Examen de Matemáticas Ciencias Sociales I – 1º de Bachillerato

1. Simplifica las siguientes operaciones con potencias: **(1 punto)**

a) $\dfrac{\left(3a^2b^3\right)^4}{54a^6b^{10}}$ **b)** $\dfrac{\left(4x^3\left(y^5\right)^3\right)^3}{\left(2x^2\right)^4 y^6}$

2. Simplifica las siguientes expresiones con radicales: **(1 punto)**

a) $\sqrt{4\cdot\sqrt[3]{8\cdot\sqrt[4]{256}}}$ **b)** $\sqrt{24}+7\sqrt{6}-2\sqrt{486}$

3. Racionaliza y simplifica: **(1 punto)**

a) $\dfrac{a}{\sqrt[9]{a^5}}$ **b)** $\dfrac{3\sqrt{3}-2\sqrt{2}}{7\sqrt{2}-2\sqrt{3}}$

4. Aplica las propiedades de los logaritmos para simplificar las siguientes expresiones (el resultado de cada una de ellas debe ser un número real): **(1 punto)**

a) $\log_2 8\sqrt{8}$ **b)** $\log\left(\dfrac{0,01}{10^{-4}}\right)^3$

5. Realiza las siguientes divisiones utilizando la regla de Ruffini: **(2 puntos)**

a) $\left(-3x^4-12x^3-x-1\right):\left(x+4\right)$ **b)** $\left(2x^3-x^2+1\right):\left(2x-3\right)$

6. Factoriza los siguientes polinomios: **(2 puntos)**

a) $x^4-9x^2-4x+12$ **b)** $8x^3+14x^2-7x-6$

7. Resuelve las siguientes cuestiones:

a) Calcula el valor de k para que el polinomio $P(x)=2x^3-kx^2+6$ sea divisible por $x+1$. **(1 punto)**

b) Determinar el polinomio $P(x)=x^2+ax+b$, sabiendo que tiene por raíces $x=3$ y $x=5$. **(1 punto)**

Ejercicio para contestar voluntariamente:

8. Halla a y b para que el polinomio $A(x)=x^3+ax+b$ tenga como raíz doble $x=1$. **(2 puntos)**

1 a) $$\frac{(3a^2b^3)^4}{54a^6b^{10}} = \frac{3^4\cdot a^8\cdot b^{12}}{2\cdot 3^3\cdot a^6\cdot b^{10}} = \frac{3a^2b^2}{2}$$

b) $$\frac{\left(4x^3(y^5)^3\right)^3}{(2x^2)^4y^6} = \frac{\left(2^2x^3y^{15}\right)^3}{2^4\cdot x^8y^6} = \frac{2^6x^9y^{45}}{2^4x^8y^6} = 2^2xy^{39}$$

2 a) $$\sqrt{4\cdot\sqrt[3]{8\cdot\sqrt[4]{256}}} = \sqrt{2^2\cdot\sqrt[3]{2^3\cdot\sqrt[4]{2^8}}} = \sqrt{\sqrt[3]{2^6\cdot 2^3\sqrt[4]{2^8}}} =$$
$$= \sqrt{\sqrt[3]{2^9\cdot\sqrt[4]{2^8}}} = \sqrt{\sqrt[3]{\sqrt[4]{2^{36}\cdot 2^8}}} = \sqrt[24]{2^{44}} = 2\sqrt[24]{2^{20}} = 2\cdot\sqrt[6]{2^5}$$

b) $$\sqrt{24}+7\sqrt{6}-2\sqrt{486} = \sqrt{2^3\cdot 3}+7\sqrt{6}-2\sqrt{2\cdot 3^5} =$$
$$= 2\sqrt{6}+7\sqrt{6}-18\sqrt{6} = -9\sqrt{6}$$

3 a) $$\frac{a}{\sqrt[9]{a^5}} = \frac{a\sqrt[9]{a^4}}{\sqrt[9]{a^5}\sqrt[9]{a^4}} = \frac{a\sqrt[9]{a^4}}{\sqrt[9]{a^9}} = \frac{a\sqrt[9]{a^4}}{a} = \sqrt[9]{a^4}$$

b) $$\frac{3\sqrt{3}-2\sqrt{2}}{7\sqrt{2}-2\sqrt{3}} = \frac{(3\sqrt{3}-2\sqrt{2})(7\sqrt{2}+2\sqrt{3})}{(7\sqrt{2}-2\sqrt{3})(7\sqrt{2}+2\sqrt{3})} =$$
$$= \frac{21\sqrt{6}+18-28-4\sqrt{6}}{98-12} = \frac{17\sqrt{6}-10}{86}$$

4 a) $$\log_2 8\sqrt{8} = \log_2 2^3\cdot\sqrt{2^3} = \log_2 2^3\cdot 2^{3/2} = \log_2 2^{9/2} =$$
$$= \frac{9}{2}\log_2 2 = \frac{9}{2}.$$

b) $$\log\left(\frac{0'01}{10^{-4}}\right)^3 = \log\left(\frac{10^{-2}}{10^{-4}}\right)^3 = \log(10^2)^3 = \log 10^6 =$$
$$= 6\log 10 = 6$$

5 a) $$\begin{array}{r|rrrrr} & -3 & -12 & 0 & -1 & -1 \\ -4 & & 12 & 0 & 0 & 4 \\ \hline & -3 & 0 & 0 & -1 & \boxed{3} \end{array}$$

Cociente: $C(x) = -3x^3-1$
Resto: $R = 3$ $\Big\}\Rightarrow$

$$-3x^4-12x^3-x-1 = (x+4)(-3x^3-1)+3$$

b) Supongamos que $C(x)$ es el cociente y R es el resto. Entonces:

$$2x^3-x^2+1 = (2x-3)C(x)+R \Rightarrow x^3-\frac{1}{2}x^2+\frac{1}{2} = \left(x-\frac{3}{2}\right)C(x)+\frac{R}{2}$$

$$\begin{array}{r|rrrr} & 1 & -\frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \\ \frac{3}{2} & & \frac{3}{2} & \frac{3}{2} & \frac{9}{4} \\ \hline & 1 & 1 & \frac{3}{2} & \boxed{\frac{11}{4}} \end{array}$$

Cociente: $C(x) = x^2+x+\frac{3}{2}$
Resto: $R = 2\cdot\frac{11}{4} = \frac{22}{4} = \frac{11}{2}$ $\Big\}\Rightarrow$

$$2x^3-x^2+1 = (2x-3)\left(x^2+x+\frac{3}{2}\right)+\frac{11}{2}$$

6) a) $x=1$ es raíz pues $1^4-9\cdot1^2-4\cdot1+12=1-9-4+12=0$

$$\begin{array}{r|rrrrr} & 1 & 0 & -9 & -4 & 12 \\ 1 & & 1 & 1 & -8 & -12 \\ \hline & 1 & 1 & -8 & -12 & \boxed{0} \end{array} \Rightarrow x^4-9x^2-4x+12=(x-1)(x^3+x^2-8x-12)$$

$x=1$ no vuelve a ser raíz pues $1^3+1^2-8\cdot1-12=1+1-8-12\neq0$

Pero sí lo es $x=3$ ya que $3^3+3^2-8\cdot3-12=27+9-24-12=0$

$$\begin{array}{r|rrrr} & 1 & 1 & -8 & -12 \\ 3 & & 3 & 12 & 12 \\ \hline & 1 & 4 & 4 & \boxed{0} \end{array} \Rightarrow x^4-9x^2-4x+12=(x-1)(x^3+x^2-8x-12)=$$
$$=(x-1)(x-3)(x^2+4x+4)$$

Resolvamos por último la ecuación $x^2+4x+4=0\Rightarrow$

$\Rightarrow x=\dfrac{-4\pm\sqrt{16-16}}{2}=\dfrac{-4\pm0}{2}=-2$ (raíz doble). Veámoslo:

$$\begin{array}{r|rrr} & 1 & 4 & 4 \\ -2 & & -2 & -4 \\ \hline & 1 & 2 & \boxed{0} \\ -2 & & -2 & \\ \hline & 1 & \boxed{0} & \end{array} \Rightarrow x^4-9x^2-4x+12=(x-1)(x^3+x^2-8x-12)=$$
$$=(x-1)(x-3)(x^2+4x+4)=\underline{\underline{(x-1)(x-3)(x+2)^2}}$$

b) $x=-2$ es raíz:

$$\begin{array}{r|rrrr} & 8 & 14 & -7 & -6 \\ -2 & & -16 & 4 & 6 \\ \hline & 8 & -2 & -3 & \boxed{0} \\ \frac{3}{4} & & 6 & 3 & \\ \hline & 8 & 4 & \boxed{0} & \\ -\frac{1}{2} & & -4 & & \\ \hline & 8 & \boxed{0} & & \end{array}$$

$\Rightarrow 8x^3+14x^2-7x-6=(x+2)(8x^2-2x-3)$

Resolvamos la ecuación $8x^2-2x-3=0$

$\Rightarrow x=\dfrac{2\pm\sqrt{4-(-96)}}{16}=\dfrac{2\pm10}{16}=\begin{cases}\dfrac{12}{16}=\dfrac{3}{4}\\[2mm] -\dfrac{8}{16}=-\dfrac{1}{2}\end{cases}$

Por tanto: $8x^3+14x^2-7x-6=(x+2)(8x^2-2x-3)=$
$=\underline{\underline{8(x+2)\left(x-\frac{3}{4}\right)\left(x+\frac{1}{2}\right)}}=\underline{\underline{(x+2)(4x-3)(2x+1)}}$

7) a) $P(-1)=0\Rightarrow 2(-1)^3-k(-1)^2+6=0\Rightarrow -2-k+6=0$
$\Rightarrow -k+4=0\Rightarrow \underline{\underline{k=4}}$

b) $\left.\begin{array}{l} P(3)=0\Rightarrow 9+3a+b=0 \\ P(5)=0\Rightarrow 25+5a+b=0\end{array}\right\}$ Resolviendo el sistema

se tiene $a=-8$ y $b=15\Rightarrow \underline{\underline{P(x)=x^2-8x+15}}$

o

8) Por un lado $A(1)=0\Rightarrow \underbrace{1+a+b=0}_{(*)}$; o lo que es lo mismo

$$\left.\begin{array}{r|rrrr} & 1 & 0 & a & b \\ 1 & & 1 & 1 & a+1 \\ \hline & 1 & 1 & a+1 & \boxed{a+1+b=0} \end{array}\right\} \Rightarrow x^3+ax+b=(x-1)(x^2+x+a+1) \quad (*)$$

Como $x=1$ es raíz doble, debe de ser raíz, por otro lado, de $x^2+x+a+1$ $\quad 1^2+1+a+1=0\Rightarrow a+3=0$; o lo que es igual

$$\begin{array}{r|rrr} & 1 & 1 & a+1 \\ 1 & & 1 & 2 \\ \hline & 1 & 2 & \boxed{a+3=0} \end{array} \Rightarrow \underline{\underline{a=-3}}$$

Sustituyendo en $(*)$
$-3+1+b=0\Rightarrow -2+b=0$
$\Rightarrow \underline{\underline{b=2}}$