

Funciones y sus gráficas

El concepto de función es de suma importancia en la matemática moderna, debido a esto vamos a estudiar este tema de una manera un poco detallada.

Dos conjuntos de números, por ejemplo, pueden estar relacionados de varias maneras mediante alguna regla o fórmula determinada; empero nos interesa una forma particular de relación entre dichos conjuntos, la cual recibe el nombre de *función*.

Definición de función:

Si a cada elemento de un conjunto A se le hace corresponder, mediante una regla o fórmula, un elemento y sólo uno de otro conjunto B , dicha correspondencia se denomina *función*. El conjunto A se llama Dominio de la función y el conjunto B Contradominio (*codominio*) o Dominio de imágenes.

♦ Una función es pues un conjunto de pares ordenados (x, y) en donde no puede haber dos parejas distintas en que se repita el primer elemento.

♦ La notación utilizada para indicar que " f es una función de A en B " es la siguiente:

$$f: A \rightarrow B$$

Si $a \in A$, el elemento de B que le corresponde a a se llama *imagen* de a , se denota por $f(a)$ y se lee " f de a ".

♦ Ejemplo de funciones:

$$f(x) = 3x - 2 \quad (1)$$

$$g(x) = \sqrt{x^3 - 7} \quad (2)$$

La expresión de la función (1) indica que para hallar la imagen de un valor particular de x , debemos multiplicarlo por 3 y al resultado restarle 2 unidades. La fórmula de la (2) hace que a los valores de x se les eleve a la tercera potencia, al resultado se le resten 7 unidades y al total se le saque la raíz cuadrada. En la práctica lo que debemos hacer para hallar el valor correspondiente de la función para una x determinada (que pertenece al dominio de la función) es reemplazar en la expresión la x por el valor particular asignado y efectuar las operaciones indicadas. Calculemos, por ejemplo, la imagen para x igual a 2 en las funciones (1) y (2):

$$f(2) = 3(2) - 2 = 6 - 2;$$

∴ $f(2) = 4$: " f de dos es igual a cuatro".

$$g(2) = \sqrt{2^3 - 7} = \sqrt{8 - 7} = \sqrt{1};$$

∴ $g(2) = 1$: " g de dos es igual a uno".

♦ Otra notación adecuada para establecer el conjunto de pares ordenados de una función es:

$$f = \{(x, y) \mid y = f(x)\}$$

A x y y se les llama *variables*, a la x : variable independiente y a la y : variable dependiente. La razón de ello es que a la x se le puede asignar valores arbitrarios (siempre y cuando pertenezcan al dominio de la función); mientras que la y toma su valor dependiendo del asignado a x , y después de pasar por las operaciones que indican la fórmula de la función.

Como se puede colegir el dominio de una función es aquel conjunto de números que puede tomar la variable independiente. Si estamos trabajando con los números reales, por ejemplo, debemos tener en cuenta dos restricciones importantes: "la división por 0 no existe" y "la raíz de índice par de números negativos no está definida en los reales". El dominio de una función se halla, por lo general, de una forma analítica. Para hallar el contradominio de una función es aconsejable deducirlo observando la *gráfica* de dicha función.

Ejemplo ilustrativo:

Hallar el dominio de las siguientes funciones,

$$f(x) = \frac{x+2}{x^2+3x-4} \quad (3)$$

$$g(x) = \sqrt[4]{x+9} \quad (4)$$

Solución:

En la función (3) se tiene un cociente, por lo que:

$$x^2 + 3x - 4 \neq 0,$$

$$\Rightarrow (x+4)(x-1) \neq 0 \quad \{\text{factorizando}\},$$

$$\Rightarrow x \neq -4 \text{ y } x \neq 1;$$

$$\therefore \text{Dom}f = \mathbb{R} - \{-4, 1\}.$$

En la función (4) se tiene una raíz de índice par, 4, por lo que:

$$x+9 \geq 0,$$

$$\Rightarrow x \geq -9;$$

$$\therefore \text{Dom}g = [-9, \infty).$$

Gráfica de una función:

Es muy ilustrativo para observar el comportamiento de una función representarla gráficamente. A continuación se da la definición:

"Sea f una función, entonces la **gráfica** de f es el conjunto de todos los puntos (x, y) en \mathbb{R}^2 para los cuales (x, y) es un par ordenado en f ".

♦ La técnica para graficar una función depende en gran medida del tipo de función. Es conveniente hacer una tabla de valores donde estén representados los valores dados a x y los correspondientes hallados para y .

♦ Para estudiar algunos ejemplos de funciones y observar sus respectivas gráficas, haga clic en los enlaces del marco izquierdo "Ejemplos de funciones", "Funciones algebraicas", "Funciones trigonométricas"...

Álgebra de funciones:

Con las funciones también podemos realizar las operaciones de suma, resta, multiplicación, división y otras más (*composición de funciones*). Veamos:

Considerense las dos funciones f y g , la **suma** $f + g$, la **diferencia** $f - g$, el **producto** $f \cdot g$ y el **cociente** f / g se definen como sigue:

$$(i) \quad (f + g)(x) = f(x) + g(x)$$

$$(ii) \quad (f - g)(x) = f(x) - g(x)$$

$$(iii) \quad (f \cdot g)(x) = f(x) \cdot g(x)$$

$$(iv) \quad (f / g)(x) = f(x) / g(x)$$

El **dominio**, en cada caso, consiste en la intersección de los dominios de f y g ; y en el cociente f / g , $g(x) \neq 0$.

Composición de funciones:

Dadas las funciones f y g , la *función compuesta* denotada por $f \circ g$, se define como

$$(f \circ g)(x) = f(g(x))$$

El dominio de $f \circ g$ es el conjunto de todos x que pertenecen al *dom* g , tales que $g(x)$ está en el *dom* f .

♦ La función compuesta es la función de una función.

Ejemplo ilustrativo:

Ejercicios resueltos

1. Dada $f(x) = \sqrt{2x^2 + 1}$, encuentre

$$f(-2); f(0); f(1); f(11/9); f(2x^2 - 1); \frac{f(x+h) - f(x)}{h}, h \neq 0$$

En los ejercicios 1 y 2, se definen las funciones f y g . En cada ejercicio defina las siguientes funciones y determine el dominio de la función resultante:

(a) $f + g$; (b) $f - g$; (c) $f * g$; (d) f/g ; (e) g/f

2. $f(x) = x - 5$; $g(x) = x^2 - 1$

3. $f(x) = \frac{x+1}{x-1}$; $g(x) = \frac{1}{x}$

En los ejercicios 4 a 7, se definen las funciones f y g . En cada ejercicio defina las siguientes funciones y determine el dominio de la función compuesta:

(a) $f \circ g$, (b) $g \circ f$, (c) $f \circ f$, (d) $g \circ g$

4. $f(x) = x - 2$; $g(x) = x + 7$

5. $f(x) = x - 5$; $g(x) = x^2 - 1$

6. $f(x) = \sqrt{x-2}$; $g(x) = x^2 - 2$

7. $f(x) = \frac{1}{x}$; $g(x) = \sqrt{x}$

8. Se tiene $f(x) = 2x - 3$, defina las siguientes funciones y determine el dominio de la función resultante:

(a) $f(x^2)$, (b) $[f(x)]^2$, (c) $(f \circ f)(x)$

9. Determine si la función que se da es par, impar, o ninguna de las dos:

(a) $g(x) = 5x^2 - 4$ (b) $f(x) = x^3 + 1$ (c) $f(t) = 4t^5 + 3t^3 - 2t$

(d) $g(r) = \frac{r^2 - 1}{r^2 + 1}$ (e) $f(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x > 0 \\ -1 & \text{si } x < 0 \end{cases}$ (f) $h(x) = \frac{4x^2 - 5}{2x^3 + x}$

(g) $f(z) = (z - 1)^2$ (h) $g(x) = \frac{|x|}{x^2 + 1}$ (i) $g(x) = \sqrt{x^2 - 1}$

(j) $f(x) = \sqrt[3]{x}$

10. Sea $f(x) = \frac{1}{x+1}$ y $g(x) = \frac{1-x}{x}$

Muestre que f y g son funciones inversas.

11. Si $f(x) = x^2 + 2x + 2$,

encuentre dos funciones g para las cuales

$$(f \circ g)(x) = x^2 - 4x + 5$$

Dadas $f(x) = x^2 - 1$ y $g(x) = \sqrt{x+3}$, hallar $f \circ g$ y $g \circ f$ y determinar los dominios respectivos.

Solución:

$$(f \circ g)(x) = f(g(x)) = \sqrt{x+3}^2 - 1 = x + 3 - 1;$$

$$\therefore (f \circ g)(x) = x + 2$$

El $domg = [-3, \infty)$ y el $domf = (-\infty, \infty)$; por lo tanto $dom(f \circ g) = [-3, \infty)$.

$$(g \circ f)(x) = g(f(x)) = \sqrt{(x^2 - 1) + 3};$$

$$\therefore (g \circ f)(x) = \sqrt{x^2 + 2}$$

El $domf = (-\infty, \infty)$ y el $domg = [-3, \infty)$; por lo tanto $dom(g \circ f) = (-\infty, \infty)$.

Funciones inversas:

Si f y g son dos funciones tales que $f(g(x)) = g(f(x)) = x$, entonces f y g son funciones *inversas*.

Ejemplo ilustrativo:

Si $f(x) = x + 3$ y $g(x) = x - 3$, f y g son inversas púes,

$$f(g(x)) = (x - 3) + 3 = x \quad \text{y} \quad g(f(x)) = (x + 3) - 3 = x.$$

Funciones pares e impares:

Sea f una función tal que si x está en el dominio de f , $-x$ también lo está:

(i) f es una función par si $f(-x) = f(x)$, para toda x en el $domf$.

(ii) f es una función impar si $f(-x) = -f(x)$, para toda x en el $domf$.

- ♦ La gráfica de una función *par* es simétrica con respecto al eje y
- ♦ La gráfica de una función *impar* es simétrica con respecto al eje x .

Ejemplos ilustrativos:

$$f(x) = 2x^2 \text{ es una función par, pués } f(-x) = 2(-x)^2 = 2x^2 = f(x)$$

$$f(x) = 3x^3 \text{ es una función impar, pués } f(-x) = 3(-x)^3 = 3(-x^3) = -3x^3 = -f(x).$$

Funciones periódicas:

"Se dice que una función f con dominio D es periódica si existe un número real positivo k tal que $t + k$ está en D y $f(t + k) = f(t)$ para todo t en D . Geométricamente esto significa que la gráfica de f se repite cuando las abscisa de los puntos toman valores en intervalos sucesivos de amplitud k . Si existe un mínimo número real positivo k con esta propiedad, se dice entonces que k es el período de f ". Ejemplos de funciones periódicas son las funciones trigonométricas. Las funciones seno, coseno, cosecante y secante tienen período 2π , y la tangente y la cotangente tiene período π .

Soluciones

1. $f(x) = \sqrt{2x^2 + 1}$

Solución:

Para hallar el valor correspondiente de la función f para cada valor particular dado a la variable independiente x , se sustituye la x , en la fórmula dada, por el valor numérico asignado; y se efectúan las operaciones indicadas:

$$f(-2) = \sqrt{2(-2)^2 + 1} = \sqrt{2(4) + 1} = \sqrt{8 + 1} = \sqrt{9};$$

$$\therefore f(-2) = 3$$

$$f(0) = \sqrt{2(0)^2 + 1} = \sqrt{2(0) + 1} = \sqrt{0 + 1} = \sqrt{1};$$

$$\therefore f(0) = 1$$

$$f(1) = \sqrt{2(1)^2 + 1} = \sqrt{2(1) + 1} = \sqrt{2 + 1};$$

$$\therefore f(1) = \sqrt{3}$$

$$f(11/9) = \sqrt{2(11/9)^2 + 1} = \sqrt{2(121/81) + 1} = \sqrt{242/81 + 1} = \sqrt{323/81};$$

$$\therefore f(11/9) = \frac{\sqrt{323}}{9}$$

$$f(2x^2 - 1) = \sqrt{2(2x^2 - 1)^2 + 1} = \sqrt{2(4x^4 - 4x^2 + 1) + 1} = \sqrt{8x^4 - 8x^2 + 2 + 1};$$

$$\therefore f(2x^2 - 1) = \sqrt{8x^4 - 8x^2 + 2 + 1}$$

$$\frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \frac{\sqrt{2(x+h)^2 + 1} - \sqrt{2x^2 + 1}}{h} = \frac{\sqrt{2(x^2 + 2hx + h^2) + 1} - \sqrt{2x^2 + 1}}{h};$$

$$\therefore \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \frac{\sqrt{2x^2 + 4hx + 2h^2 + 1} - \sqrt{2x^2 + 1}}{h}$$

2. $f(x) = x - 5$; $g(x) = x^2 - 1$

Solución:

$$(f + g)(x) = f(x) + g(x) = (x - 5) + (x^2 - 1) = x - 5 + x^2 - 1;$$

$$\therefore (f + g)(x) = x^2 + x - 6; \text{ dom}(f + g) = \mathbb{R}.$$

$$(f - g)(x) = f(x) - g(x) = (x - 5) - (x^2 - 1) = x - 5 - x^2 + 1;$$

$$\therefore (f - g)(x) = -x^2 + x - 4; \text{ dom}(f - g) = \mathbb{R}.$$

$$(f \cdot g)(x) = f(x) \cdot g(x) = (x - 5)(x^2 - 1) = x^3 - x - 5x^2 + 5;$$

$$\therefore (f \cdot g)(x) = x^3 - 5x^2 - x + 5; \text{ dom}(f \cdot g) = \mathbb{R}.$$

$$(f / g)(x) = f(x) / g(x) = (x - 5) / (x^2 - 1);$$

$$\therefore (f / g)(x) = \frac{x - 5}{x^2 - 1}; \text{ dom}(f / g) = \mathbb{R} - \{-1, 1\}.$$

$$(g / f)(x) = g(x) / f(x) = (x^2 - 1) / (x - 5);$$

$$\therefore (g / f)(x) = \frac{x^2 - 1}{x - 5}; \text{ dom}(g / f) = \mathbb{R} - \{5\}.$$

3. $f(x) = \frac{x+1}{x-1}$; $g(x) = \frac{1}{x}$

Solución:

$$\text{dom}f = (-\infty, 1) \cup (1, \infty), \quad \text{dom}g = (-\infty, 0) \cup (0, \infty)$$

$$[(-\infty, 1) \cup (1, \infty)] \cap [(-\infty, 0) \cup (0, \infty)] = (-\infty, 0) \cup (0, 1) \cup (1, \infty) \Leftrightarrow \mathbb{R} - \{0, 1\}$$

$$(f + g)(x) = f(x) + g(x) = \frac{x+1}{x-1} + \frac{1}{x} = \frac{x^2 + x + x - 1}{x^2 - x};$$

$$\therefore (f + g)(x) = \frac{x^2 + 2x - 1}{x^2 - x}; \quad \text{dom}(f + g) = \mathbb{R} - \{0, 1\} \Leftrightarrow \{x \mid x \neq 0, x \neq 1\}.$$

$$(f - g)(x) = f(x) - g(x) = \frac{x+1}{x-1} - \frac{1}{x} = \frac{x^2 + x - x + 1}{x^2 - x};$$

$$\therefore (f - g)(x) = \frac{x^2 + 1}{x^2 - x}; \quad \text{dom}(f - g) = \mathbb{R} - \{0, 1\} \Leftrightarrow \{x \mid x \neq 0, x \neq 1\}.$$

$$(f \cdot g)(x) = f(x) \cdot g(x) = \left[\frac{x+1}{x-1} \right] \left[\frac{1}{x} \right];$$

$$\therefore (f \cdot g)(x) = \frac{x+1}{x^2 - x}; \quad \text{dom}(f \cdot g) = \mathbb{R} - \{0, 1\} \Leftrightarrow \{x \mid x \neq 0, x \neq 1\}.$$

$$(f / g)(x) = f(x) / g(x) = \frac{x+1}{x-1} \div \frac{1}{x} = \frac{x+1}{x-1} \times \frac{x}{1};$$

$$\therefore (f / g)(x) = \frac{x^2 + x}{x-1}; \quad \text{dom}(f / g) = \mathbb{R} - \{0, 1\} \Leftrightarrow \{x \mid x \neq 0, x \neq 1\}.$$

$$(g / f)(x) = g(x) / f(x) = \frac{1}{x} \div \frac{x+1}{x-1} = \frac{1}{x} \times \frac{x-1}{x+1};$$

$$\therefore (g / f)(x) = \frac{x-1}{x^2 + 1}; \quad \text{dom}(g / f) = \mathbb{R} - \{0, 1\} \Leftrightarrow \{x \mid x \neq 0, x \neq 1\}.$$

4. $f(x) = x - 2$; $g(x) = x + 7$

Solución:

(a) $(f \circ g)(x) = f(g(x)) = (x + 7) - 2 = x + 7 - 2$;

$\therefore (f \circ g)(x) = x + 5$; $\text{dom}(f \circ g) = \mathbb{R}$.

(b) $(g \circ f)(x) = g(f(x)) = (x - 2) + 7 = x - 2 + 7$;

$\therefore (g \circ f)(x) = x + 5$; $\text{dom}(g \circ f) = \mathbb{R}$.

(c) $(f \circ f)(x) = f(f(x)) = (x - 2) - 2 = x - 2 - 2$;

$\therefore (f \circ f)(x) = x - 4$; $\text{dom}(f \circ f) = \mathbb{R}$.

(d) $(g \circ g)(x) = g(g(x)) = (x + 7) + 7 = x + 7 + 7$;

$\therefore (g \circ g)(x) = x + 14$; $\text{dom}(g \circ g) = \mathbb{R}$.

5. $f(x) = x - 5$; $g(x) = x^2 - 1$

Solución:

$$(a) \quad (f \circ g)(x) = f(g(x)) = (x^2 - 1) - 5 = x^2 - 1 - 5,$$

$$\therefore (f \circ g)(x) = x^2 - 6; \text{ dom}(f \circ g) = \mathbb{R} \Leftrightarrow (-\infty, \infty).$$

$$(b) \quad (g \circ f)(x) = g(f(x)) = (x - 5)^2 - 1 = x^2 - 10x + 25 - 1,$$

$$\therefore (g \circ f)(x) = x^2 - 10x + 24; \text{ dom}(g \circ f) = \mathbb{R}.$$

$$(c) \quad (f \circ f)(x) = f(f(x)) = (x - 5) - 5 = x - 5 - 5;$$

$$\therefore (f \circ f)(x) = x - 10; \text{ dom}(f \circ f) = \mathbb{R}.$$

$$(d) \quad (g \circ g)(x) = g(g(x)) = (x^2 - 1)^2 - 1 = x^4 - 2x^2 + 1 - 1;$$

$$\therefore (g \circ g)(x) = x^4 - 2x^2; \text{ dom}(g \circ g) = \mathbb{R}.$$

$$6. \quad f(x) = \sqrt{x-2}; \quad g(x) = x^2 - 2$$

Solución:

Para hallar los dominios de las funciones compuestas, téngase en cuenta que "el dominio de $f \circ g$ es el conjunto de todos x que pertenecen al $\text{dom}g$, tales que $g(x)$ está en el $\text{dom}f$ ".

$$(a) \quad (f \circ g)(x) = f(g(x)) = \sqrt{(x^2 - 2) - 2} = \sqrt{x^2 - 4}.$$

$$\text{dom}g = (-\infty, \infty), \text{ dom}f = [2, \infty): \quad x^2 - 2 \geq 2 \Leftrightarrow x^2 - 4 \geq 0 \Leftrightarrow x \leq -2 \text{ ó } x \geq 2,$$
$$\Rightarrow \text{dom}(f \circ g) = (-\infty, -2] \cup [2, \infty)$$

$$\therefore (f \circ g)(x) = \sqrt{x^2 - 4}; \text{ dom}(f \circ g) = (-\infty, -2] \cup [2, \infty).$$

$$(b) \quad (g \circ f)(x) = g(f(x)) = \sqrt{x-2}^2 - 2 = x - 2 - 2 = x - 4$$

$$\text{dom}f = [2, \infty), \text{ dom}g = (-\infty, \infty): \quad \sqrt{x-2} \in (-\infty, \infty) \Leftrightarrow x > 2,$$
$$\Rightarrow \text{dom}(g \circ f) = [2, \infty);$$

$$\therefore (g \circ f)(x) = x - 4; \text{ dom}(g \circ f) = [2, \infty).$$

$$(c) \quad (f \circ f)(x) = f(f(x)) = \sqrt{\sqrt{x-2} - 2}$$

$$\text{dom}f = [2, \infty), \text{ dom}f = [2, \infty): \quad \sqrt{x-2} \geq 2 \Leftrightarrow x - 2 \geq 4 \Leftrightarrow x \geq 6,$$
$$\Rightarrow \text{dom}(f \circ f) = [6, \infty);$$

$$\therefore (f \circ f)(x) = \sqrt{\sqrt{x-2} - 2}; \text{ dom}(f \circ f) = [6, \infty).$$

$$(d) \quad (g \circ g)(x) = g(g(x)) = (x^2 - 2)^2 - 2 = x^4 - 4x^2 + 4 - 2;$$

$$\therefore (g \circ g)(x) = x^4 - 4x^2 + 2; \text{ dom}(g \circ g) = \mathbb{R}.$$

$$7. \quad f(x) = \frac{1}{x}; \quad g(x) = \sqrt{x}$$

Solución:

Para hallar los dominios de las funciones compuestas, téngase en cuenta que "el dominio de $f \circ g$ es el conjunto de todos x que pertenecen al $domg$, tales que $g(x)$ está en el $domf$ ".

$$(a) \quad (f \circ g)(x) = f(g(x)) = \frac{1}{\sqrt{x}}.$$

$$domg = [0, \infty), \quad domf = \mathbb{R} - \{0\}: \sqrt{x} \neq 0 \Leftrightarrow x \neq 0 \wedge x \geq 0,$$

$$\Rightarrow \quad dom(f \circ g) = (0, \infty)$$

$$\therefore \quad (f \circ g)(x) = \sqrt{x^2 - 4}; \quad dom(f \circ g) = (-\infty, -2] \cup [2, \infty).$$

$$(b) \quad (g \circ f)(x) = g(f(x)) = \sqrt{\frac{1}{x}}$$

$$domf = (-\infty, 0) \cap (0, \infty), \quad domg = [0, \infty): \frac{1}{x} > 0 \Leftrightarrow x > 0,$$

$$\Rightarrow \quad dom(g \circ f) = (0, \infty),$$

$$\therefore \quad (g \circ f)(x) = \sqrt{\frac{1}{x}}; \quad dom(g \circ f) = (0, \infty).$$

$$(c) \quad (f \circ f)(x) = f(f(x)) = \frac{1}{\frac{1}{x}} = x$$

$$\therefore \quad (f \circ f)(x) = x; \quad dom(f \circ f) = (-\infty, 0) \cup (0, \infty).$$

$$(d) \quad (g \circ g)(x) = g(g(x)) = \sqrt{\sqrt{x}} = \sqrt[4]{x};$$

$$\therefore \quad (g \circ g)(x) = \sqrt[4]{x}; \quad dom(g \circ g) = [0, \infty).$$

8. $f(x) = 2x - 3$

Solución:

$$(a) \quad f(x^2) = 2x^2 - 3; \quad domf(x^2) = \mathbb{R}$$

$$(b) \quad [f(x)]^2 = (2x - 3)^2 = 4x^2 - 12x + 9; \quad domf[f(x)]^2 = \mathbb{R}$$

$$(c) \quad (f \circ f)(x) = f(f(x)) = 2(2x - 3) - 3 = 4x - 6 - 3 = 4x - 9; \quad dom(f \circ f) = \mathbb{R}.$$

9. Solución:

- (a) $g(x) = 5x^2 - 4$
 $g(-x) = 5(-x)^2 - 4 = 5x^2 - 4$
 $g(-x) = g(x) = 5x^2 - 4$: g es una función par.
- (b) $f(x) = x^3 + 1$
 $f(-x) = (-x)^3 + 1 = -x^3 + 1 \neq f(x)$: f no es una función par
 $-f(x) = -(x^3 + 1) = -x^3 - 1 \neq f(-x)$: f no es una función impar
 f no es ni par ni impar.
- (c) $f(t) = 4t^5 + 3t^3 - 2t$
 $f(-t) = 4(-t)^5 + 3(-t)^3 - 2(-t) = -4t^5 - 3t^3 + 2t = -(4t^5 + 3t^3 - 2t)$
 $f(-t) = -f(t)$: f es una función impar
- (d) $g(r) = \frac{r^2 - 1}{r^2 + 1}$
 $g(-r) = \frac{(-r)^2 - 1}{(-r)^2 + 1} = \frac{r^2 - 1}{r^2 + 1}$
 $g(-r) = g(r) = \frac{r^2 - 1}{r^2 + 1}$: g es una función par.
- (e) $f(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x > 0 \\ -1 & \text{si } x < 0 \end{cases}$
 $f(-x) = \begin{cases} 1 & \text{si } -x > 0 \\ -1 & \text{si } -x < 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 1 & \text{si } x < 0 \\ -1 & \text{si } x > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -1 & \text{si } x > 0 \\ 1 & \text{si } x < 0 \end{cases} = -f(x)$
 $f(-x) = -f(x)$: f es una función impar
- (f) $h(x) = \frac{4x^2 - 5}{2x^3 + x}$
 $h(-x) = \frac{4(-x)^2 - 5}{2(-x)^3 + (-x)} = \frac{4x^2 - 5}{-2x^3 - x} = -\frac{4x^2 - 5}{2x^3 + x} = -h(x)$
 $h(-x) = -h(x)$: h es una función impar.
- (g) $f(z) = (z - 1)^2$
 $f(-z) = (-z - 1)^2 = (z + 1)^2 \neq f(z)$: f no es una función par
 $-f(z) = -(z - 1)^2 \neq f(-z)$: f no es una función impar
 f no es ni par ni impar.
- (h) $g(x) = \frac{|x|}{x^2 + 1}$
 $g(-x) = \frac{|-x|}{(-x)^2 + 1} = \frac{|x|}{x^2 + 1}$
 $g(-x) = g(x) = \frac{|x|}{x^2 + 1}$: g es una función par.
- (i) $g(x) = \sqrt{x^2 - 1}$
 $g(-x) = \sqrt{(-x)^2 - 1} = \sqrt{x^2 - 1}$
 $g(-x) = g(x) = \sqrt{x^2 - 1}$: g es una función par.
- (j) $f(x) = \sqrt[3]{x}$
 $f(-x) = \sqrt[3]{-x} = -\sqrt[3]{x}$
 $f(-x) = -f(x)$: f es una función impar

10. Solución:

$$f(x) = \frac{1}{x+1}, \quad g(x) = \frac{1-x}{x}$$

$$f(g(x)) = \frac{1}{\frac{1-x}{x} + 1} = \frac{1}{\frac{1-x+x}{x}} = \frac{1}{\frac{1}{x}} = x$$

$$g(f(x)) = \frac{1 - \frac{1}{x+1}}{\frac{1}{x+1}} = \frac{\frac{x+1-1}{x+1}}{\frac{1}{x+1}} = \frac{\frac{x}{x+1}}{\frac{1}{x+1}} = \frac{x}{1} = x$$

$$f(g(x)) = g(f(x)) = x;$$

∴ f y g son funciones *inversas*.

11. $f(x) = x^2 + 2x + 2$

Solución:

Encuentre dos funciones g para las cuales

$$(f \circ g)(x) = x^2 - 4x + 5$$

$$f(g(x)) = (g(x))^2 + 2(g(x) + 2) = x^2 - 4x + 5,$$

$$\Rightarrow (g(x))^2 + 2(g(x) - (x^2 - 4x + 3)) = 0,$$

$$\Rightarrow g(x) = \frac{-2 \pm \sqrt{2^2 + 4(x^2 - 4x + 3)}}{2} = \frac{-2 \pm \sqrt{4 + 4x^2 - 16x + 12}}{2},$$

$$\Rightarrow g(x) = \frac{-2 \pm \sqrt{4x^2 - 16x + 16}}{2} = \frac{-2 \pm 2\sqrt{x^2 - 4x + 4}}{2} = -1 \pm \sqrt{(x-2)^2},$$

$$\Rightarrow g(x) = -1 \pm (x-2);$$

$$\Rightarrow g(x) = -1 + x - 2 \quad \text{y} \quad g(x) = -1 - x + 2;$$

∴ Las funciones son $g(x) = x - 3$ y $g(x) = -x + 1$.