2 Matemática financiera

EJERCICIOS PROPUESTOS

1 a 5. Ejercicios resueltos.

6. Halla el valor de los siguientes logaritmos.

a) $\log_2 \sqrt[3]{2}$ c) $\log_{0,001} 10^6$ e) $\log_{\frac{1}{4}} \sqrt[4]{8}$ g) $\log_{\sqrt{e}} e$ i) $\log_7 49^{-1}$

b) $\log \sqrt{10}$ d) $\ln \sqrt[3]{e}$ f) $\log_5 25^3$ h) $\log_5 0,2$

a) $\log_2 \sqrt[3]{2} = x \Rightarrow 2^x = \sqrt[3]{2} = 2^{\frac{1}{3}} \Rightarrow x = \dfrac{1}{3}$

b) $\log \sqrt{10} = x \Rightarrow 10^x = \sqrt{10} = 10^{\frac{1}{2}} \Rightarrow x = \dfrac{1}{2}$

c) $\log_{0,001} 10^6 = x \Rightarrow 0,001^x = 10^6 \Rightarrow 10^{-3x} = 10^6 \Rightarrow -3x = 6 \Rightarrow x = -2$

d) $\ln \sqrt[3]{e} = x \Rightarrow e^x = \sqrt[3]{e} = e^{\frac{1}{3}} \Rightarrow x = \dfrac{1}{3}$

e) $\log_{\frac{1}{4}} \sqrt[4]{8} = x \Rightarrow \left(\dfrac{1}{4}\right)^x = \sqrt[4]{8} \Rightarrow 4^{-x} = 8^{\frac{1}{4}} \Rightarrow 2^{-2x} = 2^{\frac{3}{4}} \Rightarrow -2x = \dfrac{3}{4} \Rightarrow x = -\dfrac{3}{8}$

f) $\log_5 25^3 = x \Rightarrow 5^x = 25^3 = 5^6 \Rightarrow x = 6$

g) $\log_{\sqrt{e}} e = x \Rightarrow \left(\sqrt{e}\right)^x = e \Rightarrow e^{\frac{x}{2}} = e \Rightarrow \dfrac{x}{2} = 1 \Rightarrow x = 2$

h) $\log_5 0,2 = x \Rightarrow 5^x = 0,2 = \dfrac{1}{5} = 5^{-1} \Rightarrow x = -1$

i) $\log_7 49^{-1} = x \Rightarrow 7^x = 49^{-1} = \left(7^2\right)^{-1} = 7^{-2} \Rightarrow x = -2$

7. Halla el valor de *x* en las siguientes expresiones.

a) $\log_7 x = 3$ b) $\log_x \dfrac{1}{7} = -3$ c) $\log_{\frac{1}{7}} x = 3$ d) $\log_x 7 = 3$

a) $\log_7 x = 3 \Rightarrow 7^3 = x \Rightarrow x = 343$

c) $\log_{\frac{1}{7}} x = 3 \Rightarrow \left(\dfrac{1}{7}\right)^3 = x \Rightarrow x = \dfrac{1}{343}$

b) $\log_x \dfrac{1}{7} = -3 \Rightarrow x^{-3} = \dfrac{1}{7} \Rightarrow x^3 = 7 \Rightarrow x = \sqrt[3]{7}$

d) $\log_x 7 = 3 \Rightarrow x^3 = 7 \Rightarrow x = \sqrt[3]{7}$

8. Toma logaritmos en la expresión: $T = \dfrac{2x^2y^3}{z^2}$.

$$T = \frac{2x^2y^3}{z^2} \Rightarrow \log T = \log\left(\frac{2x^2y^3}{z^2}\right) = \log\left(2x^2y^3\right) - \log\left(z^2\right) = \log 2 + 2\log x + 3\log y - 2\log z$$

9. Considerando log 2 = 0,301 y log 3 = 0,477, calcula:

a) log 12 **b)** log 15 **c)** $\log\frac{1}{144}$

a) $\log 12 = \log\left(2^2 \cdot 3\right) = 2\log 2 + \log 3 = 2 \cdot 0,301 + 0,477 = 1,079$

b) $\log 15 = \log\left(\frac{3 \cdot 10}{2}\right) = \log 3 + \log 10 - \log 2 = 0,477 + 1 - 0,301 = 1,176$

c) $\log\frac{1}{144} = \log\frac{1}{2^4 \cdot 3^2} = \log 1 - 4\log 2 - 2\log 3 = 0 - 4 \cdot 0,301 - 2 \cdot 0,477 = -2,158$

10. Halla con la calculadora los siguientes logaritmos y exprésalos redondeando a las milésimas.

a) $\log_3 21$ **b)** $\log_{0,01} 12$ **c)** $\log_{\sqrt{3}} 19$

a) $\log_3 21 = \frac{\log 21}{\log 3} = 2,771$ **b)** $\log_{0,01} 12 = \frac{\log 12}{\log 0,01} = -0,540$ **c)** $\log_{\sqrt{3}} 19 = \frac{\log 19}{\log\sqrt{3}} = 5,360$

11 a 13. Ejercicios resueltos.

14. El precio de la vivienda subió durante el año pasado un 7% y durante este ha bajado un 2,5 %. ¿Cuánto cuesta hoy una casa que hace dos años costaba 210 000 €? ¿Cuánto costaba hace dos años una casa que hoy cuesta 208 650 €?

Una casa que hace dos años costaba 210 000 €, ahora cuesta 210 000 · 1,07 · 0,975 = 219 082,50 €.

Una casa que ahora cuesta 208 650 €, hace dos años costaba $\frac{208\,650}{1,07 \cdot 0,975} = 200\,000$ €.

15. ¿Qué porcentaje representan las 42 mujeres asistentes a un congreso si el total de asistentes es de 96? ¿Cuántas mujeres más tendrían que asistir para igualar los porcentajes de ambos sexos? ¿Y para que el porcentaje de mujeres sea del 60%?

Si x % es el porcentaje de mujeres tenemos $96 \cdot \frac{x}{100} = 42 \Rightarrow 0,96x = 42 \Rightarrow x = 43,75$, es decir, las 42 mujeres representan el 43,75 % de los asistentes.

Para igualar el porcentaje de hombres y mujeres deberían asistir el mismo número de hombres que de mujeres. Teniendo en cuenta que asisten 54 hombres, deberían asistir 12 mujeres más para igualar los porcentajes.

Llamemos a al número de mujeres que deberían asistir para que el porcentaje de mujeres sea del 60%. Como asisten 54 hombres, tendríamos $(a+54) \cdot \frac{60}{100} = a \Rightarrow 0,6(a+54) = a \Rightarrow 0,4a = 32,4 \Rightarrow a = 81$. Es decir, deberían asistir 39 mujeres más.

16. Ejercicio resuelto.

17. **a)** Escribe, redondeando a las centésimas, los cuatro primeros términos de una progresión geométrica en la que el quinto término es 15 953,52, y la razón, 1,05.

b) Escribe el término general de la progresión.

c) Calcula la suma de los 10 primeros términos.

a) $a_1 = 13\,125$; $a_2 = 13\,781,25$; $a_3 = 14\,470,31$; $a_4 = 15\,193,83$

b) $a_n = 13125 \cdot 1{,}05^{n-1}$

c) $S_{10} = \dfrac{a_1\left(r^{10}-1\right)}{r-1} = \dfrac{13125 \cdot \left(1{,}05^{10}-1\right)}{0{,}05} = 165\,084{,}84$

18. Halla la razón, el séptimo término y la suma de los 10 primeros términos de las siguientes progresiones geométricas:

a) $2, -1, \frac{1}{2}, -\frac{1}{4}, \frac{1}{8}\ldots$

b) $20, 20(1+r), 20(1+r)^2\ldots$

a) $r = -\dfrac{1}{2}$ $\quad a_7 = 2\left(-\dfrac{1}{2}\right)^6 = \dfrac{1}{32}$ $\quad S_{10} = \dfrac{2\left(\left(-\frac{1}{2}\right)^{10}-1\right)}{-\frac{1}{2}-1} = \dfrac{\frac{1}{512}-2}{-\frac{3}{2}} = \dfrac{341}{256}$

b) Razón: $1+r$ $\quad a_7 = 20(1+r)^6$ $\quad S_{10} = \dfrac{20\left((1+r)^{10}-1\right)}{r}$

19. Dada la progresión geométrica de primer término 120 y de tercer término 126,075:

a) Calcula la razón y determina su término general.

b) Calcula la suma de sus diez primeros términos.

c) ¿Cuántos términos se han sumado si el resultado de dicha suma es 1982,27?

a) Razón: $a_3 = a_1 r^2 \Rightarrow 126{,}075 = 120 \cdot r^2 \Rightarrow r = \sqrt{\dfrac{126{,}075}{120}} = 1{,}025$ $\qquad$ Término general: $a_n = 120 \cdot 1{,}025^{n-1}$

b) $S_{10} = \dfrac{120 \cdot \left(1{,}025^{10}-1\right)}{0{,}025} = 1344{,}406$

c) $S_n = \dfrac{120 \cdot \left(1{,}025^{n}-1\right)}{0{,}025} = 1982{,}27 \Rightarrow 1{,}025^n = 1{,}413 \Rightarrow n \log 1{,}025 = \log 1{,}413 \Rightarrow n = \dfrac{\log 1{,}413}{\log 1{,}025} = 14$

20. Ejercicio interactivo.

21 y 22. Ejercicios resueltos.

23. Calcula los intereses que generarán 4500 € depositados a un interés simple del 6 % durante:

a) Dos años $\quad$ **b)** Dos años y medio $\quad$ **c)** Tres años

a) $I = C_i r t = 4500 \cdot 0{,}06 \cdot 2 = 540$ €

b) $I = C_i r t = 4500 \cdot 0{,}06 \cdot 2{,}5 = 675$ €

c) $I = C_i r t = 4500 \cdot 0{,}06 \cdot 3 = 810$ €

24. Halla el capital inicial que colocado a un interés simple del 5% durante 3 años genera un capital final de 3162,5 €.

Los datos son: $C_f = 3162,5$ € $t = 5$ años $r = 0,05$

$$C_f = C_i(1+rt) \Rightarrow C_i = \frac{C_f}{1+rt} = \frac{3162,5}{1+0,05\cdot 3} = 2750 \text{ €}$$

25. Un capital de 6500 € se quiere aumentar en un 20%. Para ello se coloca a interés simple del 4% anual. ¿Cuánto tiempo debe permanecer depositado este capital?

Los datos son: $C_i = 6500$ € $C_f = 6500\cdot 1,20 = 7800$ € $I = C_f - C_i = 1300$ € $r = 0,04$

$$I = C_i rt \Rightarrow t = \frac{I}{C_i r} = \frac{1300}{6500\cdot 0,04} = 5 \text{ años}$$

26. ¿A qué interés se han colocado 8000 € que durante 3 años han generado 90 € de intereses trimestrales?

Los datos son: $C_i = 8000$ € $t = 3$ años $I = 90\cdot 4 = 360$ €

$$I = C_i rt \Rightarrow r = \frac{I}{C_i t} = \frac{360}{8000\cdot 3} = 0,015 = 1,5 \text{ \% anual.}$$

27 y 28. Ejercicios resueltos.

29. Un capital colocado al 4,25 % anual de interés compuesto se ha convertido en seis años en 6418,39 €. ¿De qué capital inicial se trata?

Los datos son: $C_f = 6418,39$ € $t = 6$ años $r = 0,0425$

$$C_f = C_i(1+r)^t \Rightarrow C_i = \frac{C_f}{(1+r)^t} = \frac{6418,39}{(1+0,0425)^6} = 5000 \text{ €}$$

30. Se depositan 2500 € a un interés compuesto del 3,75% anual durante 2 años. Calcula el capital final si el período de capitalización es cada seis meses.

Los datos son: $C_i = 2500$ € $r = 0,0375$ $t = 2$ años Período de capitalización: semestral ($k = 2$)

$$C_f = C_i\left(1+\frac{r}{k}\right)^{kt} = 2500\left(1+\frac{0,0375}{2}\right)^4 = 2692,84 \text{ €}$$

31 y 32. Ejercicios resueltos.

33. Calcula el capital con el que se contará al final de una operación financiera que consiste en ingresar 300 € al trimestre, durante 16 años y a un tipo de interés del 6,25 %.

Los datos son: $a = 300$ € $r = 0,0625$ $t = 16$ años Período de capitalización: trimestral ($k = 4$)

$$C = \frac{a\left(1+\frac{r}{k}\right)\left[\left(1+\frac{r}{k}\right)^{kt}-1\right]}{\frac{r}{k}} = \frac{300\left(1+\frac{0,0625}{4}\right)\left[\left(1+\frac{0,0625}{4}\right)^{4\cdot 16}-1\right]}{\frac{0,0625}{4}} = 33098,23 \text{ €}$$

34. ¿Durante cuántos años se deberán ingresar anualidades de 3500 € para que, a un interés del 8%, se consiga juntar el 12 % del precio de una vivienda que se estima será de 265 000 €?

Los datos son: $a = 3500$ € $r = 0{,}08$ $C = 0{,}12 \cdot 265\,000 = 31800$ €.

$$C = \frac{a(1+r)\left[(1+r)^t - 1\right]}{r} \Rightarrow 31800 = \frac{3500 \cdot 1{,}08 \cdot \left[1{,}08^t - 1\right]}{0{,}08} \Rightarrow 1{,}08^t = \frac{31800 \cdot 0{,}08}{3500 \cdot 1{,}08} + 1 = 1{,}673 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \log 1{,}08^t = \log 1{,}673 \Rightarrow t \log 1{,}08 = \log 1{,}673 \Rightarrow t = \frac{\log 1{,}673}{\log 1{,}08} = 6{,}69 \text{ años}$$

Es decir, habrá que ingresar anualidades durante 7 años.

35. Ejercicio resuelto.

36. Una entidad bancaria ofrece dos posibilidades para un préstamo de 6000 €. La modalidad *A* consiste en un préstamo a 5 años con cuotas semestrales y a un interés del 8 %. La modalidad *B* consiste en pagar una cuota fija de 1300 € durante los 5 años. ¿Cuál de las dos es mejor?

Modalidad *A*: $C = 6000$ € $r = 0{,}08$ $t = 5$ años Pago: Semestral ($k = 2$)

$$a = \frac{C\frac{r}{k}\left(1+\frac{r}{k}\right)^{kt}}{\left(1+\frac{r}{k}\right)^{kt} - 1} = \frac{6000 \cdot \frac{0{,}08}{2} \cdot \left(1+\frac{0{,}08}{2}\right)^{10}}{\left(1+\frac{0{,}08}{2}\right)^{10} - 1} = 739{,}75 \text{ €}$$

Con esta modalidad pagamos al banco un total de 739,75 · 10 = 7397,50 €.

Modalidad *B*: Con esta modalidad pagamos al banco un total de 1300 · 5= 6500€.

Es mejor la modalidad *B*.

37. Un banco nos presta el dinero al 7 % para un crédito a 10 años pagadero trimestralmente. ¿Cuál es la cantidad máxima que podemos pedir si no queremos pagar más de 600 € trimestrales? ¿Y si se hacen los pagos cuatrimestrales sin superar los 500 € en cada pago?

En el primer caso: $a = 600$ € $r = 0{,}07$ $t = 10$ años Pago: Trimestral ($k = 4$)

$$a = \frac{C\frac{r}{k}\left(1+\frac{r}{k}\right)^{kt}}{\left(1+\frac{r}{k}\right)^{kt} - 1} \Rightarrow C = \frac{a\left[\left(1+\frac{r}{k}\right)^{kt} - 1\right]}{\frac{r}{k}\left(1+\frac{r}{k}\right)^{kt}} = \frac{600\left[\left(1+\frac{0{,}07}{4}\right)^{4\cdot 10} - 1\right]}{\frac{0{,}07}{4}\left(1+\frac{0{,}07}{4}\right)^{4\cdot 10}} = 17\,156{,}54 \text{ €}$$

En el segundo caso: $a = 500$ € $r = 0{,}07$ $t = 10$ años Pago: Cuatrimestral ($k = 3$)

$$a = \frac{C\frac{r}{k}\left(1+\frac{r}{k}\right)^{kt}}{\left(1+\frac{r}{k}\right)^{kt} - 1} \Rightarrow C = \frac{a\left[\left(1+\frac{r}{k}\right)^{kt} - 1\right]}{\frac{r}{k}\left(1+\frac{r}{k}\right)^{kt}} = \frac{500\left[\left(1+\frac{0{,}07}{3}\right)^{3\cdot 10} - 1\right]}{\frac{0{,}07}{3}\left(1+\frac{0{,}07}{3}\right)^{3\cdot 10}} = 10\,701{,}54 \text{ €}$$

38. Calcula la TAE correspondiente a un 4% anual con capitalización:

a) Mensual **b)** Trimestral **c)** Semestral

a) $\text{TAE} = \left[\left(1+\frac{r}{k}\right)^k - 1\right]\cdot 100 = \left[\left(1+\frac{0,04}{12}\right)^{12} - 1\right]\cdot 100 = 4,0742\ \%$

b) $\text{TAE} = \left[\left(1+\frac{0,04}{4}\right)^4 - 1\right]\cdot 100 = 4,0604\ \%$

c) $\text{TAE} = \left[\left(1+\frac{0,04}{2}\right)^2 - 1\right]\cdot 100 = 4,04\ \%$

39. Calcula el IDH de Grecia en el año 2012 si los valores asignados para los indicadores son:

***IEV*= 0,947** ***IE*= 0,856** ***II*= 0,786**

$\text{IDH} = \sqrt[3]{IEV\cdot IE\cdot II} = \sqrt[3]{0,947\cdot 0,856\cdot 0,786} = 0,860$

40. Calcula los números índice correspondientes al PIB per cápita en un país, tomando como base 1980 y 2000.

Año	1980	1990	2000	2010
Renta per cápita ($)	9203	12 055	14 413	21 735

Año	1980	1990	2000	2010
Índice (base 1980)	100	130,99	156,61	236,17
Índice (base 2000)	63,85	83,64	100	150,8

41. Ejercicio interactivo.

42 a 52. Ejercicios resueltos.

EJERCICIOS

Logaritmos

53. Aplicando directamente la definición, calcula el valor de los siguientes logaritmos.

a) $\log_3 \frac{1}{27}$ **c)** $\log 10\,000$ **e)** $\log 0{,}001$ **g)** $\log_{\sqrt{8}}\left(2\sqrt{2}\right)$ **i)** $\log_{\sqrt{3}}\left(3\sqrt{3}\right)^2$

b) $\log_{\frac{1}{27}} \frac{1}{9}$ **d)** $\log \frac{1}{1000}$ **f)** $\log_{\frac{1}{9}} \sqrt{27}$ **h)** $\log_{\sqrt{3}}\left(\frac{1}{81}\right)$ **j)** $\ln\left(e\sqrt[3]{e}\right)$

a) $\log_3 \frac{1}{27} = x \Rightarrow 3^x = \frac{1}{27} = 3^{-3} \Rightarrow x = -3$

b) $\log_{\frac{1}{27}} \frac{1}{9} = x \Rightarrow \left(\frac{1}{27}\right)^x = \frac{1}{9} \Rightarrow 3^{-3x} = 3^{-2} \Rightarrow -3x = -2 \Rightarrow x = \frac{2}{3}$

c) $\log 10\,000 = x \Rightarrow 10^x = 10\,000 = 10^4 \Rightarrow x = 4$

d) $\log \frac{1}{1000} = x \Rightarrow 10^x = \frac{1}{1000} = 10^{-3} \Rightarrow x = -3$

e) $\log 0{,}001 = x \Rightarrow 10^x = 0{,}001 = 10^{-3} \Rightarrow x = -3$

f) $\log_{\frac{1}{9}} \sqrt{27} = x \Rightarrow \left(\frac{1}{9}\right)^x = \sqrt{27} \Rightarrow 3^{-2x} = 3^{\frac{3}{2}} \Rightarrow -2x = \frac{3}{2} \Rightarrow x = -\frac{3}{4}$

g) $\log_{\sqrt{8}}\left(2\sqrt{2}\right) = x \Rightarrow \sqrt{8}^x = 2\sqrt{2} \Rightarrow 2^{\frac{3x}{2}} = 2^{\frac{3}{2}} \Rightarrow \frac{3x}{2} = \frac{3}{2} \Rightarrow x = 1$

h) $\log_{\sqrt{3}}\left(\frac{1}{81}\right) = x \Rightarrow \sqrt{3}^x = \frac{1}{81} \Rightarrow 3^{\frac{x}{2}} = 3^{-4} \Rightarrow \frac{x}{2} = -4 \Rightarrow x = -8$

i) $\log_{\sqrt{3}}\left(3\sqrt{3}\right)^2 = x \Rightarrow \sqrt{3}^x = \left(3\sqrt{3}\right)^2 \Rightarrow 3^{\frac{x}{2}} = 3^3 \Rightarrow \frac{x}{2} = 3 \Rightarrow x = 6$

j) $\ln\left(e\sqrt[3]{e}\right) = x \Rightarrow e^x = e\sqrt[3]{e} = e^{\frac{4}{3}} \Rightarrow x = \frac{4}{3}$

54. Calcula el valor de *x* en cada una de las siguientes expresiones logarítmicas.

a) $\log_x 8 = -3$ **b)** $\log_3 x = -1$ **c)** $\log_{\frac{1}{\sqrt{3}}} x = -3$ **d)** $\log_{\frac{1}{a}} a^2 = x$

a) $\log_x 8 = -3 \Rightarrow x^{-3} = 8 = 2^3 = \left(\frac{1}{2}\right)^{-3} \Rightarrow x = \frac{1}{2}$

b) $\log_3 x = -1 \Rightarrow 3^{-1} = x \Rightarrow x = \frac{1}{3}$

c) $\log_{\frac{1}{\sqrt{3}}} x = -3 \Rightarrow \left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)^{-3} = x \Rightarrow x = \sqrt{3^3} = 3\sqrt{3}$

d) $\log_{\frac{1}{a}} a^2 = x \Rightarrow \left(\frac{1}{a}\right)^x = a^2 \Rightarrow a^{-x} = a^2 \Rightarrow x = -2$

55. Toma logaritmos decimales en las siguientes igualdades.

a) $P = 10x^3yz^3$ **b)** $Q = \dfrac{100x^2}{x+y}$ **c)** $R = \sqrt[3]{\dfrac{2x^2y^5}{3z^3}}$ **d)** $S^2 = \dfrac{1+x^3}{xy^2z^{-3}}$

a) $\log P = \log 10 + 3\log x + \log y + 3\log z = 1 + 3\log x + \log y + 3\log z$

b) $\log Q = \log 100 + 2\log x - \log(x+y) = 2 + 2\log x - \log(x+y)$

c) $\log R = \dfrac{\log 2 + 2\log x + 5\log y - \log 3 - 3\log z}{3}$

d) $2\log S = \log\left(1+x^3\right) - \log x - 2\log y + 3\log z$

56. Escribe el valor de *E* en cada uno de los siguientes casos. En las expresiones obtenidas no deben aparecer logaritmos.

a) $\log E = 3\log 2 - 4\log x + 3\log y - 2\log z$

b) $\log E = 3\log(x-2y) + \log(x+2y)$

c) $\log E = 3\log(x+10) - \log\dfrac{(2x+20)}{3} + \log\dfrac{3}{2}$

a) $\log E = 3\log 2 - 4\log x + 3\log y - 2\log z = \log\dfrac{2^3y^3}{x^4z^2} \Rightarrow E = \dfrac{8y^3}{x^4z^2}$

b) $\log E = 3\log(x-2y) + \log(x+2y) = \log\left[(x-2y)^3(x+2y)\right] \Rightarrow E = (x-2y)^3(x+2y)$

c) $\log E = 3\log(x+10) - \log\dfrac{(2x+20)}{3} + \log\dfrac{3}{2} = \log\dfrac{(x+10)^3\cdot\dfrac{3}{2}}{\dfrac{2x+20}{3}} = \log\dfrac{9(x+10)^3}{4(x+10)} = \log\dfrac{9(x+10)^2}{4} \Rightarrow E = \dfrac{9(x+10)^2}{4}$

57. Sabiendo que el logaritmo decimal de 2 es 0,301 y que el logaritmo decimal de 3 es 0,477, calcula, sin utilizar las teclas de funciones logarítmicas de la calculadora, los siguientes logaritmos.

a) log 250 **c)** $\log\sqrt{18}$ **e)** log 45

b) log 5,4 **d)** log 270 **f)** $\log\sqrt[3]{\sqrt{\dfrac{1}{6}}}$

a) $\log 250 = \log\dfrac{1000}{4} = \log 1000 - \log 4 = 3 - \log 2^2 = 3 - 2\log 2 = 3 - 2\cdot 0{,}301 = 2{,}398$

b) $\log 5{,}4 = \log\dfrac{54}{10} = \log 54 - \log 10 = \log 2\cdot 3^3 - 1 = \log 2 + 3\log 3 - 1 = 0{,}301 + 3\cdot 0{,}477 - 1 = 0{,}732$

c) $\log\sqrt{18} = \dfrac{1}{2}\log 2\cdot 3^2 = \dfrac{\log 2 + 2\log 3}{3} = \dfrac{0{,}301 + 2\cdot 0{,}477}{2} = 0{,}6275$

d) $\log 270 = \log(27\cdot 10) = \log 27 + \log 10 = \log 3^3 + 1 = 3\log 3 + 1 = 3\cdot 0{,}477 + 1 = 2{,}431$

e) $\log 45 = \log\dfrac{90}{2} = \log 90 - \log 2 = \log\left(3^2\cdot 10\right) - \log 2 = 2\log 3 + \log 10 - \log 2 = 2\cdot 0{,}477 + 1 - 0{,}301 = 1{,}653$

f) $\log\sqrt[3]{\sqrt{\dfrac{1}{6}}} = \log\sqrt[6]{\dfrac{1}{6}} = \dfrac{\log 1 - \log 6}{6} = \dfrac{0 - \log(2\cdot 3)}{6} = -\dfrac{\log 2 + \log 3}{6} = -\dfrac{0{,}301 + 0{,}477}{6} = -0{,}129$

58. Sabiendo que $\log_3 2 = 0,631$ y que $\log_3 5 = 1,465$, halla, sin utilizar la calculadora, el valor de $\log_3 150$.

$$\log_3 150 = \log_3\left(2\cdot 3\cdot 5^2\right) = \log_3 2 + \log_3 3 + 2\log_3 5 = 0,631 + 1 + 2\cdot 1,465 = 4,561$$

59. Con la ayuda de la calculadora, obtén aproximaciones decimales hasta las milésimas de los siguientes logaritmos.

a) $\log_3 20$ **b)** $\log_{\sqrt{2}} 3$ **c)** $\log_{\frac{1}{4}} \frac{7}{5}$ **d)** $\log_{\sqrt{2}} \sqrt{3}$

a) $\log_3 20 = \dfrac{\log 20}{\log 3} = 2,727$

c) $\log_{\frac{1}{4}} \dfrac{7}{5} = \dfrac{\log \frac{7}{5}}{\log \frac{1}{4}} = -0,243$

b) $\log_{\sqrt{2}} 3 = \dfrac{\log 3}{\log \sqrt{2}} = 3,170$

d) $\log_{\sqrt{2}} \sqrt{3} = \dfrac{\log \sqrt{3}}{\log \sqrt{2}} = 1,585$

60. Con la ayuda de los logaritmos, calcula el valor de *t* en los siguientes casos.

a) $1,025^t = 2,45$ **b)** $1,025^t = 2$ **c)** $2500 = 2000\cdot 1,03^t$ **d)** $120 = 100\left(1+\dfrac{0,03}{12}\right)^{12t}$

a) $1,025^t = 2,45 \Rightarrow t\log 1,025 = \log 2,45 \Rightarrow t = \dfrac{\log 2,45}{\log 1,025} = 36,29$

b) $1,025^t = 2 \Rightarrow t\log 1,025 = \log 2 \Rightarrow t = \dfrac{\log 2}{\log 1,025} = 28,07$

c) $2500 = 2000\cdot 1,03^t \Rightarrow 1,03^t = 1,25 \Rightarrow t\log 1,03 = \log 1,25 \Rightarrow t = \dfrac{\log 1,25}{\log 1,03} = 7,55$

d) $120 = 100\left(1+\dfrac{0,03}{12}\right)^{12t} \Rightarrow 1,2 = 1,0025^{12t} \Rightarrow 12t\log 1,0025 = \log 1,2 \Rightarrow t = \dfrac{\log 1,2}{12\cdot\log 1,0025} = 6,085$

Porcentajes

61. De una cantidad se sabe que el 22 % es 275. ¿Cuál es esa cantidad?

Si x es la cantidad buscada, tenemos: $0,22x = 275 \Rightarrow x = \dfrac{275}{0,22} = 1250$

62. ¿Qué porcentaje representan 26 unidades de un total de 48? ¿Y 90 unidades de un total de 48?

$\dfrac{26}{48}\cdot 100 = 54,17\ \%$

$\dfrac{90}{48}\cdot 100 = 187,5\ \%$

63. Aumenta las siguientes cantidades en los porcentajes que se indican.

a) 1350 en un 13%

b) 1250 en un 2,25%

c) 3500 en un 122%

d) 450 en un 200%

a) 1350 · 1,13 = 1525,5

b) 1250 · 1,0225 = 1278,125

c) 3500 · 2,22 = 7770

d) 450 · 3 = 1350

64. Disminuye las siguientes cantidades en los porcentajes que se indican.

a) 2650 en un 13 %

b) 3100 en un 2 %

c) 475 en un 20 %

d) 1025 en un 2,25 %

a) $2650 \cdot 0{,}87 = 2305{,}5$

b) $3100 \cdot 0{,}98 = 3038$

c) $475 \cdot 0{,}8 = 380$

d) $1025 \cdot 0{,}9775 = 1001{,}9375$

65. Una cantidad aumentada en un 21 % vale 1694. ¿Cuál es dicha cantidad?

Si x es la cantidad buscada, tenemos: $1{,}21x = 1694 \Rightarrow x = \dfrac{1694}{1{,}21} = 1400$

66. Una cantidad disminuida en un 12 % vale 22. ¿Cuál es dicha cantidad?

Si x es la cantidad buscada, tenemos: $0{,}88x = 22 \Rightarrow x = \dfrac{22}{0{,}88} = 25$

Progresiones geométricas

67. Indica cuáles de las siguientes sucesiones son progresiones geométricas y, en caso afirmativo, di el valor de la razón.

a) 5, 10, 20, 30, 40,…

b) 3, 15, 75, 375, 1875,…

c) 2, –2, 2, –2, 2,…

d) $\dfrac{1}{2}, \dfrac{1}{4}, \dfrac{1}{6}, \dfrac{1}{8}, \dfrac{1}{10}, ...$

e) $30, 10, \dfrac{10}{3}, \dfrac{10}{9}, \dfrac{10}{27}, ...$

f) 1, 5, 26, 127, 626

a) $\dfrac{10}{5} = 2; \dfrac{20}{10} = 2; \dfrac{30}{20} = 1{,}5 \Rightarrow$ No es una progresión geométrica.

b) $\dfrac{15}{3} = \dfrac{75}{15} = \dfrac{375}{75} = \dfrac{1875}{375} = 5 \Rightarrow$ Es una progresión geométrica de razón $r = 5$.

c) $\dfrac{-2}{2} = \dfrac{2}{-2} = \dfrac{-2}{2} = \dfrac{2}{-2} = -1 \Rightarrow$ Es una progresión geométrica de razón $r = -1$.

d) $\dfrac{\frac{1}{4}}{\frac{1}{2}} = \dfrac{1}{4}, \dfrac{\frac{1}{6}}{\frac{1}{4}} = \dfrac{2}{3} \Rightarrow$ No es una progresión geométrica.

e) $\dfrac{10}{30} = \dfrac{\frac{10}{3}}{10} = \dfrac{\frac{10}{9}}{\frac{10}{3}} = \dfrac{\frac{10}{27}}{\frac{10}{9}} = \dfrac{1}{3} \Rightarrow$ Es una progresión geométrica de razón $r = \dfrac{1}{3}$.

f) $\dfrac{5}{1} = 5; \dfrac{26}{5} = 5{,}2 \Rightarrow$ No es una progresión geométrica.

68. Calcula el término undécimo de una progresión geométrica cuyo primer término es igual a 1 y cuya razón es 2.

$a_{11} = a_1 r^{10} = 1 \cdot 2^{10} = 1024$

69. Halla la suma de los diez primeros términos de la progresión cuyo término general es $\frac{1}{2^n}$.

Se trata de una progresión geométrica con $a_1 = \frac{1}{2}$ y $r = \frac{1}{2}$, por tanto:

$$S_{10} = \frac{a_1\left(r^{10}-1\right)}{r-1} = \frac{\frac{1}{2}\left(\left(\frac{1}{2}\right)^{10}-1\right)}{\frac{1}{2}-1} = 1-\left(\frac{1}{2}\right)^{10} = 1-\frac{1}{1024} = \frac{1023}{1024}$$

70. Para cada una de las siguientes progresiones geométricas, calcula su término general, su décimo término y la suma de los diez primeros términos.

a) 5, 15, 45, 135, 405,…

b) 3, –3, 3, –3, 3,…

c) 1,04; $1{,}04^2$; $1{,}04^3$; $1{,}04^4$;…

d) $\left(1+\frac{0{,}8}{4}\right), \left(1+\frac{0{,}8}{4}\right)^2, \left(1+\frac{0{,}8}{4}\right)^3, \left(1+\frac{0{,}8}{4}\right)^4, \ldots$

a) El primer término es $a_1 = 5$ y la razón es $r = 3$, por tanto, el término general es $a_n = 5\cdot 3^{n-1}$, el décimo término es $a_{10} = 5\cdot 3^9 = 98\,415$ y la suma de los diez primeros términos es $S_{10} = \frac{5\left(3^{10}-1\right)}{3-1} = 147\,620$.

b) El primer término es $a_1 = 3$ y la razón es $r = -1$, por tanto, el término general es $a_n = 3(-1)^{n-1}$, el décimo término es $a_{10} = 3\cdot(-1)^9 = -3$ y la suma de los diez primeros términos es $S_{10} = \frac{3\left((-1)^{10}-1\right)}{-1-1} = 0$.

c) El primer término es $a_1 = 1{,}04$ y la razón es $r = 1{,}04$, por tanto, el término general es $a_n = 1{,}04\cdot 1{,}04^{n-1} = 1{,}04^n$, el décimo término es $a_{10} = 1{,}04^{10} = 1{,}4802$ y la suma de los diez primeros términos es $S_{10} = \frac{1{,}04\left(1{,}04^{10}-1\right)}{1{,}04-1} = = 12{,}4864$.

d) El primer término es $a_1 = \left(1+\frac{0{,}8}{4}\right) = 1{,}2$ y la razón es $r = \left(1+\frac{0{,}8}{4}\right) = 1{,}2$, por tanto, el término general es $a_n = 1{,}2\cdot 1{,}2^{n-1} = 1{,}2^n$, el décimo término es $a_{10} = 1{,}2^{10} = 6{,}1917$ y la suma de los diez primeros términos es $S_{10} = \frac{1{,}2\left(1{,}2^{10}-1\right)}{1{,}2-1} = 31{,}1504$.

71. ¿Cuántos términos se han de sumar en la progresión geométrica cuyos tres primeros términos son 2; 2,5 y 3,125 para obtener un total de 276,217?

Tenemos $a_1 = 2$ y $r = 1{,}25$, por tanto, tenemos:

$$S_n = \frac{a_1\left(r^n-1\right)}{r-1} = \frac{2\left(1{,}25^n-1\right)}{1{,}25-1} = 8\left(1{,}25^n-1\right) = 276{,}217 \Rightarrow 1{,}25^n = 35{,}527125 \Rightarrow n\log 1{,}25 = \log 35{,}527125 \Rightarrow$$

$\Rightarrow n = \frac{\log 35{,}527125}{\log 1{,}25} = 16$, es decir, hay que sumar 16 términos.

Interés simple y compuesto

72. Calcula el capital final obtenido al depositar las siguientes cantidades a interés simple anual y durante el tiempo indicado en cada apartado.

a) 100 € al 5 % durante 2 años.

b) 100 000 € al 4 % durante 7 años.

c) 1 € al 6 % durante 5 años.

a) $C_f = 100(1+0,05\cdot 2) = 110$ €

b) $C_f = 100\,000(1+0,04\cdot 7) = 128\,000$ €

c) $C_f = 1(1+0,06\cdot 5) = 1,3$ €

73. Calcula a qué interés simple anual se ha depositado un capital de 5000 € sabiendo que en 10 años se ha convertido en 7000 €.

Datos: $C_i = 5000$ € $\quad C_f = 7000$ € $\quad I = 2000$ € $\quad t = 10$ años

$$I = C_i rt \Rightarrow r = \frac{I}{C_i t} = \frac{2000}{5000\cdot 10} = 0,04 \Rightarrow r = 4\ \%$$

74. Se coloca un capital de 100 000 € a un interés compuesto anual del 6 % durante 10 años. Calcula el capital final que se obtendrá en el caso de que el período de capitalización sea de:

a) Un año **b)** Un semestre **c)** Un trimestre **d)** Un mes

a) $C_f = 100\,000(1+0,06)^{10} = 179\,084,77$ €

b) $C_f = 100\,000\left(1+\frac{0,06}{2}\right)^{2\cdot 10} = 180\,611,12$ €

c) $C_f = 100\,000\left(1+\frac{0,06}{4}\right)^{4\cdot 10} = 181\,401,84$ €

d) $C_f = 100\,000\left(1+\frac{0,06}{12}\right)^{12\cdot 10} = 181\,939,67$ €

75. Completa la siguiente tabla con los datos que faltan. En todos los casos se trata de interés compuesto.

C_i (€)	C_f (€)	r(%)	t (años)	Capitalización
	2000	5	8	anual
6000		3,5	5	mensual
3000	5000		10	trimestral
500	800	6		semestral

Primera fila: $C_i = \frac{2000}{(1+0,05)^8} = 1353,68$

Segunda fila: $C_f = 6000\left(1+\frac{0,035}{12}\right)^{12\cdot 5} = 7145,66$ €

Tercera fila: $r = 4\left(\sqrt[40]{\frac{5}{3}}-1\right) = 0,0514;\ r = 5,14\ \%$

Cuarta fila: $t = \frac{\log 1,6}{2\cdot \log 1,03} = 7,95$ años

C_i (€)	C_f (€)	r(%)	t (años)	Capitalización
1353,68	2000	5	8	anual
6000	7145,66	3,5	5	mensual
3000	5000	5,14	10	trimestral
500	800	6	8	semestral

76. **a)** ¿Qué capital inicial será necesario ingresar en una cuenta para que después de estar colocado durante 3 años a un interés compuesto del 3,5% se convierta en 2400 €?

b) ¿Y si el período de capitalización es mensual y no anual?

a) Datos: $C_f = 2400$ € $\quad r = 0{,}035 \;\; t = 3$ años $\Rightarrow C_f = C_i(1+r)^t \Rightarrow C_i = \dfrac{C_f}{(1+r)^t} = \dfrac{2400}{(1+0{,}035)^3} = 2164{,}66$ €

b) Si el periodo de capitalización es mensual ($k = 12$): $C_i = \dfrac{C_f}{\left(1+\dfrac{r}{k}\right)^{kt}} = \dfrac{2400}{\left(1+\dfrac{0{,}035}{12}\right)^{36}} = 2161{,}11$ €.

Anualidades

77. Calcula el capital final del que se dispondrá dentro de 5 años si se depositan 300 € al comienzo de cada año a un interés compuesto anual del 6 %.

Datos: $a = 300$ € $\quad r = 0{,}06 \;\; t = 5$ años $\Rightarrow C = \dfrac{a(1+r)\left[(1+r)^t - 1\right]}{r} = \dfrac{300(1+0{,}06)\left[(1+0{,}06)^5 - 1\right]}{0{,}06} = 1792{,}60$ €

78. ¿Qué anualidad debe ingresarse al principio de cada año al 6,25 % para reunir un capital de 70 000 € en 10 años?

Datos: $C = 70\,000$ € $\quad r = 0{,}0625 \;\; t = 10$ años

$$C = \frac{a(1+r)\left[(1+r)^t - 1\right]}{r} \Rightarrow a = \frac{Cr}{(1+r)\left[(1+r)^t - 1\right]} = \frac{70\,000 \cdot 0{,}0625}{(1+0{,}0625)\left[(1+0{,}0625)^{10} - 1\right]} = 4939{,}98 \text{ €}$$

79. ¿Durante cuántos años se deben entregar 450 € mensuales para que colocados al 5,75% de interés compuesto se obtenga un capital final de 12 500 €?

Datos: $a = 450$ € $\quad r = 0{,}0575 \;\; C = 12\,500$ € $\quad$ Período de capitalización: mensual ($k = 12$)

$$C = \frac{a\left(1+\dfrac{r}{k}\right)\left[\left(1+\dfrac{r}{k}\right)^{kt} - 1\right]}{\dfrac{r}{k}} \Rightarrow 70\,000 = \frac{450\left(1+\dfrac{0{,}0575}{12}\right)\left[\left(1+\dfrac{0{,}0575}{12}\right)^{12t} - 1\right]}{\dfrac{0{,}0575}{12}} \Rightarrow \left(1+\frac{0{,}0575}{12}\right)^{12t} =$$

$$= \frac{70\,000 \cdot \dfrac{0{,}0575}{12}}{450\left(1+\dfrac{0{,}0575}{12}\right)} + 1 \Rightarrow 1{,}00479^{12t} = 1{,}74182 \Rightarrow 12t \log 1{,}00479 = \log 1{,}74182 \Rightarrow t = \frac{\log 1{,}74182}{12 \log 1{,}00479} = 9{,}68 \text{ años.}$$

Es decir, habrá que ingresar anualidades durante 9 años y 8 meses.

80. ¿Qué capital final se obtiene si se depositan semestralmente 2500 € a un interés compuesto anual del 4,25 % durante cuatro años?

Datos: $a = 2500$ € $\quad r = 0{,}0425 \;\; t = 4$ años $\quad$ Período de capitalización: semestral ($k = 2$)

$$C = \frac{a\left(1+\dfrac{r}{k}\right)\left[\left(1+\dfrac{r}{k}\right)^{kt} - 1\right]}{\dfrac{r}{k}} = \frac{2500\left(1+\dfrac{0{,}0425}{2}\right)\left[\left(1+\dfrac{0{,}0425}{2}\right)^{2\cdot 4} - 1\right]}{\dfrac{0{,}0425}{2}} = 22010{,}42 \text{ €}$$

81. ¿Qué interés anual tiene un depósito bancario que con aportaciones periódicas de 500 € cada año se ha trasformado al cabo de 2 años en un capital de 1 076,25 €?

Datos: $a = 500$ € $C = 1076,25$ € $t = 2$ años

$C = \frac{a(1+r)\left[(1+r)^t - 1\right]}{r} \Rightarrow 1076,25 = \frac{500(1+r)\left[(1+r)^2 - 1\right]}{r}$, haciendo $x = 1+r$ obtenemos:

$1076,25(x-1) = 500x\left(x^2 - 1\right) \Rightarrow (x-1)\left(500x^2 + 500x - 1076,25\right) = 0$

La solución $x = 1 \Rightarrow r = 0$ no tiene sentido, por tanto, $x = \frac{-500 \pm 1550}{1000} = \begin{cases} x = 1,05 \Rightarrow r = 0,05 \\ x = -2,05 \text{ no válida} \end{cases}$.

Así, el depósito tiene un interés anual del 5%.

82. Un préstamo de 120 000 € al 5 % se devuelve en 20 años en pagos mensuales. Halla la mensualidad de amortización.

Datos: $C = 120\,000$ € $r = 0,05$ $t = 20$ años Período de pago: mensual ($k = 12$)

$$a = \frac{C\frac{r}{k}\left(1+\frac{r}{k}\right)^{kt}}{\left(1+\frac{r}{k}\right)^{kt} - 1} = \frac{120\,000 \cdot \frac{0,05}{12}\left(1+\frac{0,05}{12}\right)^{12\cdot 20}}{\left(1+\frac{0,05}{12}\right)^{12\cdot 20} - 1} = 791,95 \text{ €}$$

83. ¿Qué deuda se habrá amortizado mediante el pago de 6 anualidades de 5000 € al 7 % anual?

Datos: $a = 5000$ € $r = 0,07$ $t = 6$ años

$$a = \frac{Cr(1+r)^t}{(1+r)^t - 1} \Rightarrow C = \frac{a\left[(1+r)^t - 1\right]}{r(1+r)^t} = \frac{5000\left(1,07^6 - 1\right)}{0,07 \cdot 1,07^6} = 23\,832,70 \text{ €}$$

84. ¿Cuánto tiempo se tardará en devolver una hipoteca de 300 000 € al 4 % si la cuota mensual es fija e igual a 2200 €?

Datos: $C = 300\,000$ € $a = 2\,200$ € $r = 0,04$ Período de pago: mensual ($k = 12$)

$$a = \frac{C\frac{r}{k}\left(1+\frac{r}{k}\right)^{kt}}{\left(1+\frac{r}{k}\right)^{kt} - 1} \Rightarrow 2\,200 = \frac{300\,000 \cdot \frac{0,04}{12} \cdot \left(1+\frac{0,04}{12}\right)^{12t}}{\left(1+\frac{0,04}{12}\right)^{12t} - 1} \Rightarrow 2\,200 \cdot 1,0033^{12t} - 2\,200 = 1000 \cdot 1,0033^{12t} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 1200 \cdot 1,0033^{12t} = 2200 \Rightarrow 1,0033^{12t} = 1,8333 \Rightarrow 12t\log 1,0033 = \log 1,8333 \Rightarrow t = \frac{\log 1,8333}{12 \cdot \log 1,0033} = 15,33 \text{ años}$$

Se tardan 15 años y 4 meses

85. Calcula a cuántos años se debe solicitar un préstamo de 4500 € al 7,15 % anual para que la anualidad que resulte sea de 915 €.Ten en cuenta que los cálculos debes realizarlos considerando interés compuesto.

Datos: $C = 4500$ € $a = 915$ € $r = 0,0715$

$$a = \frac{Cr(1+r)^t}{(1+r)^t - 1} \Rightarrow 915 = \frac{4500 \cdot 0,0715 \cdot (1+0,0715)^t}{(1+0,0715)^t - 1} \Rightarrow 915 \cdot 1,0715^t - 915 = 321,75 \cdot 1,0715^t \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 593,25 \cdot 1,0715^t = 915 \Rightarrow 1,0715^t = 1,54235 \Rightarrow t\log 1,0715 = \log 1,54235 \Rightarrow t = \frac{\log 1,54235}{\log 1,0715} = 6,27 \text{ años}$$

Se debe solicitar a 6 años y 3 meses

86. ¿Cuánto tiempo debe estar depositado un capital a un interés compuesto del 8 % para triplicarse si la capitalización es mensual?

Datos: $C_f = 3C_i$ € $r = 0,08$ Período de capitalización: mensual ($k = 12$)

$$C_f = C_i\left(1+\frac{r}{k}\right)^{kt} \Rightarrow 3 = \left(1+\frac{0,08}{12}\right)^{12t} \Rightarrow 12t\log 1,00667 = \log 3 \Rightarrow t = \frac{\log 3}{12\log 1,00667} = 13,77 \text{ años.}$$

Debe estar 13 años y 9 meses.

Parámetros económicos y sociales

87. Calcula la TAE correspondiente al 6% anual con período de capitalización:

a) Semestral **b)** Trimestral **c)** Mensual

a) $\text{TAE} = \left[\left(1+\frac{0,06}{2}\right)^2 - 1\right]\cdot 100 = 6,09\ \%$

b) $\text{TAE} = \left[\left(1+\frac{0,06}{4}\right)^4 - 1\right]\cdot 100 = 6,14\ \%$

c) $\text{TAE} = \left[\left(1+\frac{0,06}{12}\right)^{12} - 1\right]\cdot 100 = 6,17\ \%$

88. En la tabla aparecen los precios en 2012 y 2013 de los cuatro grupos de productos de la cesta de la compra tipo en un país y sus ponderaciones.

Grupo	2012	2013	Pond.
1	100	101	30%
2	106	105	25%
3	106	108	20%
4	120	130	25%

Calcula el IPC del año 2013 tomando como base el año 2012.

$$\text{IPC} = \frac{101\cdot 0,3 + 105\cdot 0,25 + 108\cdot 0,2 + 130\cdot 0,25}{100\cdot 0,3 + 106\cdot 0,25 + 106\cdot 0,2 + 120\cdot 0,25} = \frac{110,65}{107,7} = 1,0274$$

En el país considerado, los precios aumentaron un 2,74 % en el año 2013.

89. Determina el IDH de cada uno de los siguientes países y ordénalos según el grado de desarrollo.

País	*IEV*	*IE*	*II*
A	0,954	0,946	0,959
B	0,792	0,837	0,703
C	0,890	0,993	0,994

País *A*: $\text{IDH}_A = \sqrt[3]{0,954\cdot 0,946\cdot 0,959} = 0,953$

País *B*: $\text{IDH}_B = \sqrt[3]{0,792\cdot 0,837\cdot 0,703} = 0,775$

País *C*: $\text{IDH}_C = \sqrt[3]{0,890\cdot 0,993\cdot 0,994} = 0,958$

Por tanto, *C* > *A* > *B*, es decir, el país con mayor grado de desarrollo es *C*, seguido de *A*, y por último, *B*.

CUESTIONES

90. Si una cantidad se aumenta en un 5% y el resultado se disminuye también en un 5%, ¿cuál es el porcentaje de variación total?

$1,05 \cdot 0,95 = 0,9975 \Rightarrow$ Baja en un 0,25%

91. Indica en cada caso la razón por la que las siguientes expresiones no tienen sentido.

a) $\log_1 2 = x$ **b)** $\log_3 -81 = x$ **c)** $\log_{-3} x = 9$ **d)** $\log_x \sqrt{2} = 0$

a) La base de un logaritmo tiene que ser estrictamente positiva y diferente de 1.

b) No existen los logaritmos de los números negativos.

c) La base debe ser estrictamente positiva y diferente de 1.

d) Si el resultado de un logaritmo, en cualquier base, es cero, dicho número vale 1.

92. Justifica cuál de los dos procedimientos siguientes es correcto para calcular el precio inicial de unos pantalones que han sido rebajados en un 15% y se ha pagado finalmente 23,45 €:

A. $\dfrac{23,45}{0,85} = 27,59$ € **B.** $23,45 \cdot 1,15 = 26,98$ €

Si llamamos x al precio inicial de los pantalones tenemos $0,85x = 23,45$, luego $x = \dfrac{23,45}{0,85} = 27,59$ €, es decir, el procedimiento correcto es el A.

93. Dada la progresión geométrica de primer término 50 y razón 0,75, calcula la suma de:

a) Sus 10 primeros términos **c)** Sus 100 primeros términos

b) Sus 20 primeros términos **d)** Sus 1000 primeros términos

¿Puedes indicar alguna conclusión interesante?

La suma de los primeros n términos es $S_n = \dfrac{a_1(r^n - 1)}{r - 1} = \dfrac{50(0,75^n - 1)}{-0,25} = 200(1 - 0,75^n)$, así:

a) $S_{10} = 200(1 - 0,75^{10}) = 188,74$ **c)** $S_{100} = 200(1 - 0,75^{100}) = 200$

b) $S_{20} = 200(1 - 0,75^{20}) = 199,37$ **d)** $S_{1000} = 200(1 - 0,75^{1000}) = 200$

La suma se aproxima cada vez más a 200 y nunca supera esta cifra.

94. Calcula el capital en que se convierte 1 € al cabo de un año colocado al 1% anual de interés compuesto durante un año si la capitalización es de:

a) Un año **c)** Un mes **e)** Una hora

b) Un trimestre **d)** Un día **f)** Un minuto

a) $C_f = 1 \cdot (1 + 0,01)^1 = 1,01$ €

b) $C_f = 1 \cdot \left(1 + \dfrac{0,01}{4}\right)^4 = 1,010038$ €

c) $C_f = 1 \cdot \left(1 + \dfrac{0,01}{12}\right)^{12} = 1,010046$ €

d) $C_f = 1 \cdot \left(1 + \dfrac{0,01}{365}\right)^{365} = 1,010050$ €

e) $C_f = 1 \cdot \left(1 + \dfrac{0,01}{365 \cdot 24}\right)^{365 \cdot 24} = 1,010050$ €

f) $C_f = 1 \cdot \left(1 + \dfrac{0,01}{365 \cdot 24 \cdot 60}\right)^{365 \cdot 24 \cdot 60} = 1,010050$ €

95. La TAE correspondiente a un interés nominal anual con periodo de capitalización semestral es del 8,16%. Hallala TAE para eses mismo interés nominal anual pero para un periodo de capitalización mensual.

$$\text{TAE} = \left[\left(1+\frac{r}{2}\right)^2 - 1\right]\cdot 100 = 8{,}16 \Rightarrow \left(1+\frac{r}{2}\right)^2 = 1{,}0816 \Rightarrow 1+\frac{r}{2} = 1{,}04 \Rightarrow r = 0{,}08$$

$$\text{TAE} = \left[\left(1+\frac{0{,}08}{12}\right)^{12} - 1\right]\cdot 100 = 8{,}3\ \%$$

PROBLEMAS

96. Eva ha pagado 18,75 € por una falda, 22,25 €, por un pantalón, 19,50 €, por una camisa, y, por último, 29,15 €, por una chaqueta. El dueño del comercio consiente en rebajarle el precio de forma que le perdona los céntimos que marca cada una de las prendas. ¿Qué porcentaje de rebaja ha supuesto?

$\dfrac{0{,}75+0{,}25+0{,}5+0{,}15}{18{,}75+22{,}25+19{,}5+29{,}15} = 0{,}018 \Rightarrow$ Le rebaja el 1,8%.

97. Una cooperativa recibe un depósito de 2000 € de cada uno de sus socios y se compromete a devolverlo trascurridos 3 años y 4 meses, junto con un interés simple del 5% anual. ¿Qué cantidad devolverá a cada socio?

Datos: $C_i = 2000$ $r = 0{,}05$ $t = 3{,}3333$ años

$C_f = C_i\left(1+rt\right) = 2000\cdot\left(1+0{,}05\cdot 3{,}3333\right) = 2333{,}33$ €. La cooperativa devuelve 2333,33 € a cada socio.

98. El precio de la gasolina ha variado en las últimas 3 quincenas. En la primera subió un 3 %, en la segunda bajó un 2% y en la tercera volvió a subir un 4%. Después de las 3 quincenas, el precio del litro es de 145 CENT.

a) ¿Cuál era el precio antes de las tres variaciones?

b) ¿Cuál es el porcentaje de variación global del precio en las tres quincenas?

a) Si x es el precio del litro hace 3 quincenas, tenemos $1{,}03\cdot 0{,}98\cdot 1{,}04x = 145 \Rightarrow x = 138{,}12$ CENT.

b) $1{,}03\cdot 0{,}98\cdot 1{,}04 = 1{,}0498 \Rightarrow$ La gasolina ha subido un 4,98 %.

99. Se colocan 6000 € al 4 % anual de interés compuesto durante cinco años. La entidad carga 1 céntimo de euro cada vez que tiene que calcular los intereses generados y acumularlos al capital.

a) Calcula el capital final si el período de capitalización es de un año, un trimestre, un mes y un día.

b) ¿Cuál de los períodos de capitalización indicados favorece más al cliente?

a) Período de capitalización anual: $C_f = 6000\cdot\left(1+0{,}04\right)^5 - 0{,}01\cdot 5 = 7299{,}92 - 0{,}05 = 7299{,}87$ €

Período de capitalización trimestral: $C_f = 6000\cdot\left(1+\dfrac{0{,}04}{4}\right)^{20} - 0{,}01\cdot 20 = 7321{,}14 - 0{,}2 = 7320{,}94$ €

Período de capitalización mensual: $C_f = 6000\cdot\left(1+\dfrac{0{,}04}{12}\right)^{60} - 0{,}01\cdot 60 = 7325{,}98 - 0{,}6 = 7325{,}38$ €

Período de capitalización diario: $C_f = 6000\cdot\left(1+\dfrac{0{,}04}{365}\right)^{1825} - 0{,}01\cdot 1825 = 7328{,}34 - 18{,}25 = 7310{,}09$ €

b) El mejor periodo de capitalización en estas condiciones es el mensual.

100. Se ingresan 1050 € en una cuenta remunerada al 3,25 % de interés compuesto durante dos años. ¿Cuáles son los intereses producidos si se considera que el periodo de capitalización es el año? ¿Y si es el mes?

Datos: $C_i = 1050$ € $\quad r = 0{,}0325 \quad t = 2$ años

Si el periodo de capitalización es anual, los intereses producidos son:

$$C_f - C_i = C_i(1+r)^t - C_i = 1050(1+0{,}0325)^2 - 1050 = 1119{,}36 - 1050 = 69{,}36 \text{ €}$$

Si el periodo de capitalización es mensual ($k = 12$), los intereses producidos son:

$$C_f - C_i = C_i\left(1+\frac{r}{k}\right)^{kt} - C_i = 1050\left(1+\frac{0{,}0325}{12}\right)^{24} - 1050 = 1120{,}42 - 1050 = 70{,}42 \text{ €}$$

101. El crecimiento de una población de bacterias sigue el mismo modelo que el crecimiento de un capital colocado a interés compuesto.

Calcula el número de bacterias de un determinado cultivo después de 84 días si se sabe que el número inicial era de 24 000 bacterias y que cada semana aumenta la población en un 5%.

Datos: $P_i = 24\,000$ bacterias $\quad$ Ritmo de crecimiento: $r = 0{,}05 \quad t = \frac{84}{7} = 12$ semanas

$$P_f = P_i(1+r)^t = 24\,000(1+0{,}05)^{12} = 43\,100{,}55 \simeq 43\,101 \text{ bacterias}$$

102. El número de habitantes de una ciudad crece en un período de 3 años de acuerdo a una ley igual a la del interés compuesto. Si inicialmente la ciudad tenía 75 000 habitantes y el ritmo de crecimiento fue del 0,5% mensual, ¿cuál será la población al final de los 3 años?

Datos: $P_i = 75\,000$ habitantes $\quad$ Ritmo de crecimiento (mensual): $r = 0{,}005 \quad t = 3$ años

$$P_f = P_i\left(1+\frac{r}{k}\right)^{kt} = 75\,000\left(1+0{,}005\right)^{36} = 89\,751 \text{ habitantes.}$$

103. Ana contrató un plan de pensiones a los 30 años en el que ha depositado 400 € cada año, a un tipo del 6,5 % anual.

a) Si ahora tiene 45 años, ¿qué cantidad recibiría si decidiera cancelar el plan?

b) ¿Con qué cantidad se encontrará cuando se jubile a los 67 años?

a) Datos: $a = 400 \quad r = 0{,}065 \quad t = 45 - 30 = 15$ años

$$C = \frac{a(1+r)\left[(1+r)^t - 1\right]}{r} = \frac{400(1+0{,}065)\left[(1+0{,}065)^{15} - 1\right]}{0{,}065} = 10\,301{,}60 \text{ €}$$

b) Datos: $a = 400 \quad r = 0{,}065 \quad t = 67 - 30 = 37$ años

$$C = \frac{a(1+r)\left[(1+r)^t - 1\right]}{r} = \frac{400(1+0{,}065)\left[(1+0{,}065)^{37} - 1\right]}{0{,}065} = 60\,810{,}75 \text{ €}$$

104. El precio de un ordenador se devalúa en un 25 % nada más comprarlo y después, cada año su valor baja un 4 % con respecto al valor del año anterior.

El ordenador que compró Miguel hace dos años está tasado en 897,87 €, ¿qué precio pagó Miguel por el ordenador cuando lo compró?

Si P_i es el precio original del ordenador, tras *t* años el precio será $P_f = 0{,}75P_i\left(1-0{,}04\right)^t$, por tanto, tenemos:

$$897{,}87 = 0{,}75P_i\left(1-0{,}04\right)^2 \Rightarrow P_i = \frac{897{,}87}{0{,}75\left(1-0{,}04\right)^2} = 1299 \text{ €.}$$

105. ¿Qué cantidad deberá entregar Pedro como anualidad a su plan de jubilación para que al cabo de 15 años haya conseguido un capital de 20 000 €? El tipo de interés es del 5,25 %.

Datos: $C = 20000$ € $r = 0{,}0525$ $t = 15$ años

$$C = \frac{a(1+r)\left[(1+r)^t - 1\right]}{r} \Rightarrow a = \frac{Cr}{(1+r)\left[(1+r)^t - 1\right]} = \frac{20000 \cdot 0{,}0525}{(1+0{,}0525)\left[(1+0{,}0525)^{15} - 1\right]} = 864{,}17 \text{ €}$$

106. Calcula la anualidad que se debe pagar para saldar una deuda de 12 000 € al 5,5% anual si:

a) El plazo es de 5 años.

b) El plazo es de 10 años.

¿Por qué no se paga justo la mitad cuando el plazo para devolver la deuda es el doble?

a) Datos: $C = 12000$ € $r = 0{,}055$ $t = 5$ años

$$a = \frac{Cr(1+r)^t}{(1+r)^t - 1} = \frac{12000 \cdot 0{,}055 \cdot (1+0{,}055)^5}{(1+0{,}055)^5 - 1} = 2810{,}12 \text{ €}$$

b) Datos: $C = 12000$ € $r = 0{,}055$ $t = 10$ años

$$a = \frac{Cr(1+r)^t}{(1+r)^t - 1} = \frac{12000 \cdot 0{,}055 \cdot (1+0{,}055)^{10}}{(1+0{,}055)^{10} - 1} = 1592{,}01 \text{ €}$$

Al haber contraído una deuda con un plazo doble de largo se pagan más del doble de intereses.

107. Los pisos de una inmobiliaria cuestan 100 000 €. La forma de pago es la siguiente: 20 000 € a la entrega de llaves, y el resto, a pagar en 20 años con un interés del 3,25 %. Si los pagos se realizan al final de cada año:

a) ¿Cuánto se deberá pagar anualmente?

b) ¿Cuánto se habrá pagado en total por el piso cuando hayan transcurrido los 20 años?

a) Datos: $C = 80000$ € $r = 0{,}0325$ $t = 20$ años

$$a = \frac{Cr(1+r)^t}{(1+r)^t - 1} = \frac{80000 \cdot 0{,}0325 \cdot (1+0{,}0325)^{20}}{(1+0{,}0325)^{20} - 1} = 5502{,}31 \text{ €}$$

b) $20000 + 20 \cdot 5502{,}31 = 130046{,}20$ €

108. Para adquirir un coche que cuesta 16 000 €, una persona entrega su coche anterior, valorado en 2000 €, y para el resto pide un préstamo a pagar en 3 años y a un interés compuesto del 8,5%. ¿Cuánto debe pagar anualmente?

Datos: $C = 14000$ € $r = 0{,}085$ $t = 3$ años $\Rightarrow a = \dfrac{Cr(1+r)^t}{(1+r)^t - 1} = \dfrac{14\,000 \cdot 0{,}085(1+0{,}085)^3}{(1+0{,}085)^3 - 1} = 5481{,}55$ €

109. En un folleto de propaganda de un banco se anuncia que un 1 € se convierte en 10 años en 1,5162 €.

a) Calcula el rédito que ofrece el banco.

b) Calcula la anualidad que se deberá pagar si se solicita un préstamo de 10 000 € a pagar en 10 años y al mismo tipo de interés que ofrece el banco en la propaganda.

a) Datos: $C_i = 1$ € $C_f = 1{,}5162$ € $t = 10$ años

$$C_f = C_i(1+r)^t \Rightarrow 1{,}5162 = 1 \cdot (1+r)^{10} \Rightarrow r = \sqrt[10]{1{,}5162} - 1 = 0{,}0425 \Rightarrow 4{,}25\ \%$$

b) Datos: $C = 10000$ € $r = 0{,}0425$ € $t = 10$ años

$$a = \frac{Cr(1+r)^t}{(1+r)^t - 1} = \frac{10000 \cdot 0{,}0425 \cdot (1+0{,}0425)^{10}}{(1+0{,}0425)^{10} - 1} = 1248{,}30 \text{ €}$$

110. En las siguientes operaciones el interés nominal es del 5 %. Calcula la TAE correspondiente.

a) Depósito de 1000 € con capitalización mensual a 10 años.

b) Depósito de 2000 € con capitalización mensual a 15 años.

c) Depósito de 3000 € con capitalización mensual a 20 años.

Los tres casos dan el mismo resultado:

$$TAE=\left[\left(1+\frac{r}{k}\right)^{k}-1\right]\cdot 100=\left[\left(1+\frac{0.05}{12}\right)^{12}-1\right]\cdot 100=5{,}116\ \%$$

111. Un posible cliente solicita información en un banco sobre el tipo de interés que ofrecen en los depósitos. Le indican que la TAEde un depósito a 1 año es del 1,75 % y que las de un depósito a 5 años es de 2,15 %. Si el período de capitalización es el mes, ¿cuál es el tipo de interés nominal anual en cada caso?

En el primer caso tenemos:

$$TAE=\left[\left(1+\frac{r}{k}\right)^{k}-1\right]\cdot 100\Rightarrow 1{,}75=\left[\left(1+\frac{r}{12}\right)^{12}-1\right]\cdot 100\Rightarrow\left(1+\frac{r}{12}\right)^{12}=1{,}0175\Rightarrow r=12\left(\sqrt[12]{1{,}0175}-1\right)=0{,}0174$$

En el segundo caso tenemos:

$$TAE=\left[\left(1+\frac{r}{k}\right)^{k}-1\right]\cdot 100\Rightarrow 2{,}15=\left[\left(1+\frac{r}{12}\right)^{12}-1\right]\cdot 100\Rightarrow\left(1+\frac{r}{12}\right)^{12}=1{,}0215\Rightarrow r=12\left(\sqrt[12]{1{,}0215}-1\right)=0{,}0213$$

Así, el interés nominal anual en el primer caso es del 1,74 % y en el segundo caso del 2,13 %.

112. En la tabla aparece el PIB (producto interior bruto) de un país en millones de euros y para los años que se indican. Calcula la tabla de números índice tomando como base los años 2007 y 2010.

Año	PIB
2007	14 080
2008	14 220
2009	14 500
2010	14 850
2011	15 120
2012	14 990
2013	14 850
2014	15 200

Año	Índice (base 2007)	Índice (base 2010)
2007	100	94,81
2008	100,99	95,76
2009	102,98	97,64
2010	105,47	100
2011	107,39	101,81
2012	106,46	100,94
2013	105,47	100
2014	107,95	102,36

113. En la tabla aparecen los productos, que componen una cesta de la compra tipo en un país, clasificados en grupos, su precio en los años 2013 y 2014, y su ponderación. Calcula el IPC de ese país en 2014 tomando como base el año 2013.

Grupo	2013	2014	Ponderación
Alimentos	118,2	119,0	28
Vestido	115,4	116,0	12
Vivienda	132,5	130,5	13
Medicina	123,0	122,3	4
Educación	122,0	123,1	8
Otros	130,1	131,2	35

$$\text{IPC}=\frac{119{,}0\cdot 28+116{,}0\cdot 12+130{,}5\cdot 13+122{,}3\cdot 4+123{,}1\cdot 8+131{,}2\cdot 35}{118{,}2\cdot 28+115{,}4\cdot 12+132{,}5\cdot 13+123{,}0\cdot 4+122{,}0\cdot 8+130{,}1\cdot 35}=\frac{12486{,}5}{12438{,}4}=1{,}0039$$

114. Mediante dos anualidades de capitalización anual de 2000 € se forma un capital de 4212,40 €.Calcula el tipo de interés de la operación.

Datos: $a=2000$ € $C=4212{,}40$ € $t=2$ años

$$C=\frac{a(1+r)\left[(1+r)^t-1\right]}{r}\Rightarrow 4212{,}4=\frac{2000(1+r)\left[(1+r)^2-1\right]}{r}$$, haciendo $x=1+r$ obtenemos:

$$4212{,}4(x-1)=2000x\left(x^2-1\right)=2000x(x+1)(x-1)\Rightarrow(x-1)\left(2000x^2+2000x-4212{,}4\right)=0$$

La solución $x=1\Rightarrow r=0$ no tiene sentido, por tanto, $x=\dfrac{-2000\pm 6140}{4000}\Rightarrow\begin{cases}x=1{,}035\Rightarrow r=0{,}035\\ x=-2{,}035 \text{ no válida}\end{cases}$.

Así, el interés anual es del 3,5 %.

115. La siguiente tabla muestra el importe, el plazo en años, y el interés medio de las hipotecas concedidas en España desde julio de 2007 ajulio de 2014.

	Capital	Plazo	Interés
2007	149 807,31	27	4,68
2008	139 675,85	24	5,27
2009	115 489,51	21	4,36
2010	121 561,61	23	3,77
2011	110 485,40	22	4,27
2012	99 364,93	22	4,24
2013	101 121,66	20	4,23
2014	100 865,90	21	3,90

a) Calcula para cada año la mensualidad a pagar.

b) Halla, para cada una de las hipotecas medias, el pago final que tiene que asumir el consumidor.

Para calcular la mensualidad a pagar en cada caso usamos la fórmula:

$$a = \frac{C\dfrac{r}{12}\left(1+\dfrac{r}{12}\right)^{12t}}{\left(1+\dfrac{r}{12}\right)^{12t}-1}$$

Donde$C$ es el capital, t es el plazo y r el interés (en tanto por uno).

Para calcular el pago total que asumen los consumidores multiplicamos cada mensualidad por 12 y por el plazo correspondiente.

Obtenemos así los valores de la tabla adjunta.

	Mensualidad	Pago total
2007	815,23	264 133,51
2008	855,62	246 417,54
2009	700,45	176 513,86
2010	659,30	181 966,70
2011	646,10	170 571,02
2012	579,45	152 974,56
2013	625,10	150 024,47
2014	586,91	147 901,50

116. En el recibo correspondiente a una mensualidad de un crédito hipotecario que el banco envía al interesado aparecen los siguientes datos.

- **Importe inicial: 72 121,45 €**
- **Deuda pendiente antes del pago: 48 633,01 €**
- **Tipo de interés: 4,564% anual**
- **Períodos pendientes: 85**
- **Mensualidad: 670,69 €**

a) Comprueba que la mensualidad es correcta.

b) Calcula qué parte de la mensualidad corresponde a los intereses y qué parte a la amortización de capital.

c) Calcula la deuda pendiente después de pagar la mensualidad.

d) En la siguiente cuota, el interesado ingresa6000 € más en concepto de adelanto de capital y opta por reducir la cuota manteniendo el número de pagos pendientes. ¿Cuál será la nueva cuota?

a) $a=\dfrac{C\dfrac{r}{12}\left(1+\dfrac{r}{12}\right)^{12t}}{\left(1+\dfrac{r}{12}\right)^{12t}-1}=\dfrac{48\,633{,}01\cdot\dfrac{0{,}04564}{12}\left(1+\dfrac{0{,}04564}{12}\right)^{85}}{\left(1+\dfrac{0{,}04564}{12}\right)^{85}-1}=670{,}69$ €

b) Intereses: $48633{,}01\cdot\dfrac{0{,}04564}{12}=184{,}97$ € Amortización: $670{,}69-184{,}97=485{,}72$ €

c) Deuda pendiente: $48633{,}01-485{,}72=48147{,}29$ €

d) En la siguiente cuota la deuda pendiente es 48 147,29 € y se paga una mensualidad de 670,69 €, de la cual la parte correspondiente a los intereses es $48147{,}29\cdot\dfrac{0{,}04564}{12}=183{,}12$ € y la parte correspondiente a la amortización del capital es $670{,}69-183{,}12=487{,}57$ €.

Como además se amortizan 6000 € más, la nueva deuda será $48147{,}29-487{,}57-6000=41659{,}72$ € y, puesto que quedarían 83 pagos pendientes, la nueva cuota será de:

$$a=\dfrac{C\dfrac{r}{12}\left(1+\dfrac{r}{12}\right)^{12t}}{\left(1+\dfrac{r}{12}\right)^{12t}-1}=\dfrac{41659{,}72\cdot\dfrac{0{,}04564}{12}\cdot\left(1+\dfrac{0{,}04564}{12}\right)^{83}}{\left(1+\dfrac{0{,}04564}{12}\right)^{83}-1}=586{,}25\text{ €}$$

117. En la tabla se recoge el precio medio en euros por metro cuadrado de la vivienda.

Enero	205 400
Febrero	206 600
Marzo	206 900
Abril	207 700
Mayo	211 000
Junio	211 200
Julio	212 400
Agosto	212 500
Septiembre	212 800
Octubre	213 500
Noviembre	214 000
Diciembre	214 600

Calcula los números índice para las referencias de enero, por una parte, y de comienzo de trimestre, por otra.

Referencia de enero

Enero	205 400	100
Febrero	206 600	100,58
Marzo	206 900	100,73
Abril	207 700	101,12
Mayo	211 000	102,73
Junio	211 200	102,82
Julio	212 400	103,41
Agosto	212 500	103,46
Septiembre	212 800	103,60
Octubre	213 500	103,94
Noviembre	214 000	104,19
Diciembre	214 600	104,48

Referencia de comienzo de trimestre

Enero	205 400	100
Febrero	206 600	100,58
Marzo	206 900	100,73
Abril	207 700	100
Mayo	211 000	101,59
Junio	211 200	101,69
Julio	212 400	100
Agosto	212 500	100,05
Septiembre	212 800	100,19
Octubre	213 500	100
Noviembre	214 000	100,23
Diciembre	214 600	100,52

ENTORNO MATEMÁTICO

El premio

Raquel es una gran estudiosa. Le gusta la literatura, la historia, la geografía, el arte, le gusta la política, la economía, la sociología, le gusta la ciencia, el cine y le gusta leer… ¡le gusta estudiar! Pero, sobre todo, le gusta ¡¡la música clásica!! Ha escuchado tanta música que, la mayoría de las veces, identifica una pieza con solo oír sus primeros compases. Raquel es una gran melómana.

Un día, escuchando la radio, oye que se va a iniciar un nuevo concurso televisivo con grandes premios para aquellos que tengan conocimientos de música clásica. El premio máximo asciende a ¡200 000 €! para el que consiga llegar a la final y conteste acertadamente a las 25 piezas musicales que se le propondrá. Debe acertar tanto el título de la obra como el autor. Raquel decide presentarse y… ¡consigue ganar el premio!

¿Qué se puede hacer con 200 000 €? –se pregunta Raquel. Tal vez, este dinero le diera para una buena temporada sin preocupaciones y poder dedicarse a sus numerosas aficiones intelectuales.

En el banco, le proponen ingresar el dinero con un interés anual del 6%. Raquel podrá sacar una cantidad fija cada mes para sus gastos hasta que se acabe el dinero depositado y los intereses generados (en realidad, es como si Raquel fuera el banco y el banco un cliente que pide un préstamo de 200 000 € a Raquel).

a) Si Raquel quiere tener dinero para 15 años, ¿cuánto podrá sacar cada mes?

b) Si Raquel quiere disponer de 3000 € cada mes, ¿para cuántos meses tendrá dinero?

c) Si Raquel quiere que nunca se agote el dinero, ¿cuánto podrá sacar como máximo cada mes? En este caso y si decide retirar todo el dinero al cabo de 10 años, ¿cuánto le quedará?

d) Durante los dos primeros años ha estado sacando 1500 € mensuales. Pasado este tiempo decide sacar 1000 € mensuales, ¿cuántos años podrá contar con esa mensualidad?

Raquel quiere controlar la evolución de su inversión y para ello elabora una hoja de cálculo:

	A	B	C	D	E	F
1	Periodo	Mensualidad	Queda antes	Intereses	Gastado	Queda después
2	1		200 000			
3	2					
4	3					
5	4					
6	5					
7	6					
8	7					
9	8					
10	…					

Raquel introduce en la casilla B2 la mensualidad que quiere sacar.

e) ¿Qué fórmula debe introducir en la casilla D2 sabiendo que el interés anual es del 6% y la capitalización mensual?

f) ¿Qué fórmula debe introducir en la casilla E2? ¿Y en la F2?

g) ¿Qué fórmulas debe introducir en la segunda fila B3-F3?

A partir de la siguiente fila, simplemente tiene que copiar las casillas correspondientes de la fila anterior para poder estudiar la evolución del préstamo.

Una vez elaborada la tabla:

h) Investiga la evolución del préstamo introduciendo diferentes opciones.

i) Contesta a las preguntas de los apartados a, b, c y d de esta misma página.

a) $m = \dfrac{200\,000 \cdot \dfrac{0,06}{12} \cdot \left(1+\dfrac{0,06}{12}\right)^{12\cdot 15}}{\left(1+\dfrac{0,06}{12}\right)^{12\cdot 15} - 1} = 1687,71\ €$

b) $3000 = \dfrac{200\,000 \cdot \dfrac{0,06}{12} \cdot \left(1+\dfrac{0,06}{12}\right)^{12t}}{\left(1+\dfrac{0,06}{12}\right)^{12t} - 1} = \dfrac{1000 \cdot 1,005^{12t}}{1,005^{12t} - 1} \Rightarrow 3000 \cdot 1,005^{12t} - 3000 = 1000 \cdot 1,005^{12t} \Rightarrow$

$\Rightarrow 2000 \cdot 1,005^{12t} = 3000 \Rightarrow 1,005^{12t} = 1,5 \Rightarrow t = \dfrac{\log 1,5}{12 \cdot \log 1,005} = 6,77$ años $\simeq 81$ meses

c) Para que nunca se agote el dinero, Raquel debe sacar justo los intereses producidos en un mes, es decir, $200\,000 \cdot \dfrac{0,06}{12} = 1000$ €.En este caso, en cualquier momento dispondrá de los 200 000 € iniciales.

d) Contestaremos esta pregunta al final, ayudados de la hoja de cálculo.

e) D2→=C2*0,06/12

f) E2→=B2–D2 y F2→=C2–E2

g) En B3 debe introducir la mensualidad que desea sacar en ese periodo, si suponemos que siempre saca la misma mensualidad podemos poner B3→=B2.

En C3 hay que poner la cantidad que aparece en F2, es decir, C3→=F2

En D3, E3 y F3 podemos copiar las fórmulas de D2, E2 y F2 respectivamente, es decir, D3→=C3*0,06/12; E3→=B3–D3y F3→=C3–E3.

i) Podemos contestar ahora los apartados a, b, c y d ayudados de la hoja de cálculo. En particular responderemos al apartado d.

Si introducimos una mensualidad de 1500 € durante 24 periodos (dos años) obtenemos que el capital que queda tras esos dos primeros años es 187 284,02 €, por tanto, el dinero todavía durará:

$1000 = \dfrac{187\,284,02 \cdot \dfrac{0,06}{12} \cdot \left(1+\dfrac{0,06}{12}\right)^{12t}}{\left(1+\dfrac{0,06}{12}\right)^{12t} - 1} = \dfrac{936,42 \cdot 1,005^{12t}}{1,005^{12t} - 1} \Rightarrow 1000 \cdot 1,005^{12t} - 1000 = 936,42 \cdot 1,005^{12t} \Rightarrow$

$\Rightarrow 63,5799 \cdot 1,005^{12t} = 1000 \Rightarrow 1,005^{12t} = 15,7282 \Rightarrow t = \dfrac{\log 15,7282}{12 \cdot \log 1,005} = 46,04 \simeq 46$ años

	A	B	C	D	E	F
1	Periodo	Mensualidad	Queda antes	Intereses	Gastado	Queda después
2	1	1500,00	200000,00	1000,00	500,00	199500,00
3	2	1500,00	199500,00	997,50	502,50	198997,50
4	3	1500,00	198997,50	994,99	505,01	198492,49
5	4	1500,00	198492,49	992,46	507,54	197984,95
6	5	1500,00	197984,95	989,92	510,08	197474,87
…	…	…	…	…	…	…
21	20	1500,00	190060,14	950,30	549,70	189510,44
22	21	1500,00	189510,44	947,55	552,45	188957,99
23	22	1500,00	188957,99	944,79	555,21	188402,78
24	23	1500,00	188402,78	942,01	557,99	187844,80
25	24	1500,00	187844,80	939,22	560,78	187284,02

AUTOEVALUACION

Comprueba qué has aprendido

1. Calcula el valor del logaritmo $\log_{\frac{1}{3}} \sqrt[4]{9}$

$$\log_{\frac{1}{3}} \sqrt[4]{9} = x \Rightarrow \left(\frac{1}{3}\right)^x = \sqrt[4]{9} \Rightarrow 3^{-x} = 3^{\frac{1}{2}} \Rightarrow x = -\frac{1}{2} \Rightarrow \log_{\frac{1}{3}} \sqrt[4]{9} = -\frac{1}{2}$$

2. Elimina los logaritmos en la siguiente expresión y calcula el valor de *a*:

$$-1 + \log a = \log 2 + 3\log 3$$

$$-1 + \log a = \log 2 + 3\log 3 \Rightarrow \log a = 1 + \log 2 + \log 3^3 = \log\left(10 \cdot 2 \cdot 3^3\right) \Rightarrow a = 10 \cdot 2 \cdot 3^3 = 540$$

3. Sabiendo que $\log 3 = 0,477$. Calcula, sin utilizar la calculadora, $\log 0,090$.

$$\log 0,090 = \log\frac{9}{100} = \log 9 - \log 100 = \log 3^2 - 2 = 2\log 3 - 2 = 2 \cdot 0,477 - 2 = -1,046$$

4. El precio de una *tablet* pierde un 40 % de su valor al comprarla y después cada año que pasa pierde un 5% del valor que tenía el año inmediatamente anterior. Una *tablet* con tres años vale 90 €, ¿cuánto costó al comprarla?

Si P_i es el precio original de la *tablet*, tras *t* años el precio será $P_f = 0,6P_i(1-0,05)^t$, por tanto, tenemos:

$$90 = 0,6P_i(1-0,05)^3 \Rightarrow P_i = \frac{90}{0,6 \cdot 0,95^3} = 174,95 \text{ €}$$

5. Calcula la suma de los 15 primeros términos de la progresión: 9, 3, 1, $\frac{1}{3}$,…

Se trata de una progresión geométrica con $a_1 = 9$ y $r = \frac{1}{3}$, por tanto:

$$S_{15} = \frac{a_1\left(r^{15}-1\right)}{r-1} = \frac{9\left[\left(\frac{1}{3}\right)^{15} - 1\right]}{\frac{1}{3} - 1} = 13,5$$

6. Calcula la diferencia de intereses ganados al colocar 1250 € al 5% de interés anual durante 3 años si el interés aplicado es simple o compuesto con capitalización anual.

Datos: $C_i = 1250$ € $\quad r = 0,05 \quad t = 3$ años

Interés simple: $I = C_i rt = 1250 \cdot 0,05 \cdot 3 = 187,5$ €

Interés compuesto: $I = C_i(1+r)^t = 1250 \cdot (1+0,05)^3 - 1250 = 197,03$ €

Por tanto, la diferencia de intereses es $197,03 - 187,5 = 9,53$ €

7. **¿Qué anualidad ha de entregarse al principio de cada año para reunir un capital de 15 000 € después de 8 años a un interés del 5%?**

Datos: $C = 15000$ € $\quad r = 0,05 \quad t = 8$ años

$$C = \frac{a(1+r)\left[(1+r)^t - 1\right]}{r} \Rightarrow a = \frac{Cr}{(1+r)\left[(1+r)^t - 1\right]} = \frac{15000 \cdot 0,05}{(1+0,05)\left[(1+0,05)^8 - 1\right]} = 1496,03 \text{ €}$$

8. **¿Qué anualidad ha de entregarse al principio de cada mes para saldar una deuda inicial de 25 000 € en 6 años a un interés anual del 4 %?**

Datos: $C = 25000$ € $\quad r = 0,04 \quad t = 6$ años $\quad$ Pagos: Mensuales ($k = 12$)

$$a = \frac{C \cdot \frac{r}{k} \cdot \left(1+\frac{r}{k}\right)^{kt}}{\left(1+\frac{r}{k}\right)^{kt} - 1} = \frac{25000 \cdot \frac{0,04}{12} \cdot \left(1+\frac{0,04}{12}\right)^{72}}{\left(1+\frac{0,04}{12}\right)^{72} - 1} = 391,13 \text{ €}$$

9. **Calcula el TAE correspondiente al 7,5 % anual con periodo de capitalización cuatrimestral.**

$$\text{TAE} = \left[\left(1+\frac{r}{k}\right)^k - 1\right] \cdot 100 = \left[\left(1+\frac{0,075}{3}\right)^3 - 1\right] \cdot 100 = 7,69\,\%$$

10. **Calcula el número de años necesarios para que se triplique una cantidad colocada al 10 % anual con capitalización mensual.**

Datos: $C_f = 3C_i$ € $\quad r = 0,1 \quad$ Periodo de capitalización: Mensual ($k = 12$)

$$C_f = C_i\left(1+\frac{r}{k}\right)^{kt} \Rightarrow 3C_i = C_i\left(1+\frac{0,1}{12}\right)^{12t} \Rightarrow \left(1+\frac{0,1}{12}\right)^{12t} = 3 \Rightarrow t = \frac{\log 3}{12\log\left(1+\frac{0,1}{12}\right)} = 11,03 \text{ años}$$

Relaciona y contesta

Elige la única respuesta correcta en cada caso

1. **Una cantidad se aumenta en un 12% y, después, el resultado se disminuye también en un 12%. El valor de la cantidad final es:**

A. Superior a la inicial

B. Inferior a la inicial

C. Igual que la inicial

D. Ninguna de las anteriores

$1,12 \cdot 0,88 = 0,9856$, por tanto, el precio inicial ha disminuido un 1,44 %, la respuesta B.

2. **La suma de las 10 primeras potencias de 2 (contando que la primera es 2^0) es:**

A. $2^{10}-2$

B. 2^9-2

C. 2^9+2

D. Ninguna de las anteriores

Se trata de una progresión geométrica con $a_1 = 1$ y $r = 2$, por tanto:

$$S_{10} = \frac{a_1\left(r^{10}-1\right)}{r-1} = \frac{1 \cdot \left(2^{10}-1\right)}{2-1} = 2^{10} - 1$$, la respuesta D.

3. **Si por unos pantalones se han pagado 27 € habiendo sufrido dos rebajas consecutivas en su precio del 20 % y del 25 %, su precio inicial era:**

A. 39,15 € **B.** 40,50 € **C.** 45 € **D.** 49,09 €

Si *x* es el precio inicial de los pantalones, tenemos:

$0,75 \cdot 0,8x = 27 \Rightarrow x = \dfrac{27}{0,75 \cdot 0,8} = 45$ €, la respuesta C.

Señala, en cada caso, las respuestas correctas

4. **Di si las siguientes afirmaciones son verdaderas o falsas:**

A. La TAE es igual al interés nominal cuando el periodo de capitalización es anual.

B. Las progresiones geométricas son siempre crecientes.

C. Las cuatro quintas partes de una cantidad equivalen al 80% de esta cantidad.

D. El tipo de interés compuesto no puede ser inferior al 1% anual.

Las afirmaciones A y C son verdaderas.

La afirmación B es falsa, basta considerar cualquier progresión geométrica de razón $r < 1$.

D también es falsa, nada impide que, por ejemplo, $r = 0,5$ % anual

5. **Para un cliente que acude a una entidad financiera, el tipo de interés indicado en *A* es preferible al tipo de interés indicado en *B*.**

A. *A*: Simple al 4 % anual

B: Compuesto al 4 % anual

B. *A*: Compuesto al 4 % anual con capitalización anual

B: Compuesto al 4 % anual con capitalización mensual

C. *A*: Compuesto al 4 % anual con capitalización mensual

B: TAE 4,075

D. *A*: Compuesto al 4 % anual con capitalización diaria

B: TAE 4,075

Depende de a qué acude, suponiendo que es a realizar un depósito:

A es falso, ya que con interés compuesto, los intereses generados se acumulan para generar nuevos intereses, por lo que la opción *A* nunca será mejor que la *B*.

B también es falsa, en la opción *B* vamos generando intereses mensualmente, que se acumulan generando nuevos intereses mes a mes, por lo que esta opción es mejor que la opción *A*.

C también es falsa, ya que la opción *A* equivale a un

$$\text{TAE} = \left[\left(1 + \frac{0,04}{12}\right)^{12} - 1\right] \cdot 100 = 4,074 \text{ \%}$$

D es verdadera, ya que la opción *A* equivale a un

$$\text{TAE} = \left[\left(1 + \frac{0,04}{365}\right)^{365} - 1\right] \cdot 100 = 4,081 \text{ \%}$$

Elige la relación correcta entre las dos afirmaciones dadas

6. Se está calculando el $\log_a 2$. Se consideran las afirmaciones:

1. La base *a* es positiva e inferior a la unidad.

2. El resultado es un número real negativo.

A. $1 \Leftrightarrow 2$

B. $1 \Rightarrow 2$ pero $2 \not\Rightarrow 1$

C. $2 \Rightarrow 1$ pero $1 \not\Rightarrow 2$

D. Nada de lo anterior.

$\log_a 2 = \dfrac{\log 2}{\log a}$ y $\log 2 > 0$, por tanto, si $0 < a < 1$ tenemos $\log a < 0$ y así $\log_a 2 < 0$; recíprocamente, si $\log_a 2 < 0$ tenemos $\log a < 0$ y así $0 < a < 1$. Por tanto, la relación correcta es A.

Señala el dato innecesario para contestar

7. Se quiere calcular la TAE correspondiente a un interés nominal anual. Para ello se dan los siguientes datos:

1. El *r* % anual

2. El capital invertido

3. El tiempo que dura la inversión

4. El tipo de capitalización

A. Sobran los datos 1 y 2.

B. Sobran los datos 2 y 3.

C. Sobran los datos 3 y 4.

D. El primer dato es innecesario.

Como $\text{TAE} = \left[\left(1+\dfrac{r}{k}\right)^k - 1\right]\cdot 100$, donde r es el interés anual en tanto por uno y k el tipo de capitalización, la respuesta correcta es B.