underline{0}}$$

Pregunta teórica

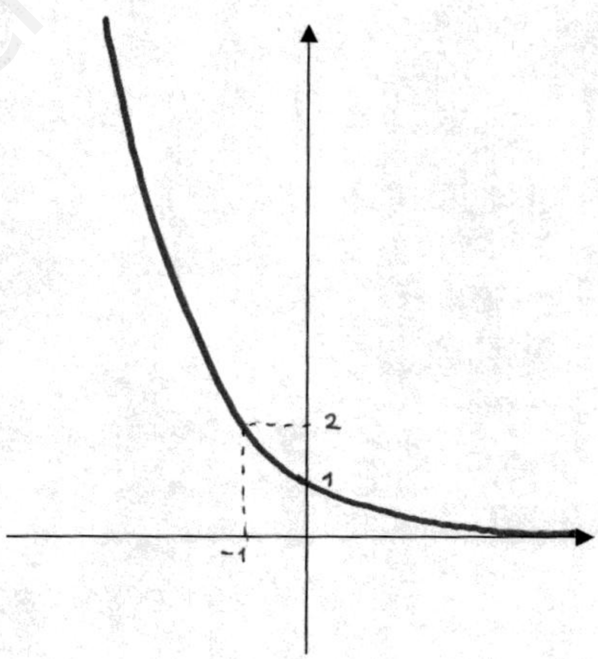
Contesta a las siguientes cuestiones:

1. Las funciones exponenciales de base a son de la forma $f(x) = a^x$, con $a \in \mathbb{R}$, $a > 0$ y $a \neq 1$
2. Las propiedades de las funciones exponenciales son las siguientes:
   a) Dominio: $Dom\, f = \mathbb{R}$
   b) Recorrido o imagen: $Im\, f = \mathbb{R}^+ = (0, +\infty)$
   c) Puntos de corte con el eje X: no cortan al eje X
   d) Puntos de corte con el eje Y: $(0, 1)$
   e) Son estrictamente crecientes cuando: $a > 1$
   f) Son estrictamente decrecientes cuando: $0 < a < 1$
3. Representa gráficamente las funciones exponenciales siguientes (sin tabla de valores)

$f(x) = 2^x$



$g(x) = \left(\frac{1}{2}\right)^x$



<u>Nota</u>: El valor de la pregunta teórica es de **dos puntos** repartidos de la siguiente manera:

1. 0,2 puntos.
2. 1,2 puntos (0,2 puntos cada uno de los apartados).
3. 0,6 puntos (0,3 puntos cada uno de los apartados).