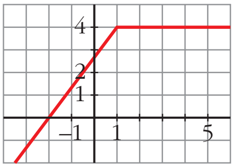
II ANÁLISIS

Página 200

1 **a) Escribe la expresión analítica de esta función.**

b) Observa la gráfica y di el valor de los siguientes límites:

$$\lim_{x \to -\infty} f(x); \quad \lim_{x \to 1} f(x); \quad \lim_{x \to +\infty} f(x)$$



Resolución

a) $f(x) = \begin{cases} \frac{4}{3}(x+2), & x \le 1 \\ 4, & x > 1 \end{cases}$

b) $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = -\infty; \quad \lim\limits_{x \to 1} f(x) = 4; \quad \lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = 4$

2 **Representa las funciones:**

a) $y = |x^2 + 2x - 3|$ **b)** $y = \log_2 (x + 3)$

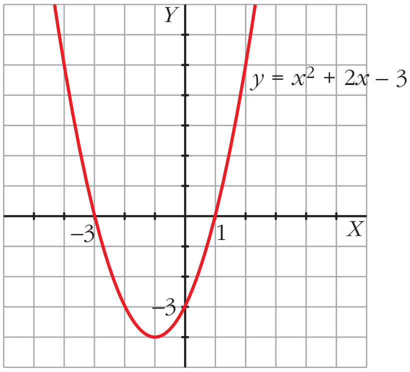
Resolución

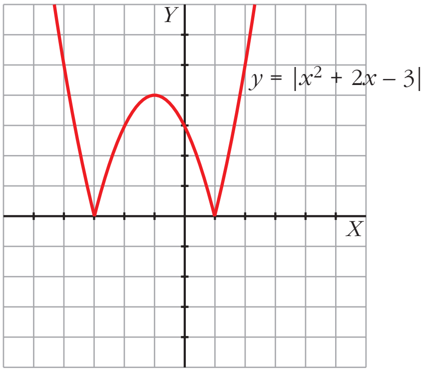
a) $y = |x^2 + 2x - 3|$. Estudiamos la parábola $y = x^2 + 2x - 3$:

Cortes con los ejes: $x = 0,\ y = -3$; $y = 0 \rightarrow x^2 + 2x - 3 = 0$ → $x = 1$, $x = -3$

Vértice: $x = \frac{-2}{2} = -1$; $y = (-1)^2 + 2(-1) - 3 = -4$

Su representación es:





Así, los valores positivos quedan igual, y para los negativos tomamos sus opuestos.

b) $y = log_2 (x + 3) \rightarrow Dom = (-3, +\infty)$

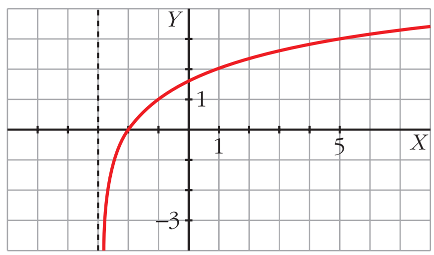
Hallamos algunos puntos

x	–2	–1	1	5
y	0	1	2	3

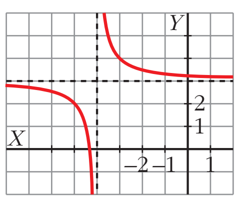
y vemos que:

$\lim\limits_{x \to -3^+} log_2 (x + 3) = -\infty$

Su gráfica es:



3



La expresión analítica de esta función es del tipo:

$$y = a + \frac{1}{x - b}$$

a) ¿Cuáles son los valores de a y de b?

b) Di cuáles son sus asíntotas.

c) ¿Es discontinua en algún punto?

Resolución

a) $a = 3$; $b = -4$

b) Asíntota vertical: $x = -4$

Asíntota horizontal: $y = 3$

c) Es discontinua en $x = -4$, punto en el que no está definida la función.

4 **Indica para qué valores de $\mathbb{R}$ son continuas las siguientes funciones:**

a) $y = ln (x - 2)$

b) $y = cos\ x$

c) $y = \sqrt{-x}$

Resolución

a) $(2, +\infty)$ b) $\mathbb{R}$ c) $(-\infty, 0]$

5 **Halla la recta tangente a la curva $y = -x^2 + 5x$, que es paralela a la recta $x + y + 3 = 0$.**

Resolución

Pendiente de $x + y + 3 = 0$: $m = -1$

El valor de la derivada en el punto de tangencia debe ser igual a –1.

$f(x) = -x^2 + 5x$

$$\left.\begin{array}{l} f'(x) = -2x + 5 \;\rightarrow\; -2x + 5 = -1 \;\rightarrow\; x = 3 \\ f(3) = -3^2 + 5 \cdot 3 = 6 \end{array}\right\} \rightarrow \text{Punto de tangencia: } P(3, 6)$$

Ecuación de la recta tangente buscada: $y = 6 - 1(x - 3) \;\rightarrow\; y = 9 - x$

6 **Halla los puntos singulares de $f(x) = -x^4 + 8x^2 - 5$. Con ayuda de las ramas infinitas, di si son máximos o mínimos y representa la función.**

Resolución

$f(x) = -x^4 + 8x^2 - 5 \;\rightarrow\; f'(x) = -4x^3 + 16x \;\rightarrow\; f'(x) = 0 \;\rightarrow\; -4x^3 + 16x = 0 \;\rightarrow$

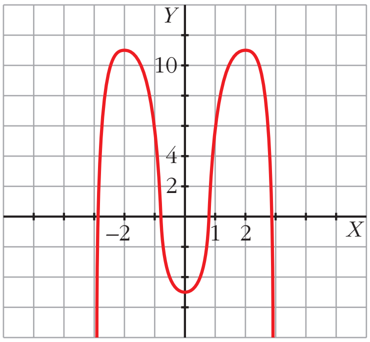
$$\rightarrow\; 4x(-x^2 + 4) = 0 \left\langle \begin{array}{ll} x = 0 & \rightarrow\; f(0) = -5 \\ x = 2 & \rightarrow\; f(2) = -16 + 32 - 5 = 11 \\ x = -2 & \rightarrow\; f(-2) = -16 + 32 - 5 = 11 \end{array}\right.$$

Los puntos singulares son $(0, -5)$, $(2, 11)$ y $(-2, 11)$.

$$\text{Ramas infinitas: } \left\{ \begin{array}{l} \lim\limits_{x \to +\infty} (-x^4 + 8x^2 - 5) = -\infty \\ \lim\limits_{x \to -\infty} (-x^4 + 8x^2 - 5) = -\infty \end{array}\right.$$

Máximos: $(2, 11)$ y $(-2, 11)$

Mínimo: $(0, -5)$



7 **Con las funciones $f(x) = e^x$ y $g(x) = \sqrt{x}$ hemos obtenido, por composición, estas otras:**

$$p(x) = e^{\sqrt{x}}; \quad q(x) = \sqrt{e^x}; \quad r(x) = \sqrt[4]{x}$$

Expresa las funciones p, q y r a partir de f y g.

Resolución

$p(x) = (f \circ g)(x)$ $\qquad$ $q(x) = (g \circ f)(x)$ $\qquad$ $r(x) = (g \circ g)(x)$

8 **Calcula el límite de la función $f(x) = \dfrac{x^4 - x^3 - 6x^2}{x^3 - 6x^2 + 9x}$ en los siguientes casos:**

a) $x \to 3$ $\qquad$ **b) $x \to 0$** $\qquad$ **c) $x \to +\infty$** $\qquad$ **d) $x \to -\infty$**

Resolución

$$f(x) = \frac{x^2(x-3)(x+2)}{x(x-3)^2} = \frac{x(x+2)}{x-3}$$

a) $+\infty$ $\qquad$ b) 0 $\qquad$ c) $+\infty$ $\qquad$ d) $-\infty$

9 **En la función:** $f(x) = \begin{cases} 3x - b & \text{si } x < 2 \\ 3 & \text{si } x = 2 \\ -2x + 9 & \text{si } x > 2 \end{cases}$

a) Calcula b para que tenga límite en $x = 2$.

b) Después de hallar b, explica si f es continua en $x = 2$.

Resolución

a) $f(x) = \begin{cases} 3x - b & \text{si } x < 2 \\ 3 & \text{si } x = 2 \\ -2x + 9 & \text{si } x > 2 \end{cases}$

Para que tenga límite en $x = 2$, debe cumplirse: $\lim\limits_{x \to 2^-} f(x) = \lim\limits_{x \to 2^+} f(x)$

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x \to 2^-} f(x) = 3 \cdot 2 - b = 6 - b \\ \lim\limits_{x \to 2^+} f(x) = -2 \cdot 2 + 9 = 5 \end{array}\right\} \to 6 - b = 5 \to b = 1$$

b) Para que sea continua en $x = 2$, debe ser $\lim\limits_{x \to 2} f(x) = f(2)$.

$$\lim_{x \to 2} f(x) = 3 \cdot 2 - 1 = 5$$

$$f(2) = 3$$

Como $f(2) \neq \lim\limits_{x \to 2} f(x)$, f no es continua en $x = 2$.

10 **Halla la derivada de las siguientes funciones:**

a) $f(x) = \dfrac{\ln x}{x}$ **b)** $f(x) = \left(\dfrac{2x-5}{x+1}\right)^2$ **c)** $f(x) = \ln\left(\dfrac{x^2-1}{2x+3}\right)$

d) $f(x) = \sqrt{2x^2+x-1}$ **e)** $f(x) = e^{\sqrt{x}} \cdot \operatorname{sen} x$ **f)** $f(x) = \sqrt{1+\sqrt{x}}$

Resolución

a) $f'(x) = \dfrac{1-\ln x}{x^2}$ b) $f'(x) = \dfrac{28x-70}{(x+1)^3}$

c) $f'(x) = \dfrac{2x^2+6x+2}{(x^2-1)(2x+3)}$ d) $f'(x) = \dfrac{4x+1}{2\sqrt{2x^2+x-1}}$

e) $f'(x) = e^{\sqrt{x}}\left(\dfrac{\operatorname{sen} x}{2\sqrt{x}} + \cos x\right)$ f) $f'(x) = \dfrac{1}{4\sqrt{x}\sqrt{1+\sqrt{x}}}$

11 **Un capital de 3 500 € invertido en fondos de inversión, se supone que va a variar según la siguiente función:**

$$C = 3{,}5 + 0{,}04t - 0{,}001t^2$$

donde t es el tiempo que dura la inversión, en meses, y C es su valor en ese instante, en miles de euros.

a) ¿En qué momento conviene sacar el capital para que su valor sea máximo?

b) Si no se hace a su debido tiempo, ¿en qué momento lo que queda es igual al capital inicial?

c) Si nos descuidáramos y dejáramos la inversión indefinidamente, ¿en qué momento nos quedaríamos sin nada?

Resolución

a) Será cuando se anule la derivada.

$C(t) = 3{,}5 + 0{,}04t - 0{,}001t^2$

$C'(t) = 0{,}04 - 0{,}002t$

$C'(t) = 0 \rightarrow 0{,}04 - 0{,}002t = 0 \rightarrow t = \dfrac{0{,}04}{0{,}002} = 20$ meses

b) Nos pregunta para qué valor de $t \neq 0$ es $C(t) = 3{,}5$.

$3{,}5 = 3{,}5 + 0{,}04t - 0{,}001t^2$

$0 = t(0{,}04 - 0{,}001t) \rightarrow t = \dfrac{0{,}04}{0{,}001} = 40$ meses

c) $C(t) = 0$

$0 = 3{,}5 + 0{,}04t - 0{,}001t^2 \rightarrow t^2 - 40t - 3\,500 = 0 \rightarrow$

$\rightarrow t = \dfrac{40 \pm \sqrt{(-40)^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-3\,500)}}{2} = 82{,}44$ meses

A partir de $t = 83$ meses, no tendríamos nada.

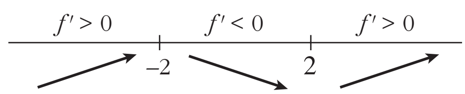
12 **Determina los intervalos de crecimiento y de decrecimiento de las funciones siguientes:**

a) $\boldsymbol{y = x^3 - 12x}$ **b)** $\boldsymbol{y = \dfrac{x^2 - 4}{x}}$

Resolución

a) $f(x) = x^3 - 12x \;\rightarrow\; f'(x) = 3x^2 - 12;\;\; 3x^2 - 12 = 0 \begin{cases} x = 2 \\ x = -2 \end{cases}$

Estudiamos el signo de f' para saber dónde crece y dónde decrece la función:



f crece en $(-\infty, -2) \cup (2, +\infty)$.

f decrece en $(-2, 2)$.

b) $f(x) = \dfrac{x^2 - 4}{x} \;\rightarrow\; f'(x) = \dfrac{2x \cdot x - x^2 + 4}{x^2} = \dfrac{x^2 + 4}{x^2}$

$f'(x) = 0 \;\rightarrow\; \dfrac{x^2 + 4}{x^2} = 0$ No tiene solución.

f' es positiva para cualquier valor de x. f es creciente en todo su dominio: $\mathbb{R} - \{0\}$

13 **En la función** $\boldsymbol{y = \dfrac{x^2}{x^2 - 4x + 3}}$ **estudia:**

a) Las asíntotas y la posición de la curva con respecto a ellas.

b) Los máximos y los mínimos relativos.

c) Representa su gráfica.

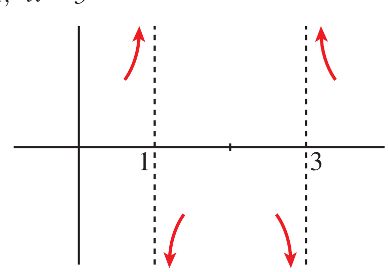
Resolución

$$y = \frac{x^2}{x^2 - 4x + 3}$$

a) • Asíntotas verticales: $x^2 - 4x + 3 = 0 \;\rightarrow\; x = 1,\;\; x = 3$

Posición de $x = 1$ $\begin{cases} \displaystyle\lim_{x \to 1^-} \frac{x^2}{x^2 - 4x + 3} = +\infty \\ \displaystyle\lim_{x \to 1^+} \frac{x^2}{x^2 - 4x + 3} = -\infty \end{cases}$

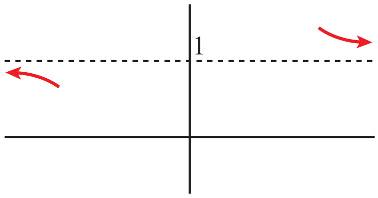
Posición de $x = 3$ $\begin{cases} x \to 3^- \quad f(x) \to -\infty \\ x \to 3^+ \quad f(x) \to +\infty \end{cases}$



- Asíntota horizontal:

$$\lim_{x \to \pm\infty} \frac{x^2}{x^2 - 4x + 3} = 1 \;\rightarrow\; y = 1$$

Posición: $\begin{cases} x \to +\infty & f(x) > 1 \\ x \to -\infty & f(x) < 1 \end{cases}$



b) Máximos y mínimos:

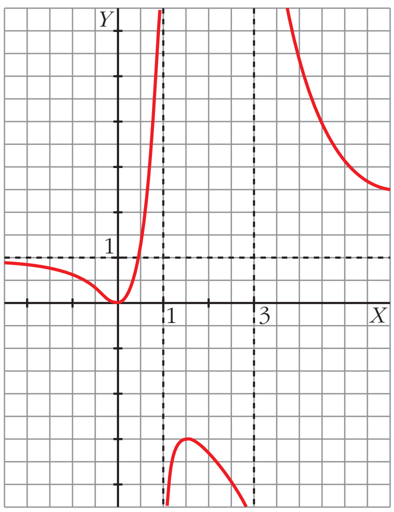
$$f'(x) = \frac{2x(x^2 - 4x + 3) - x^2(2x - 4)}{(x^2 - 4x + 3)^2} = \frac{-4x^2 + 6x}{(x^2 - 4x + 3)^2}$$

$$f'(x) = 0 \;\rightarrow\; -4x^2 + 6x = 0$$

$x = 0 \;\rightarrow\; f(0) = 0 \;\rightarrow\; P(0, 0)$ es mínimo relativo.

$x = \dfrac{3}{2} \;\rightarrow\; f\left(\dfrac{3}{2}\right) = -3 \;\rightarrow\; Q\left(\dfrac{3}{2}, -3\right)$ es máximo relativo.

c)



14 **¿Cuál de estas funciones tiene asíntota oblicua?**

a) $y = \dfrac{2x^2 - x^3}{x - 1}$ **b)** $y = 1 + \dfrac{3}{x}$ **c)** $y = \dfrac{4 + 2x^2}{x}$

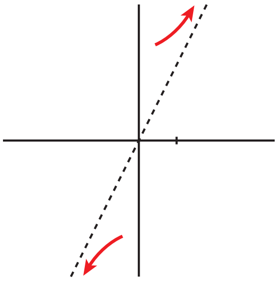
Hállala y sitúa la curva con respecto a ella.

Resolución

Tiene asíntota oblicua $y = \dfrac{4 + 2x^2}{x} = \dfrac{4}{x} + 2x.$

La asíntota es $y = 2x.$

Posición: $\begin{cases} x \to +\infty & \text{curva} > \text{asíntota} \\ x \to -\infty & \text{curva} < \text{asíntota} \end{cases}$



15 Calcula *a* y *b* de modo que la función $y = x^3 + ax + b$ tenga un punto singular en (2, 1).

Resolución

Si $y = x^3 + ax + b$ tiene un punto singular en (2, 1), la curva pasa por ese punto y su derivada es igual a 0 en él.

$(2, 1) \in (x, f(x)) \rightarrow 1 = 2^3 + a \cdot 2 + b \rightarrow 2a + b = -7$

$f'(x) = 0$ en $x = 2 \rightarrow f'(x) = 3x^2 + a \rightarrow 0 = 3 \cdot 2^2 + a \rightarrow 12 + a = 0$

$$\left\{\begin{array}{l} 2a + b = -7 \\ 12 + a = 0 \end{array}\right. \rightarrow a = -12, \quad b = 17$$

La función es $y = x^3 - 12x + 17$.