ARITMÉTICA MERCANTIL

Rédito.

El rédito o tanto por ciento es el interés producido por 100 unidades monetarias en un año.

Tanto por uno anual.

Es el beneficio producido por una unidad monetaria en un año. Es la centésima parte del rédito.

Interés simple.

Es el que se obtiene cuando los intereses producidos durante el tiempo que dura una inversión se deben únicamente al capital inicial. Cuando se utiliza el interés simple, los intereses son función únicamente del interés principal, el número de periodos y la tasa de interés.

El interés producido I por un capital inicial C_o a un interés en tanto por uno de r y durante un periodo t viene dado por la expresión:

$$I = C_o \cdot r \cdot t$$

El capital final C será:

$$C = C_o \cdot (1 + r \cdot t)$$

Interés compuesto.

Un capital se dice que está colocado a interés compuesto cuando al final de cada unidad de tiempo los intereses se acumulan al capital para producir a su vez nuevos intereses.

Calculo del interés compuesto

$$C = C_o \cdot (1 + r)^t$$

Donde:

- **C_o** es el capital inicial
- **C** es el capital final
- **r** es el rédito expresado en tanto por uno y referido a la unidad de tiempo en que se cobran o se pagan los intereses.
- **t** tiempo. Expresa el número de pagos que se hacen, está relacionado con r.

Ejemplo 1.

Calcular en que se transforma 1 € colocado al 6% anual al cabo de 10 años en los siguientes casos:

- Capitalización anual. $C = 1 \cdot (1 + 0{,}06)^{10} = 1{,}79$ €
- Capitalización semestral. $C = 1 \cdot \left(1 + \frac{6}{100 \cdot 2}\right)^{10 \times 2} = 1{,}806$ €
- Capitalización trimestral. $C = 1 \cdot \left(1 + \frac{6}{100 \cdot 4}\right)^{10 \times 4} = 1{,}814$ €
- Capitalización mensual. $C = 1 \cdot \left(1 + \frac{6}{100 \cdot 12}\right)^{10 \times 12} = 1{,}819$ €

Ejemplo 2.
Calcular en que se convierte en 4 años 3000 € colocado al 12% de interés compuesto si la capitalización se realiza trimestralmente.

$$C = 3000 \cdot \left(1 + \frac{12}{100 \cdot 4}\right)^{4 \times 4} = 4814{,}119\ €$$

T.A.E.

La **Tasa Anual Equivalente** (T.A.E.) es una referencia orientativa del coste real de una inversión o préstamo.

La TAE es un indicador que, en forma de tanto por ciento anual, revela el coste o rendimiento efectivo de un producto financiero, ya que incluye el tipo de interés nominal, los gastos y comisiones bancarias y el plazo de la operación. La TAE se diferencia del tipo de interés en que éste no recoge ni los gastos ni las comisiones; sólo la compensación que recibe el propietario del dinero por cederlo temporalmente.

El cálculo de la TAE está basado en el tipo de interés compuesto y en la hipótesis de que los intereses obtenidos se vuelven a invertir al mismo tipo de interés.

Si no se tienen en cuenta las comisiones:

$$\text{T.A.E.} = (1 + r)^t - 1$$

El calculo se refiere a un año y tiene en cuenta los periodos de capitalización.

Ejemplo 3.
Calcular la TAE de un interés nominal del 6% anual con capitalización semestral, trimestral, mensual.

- Semestral: $TAE = \left(1 + \frac{6}{100 \cdot 2}\right)^2 - 1 = 6{,}09\%$
- Trimestral: $TAE = \left(1 + \frac{6}{100 \cdot 4}\right)^4 - 1 = 6{,}136\%$
- Mensual: $TAE = \left(1 + \frac{6}{100 \cdot 12}\right)^4 - 1 = 6{,}168\%$

Anualidades de capitalización.

Se denomina anualidades de capitalización a la cantidad fija que se coloca al principio de cada periodo para formar un capital al cabo de un cierto número de periodos.

Su cálculo está relacionado con la suma de n términos de una progresión geométrica.

El capital final C que se obtiene mediante una aportación de “a” unidades monetarias durante un número de periodos “t” a un interés r viene dado por la expresión:

$$C = a \cdot \frac{(1 + r)^{t+1} - (1 + r)}{r}$$

Ejemplo 4.

Una persona ingresa durante 4 años, en un banco 1200 €, al principio de cada año. El banco le abona unos intereses al 6% anual. ¿Qué capital se habrá formado al final del cuarto año?

$$C = a \cdot \frac{(1+r)^{t+1} - (1+r)}{r} = \left\{ \begin{array}{c} a = 1200 \\ r = \dfrac{6}{100} = 0{,}06 \\ t = 4 \end{array} \right\} = 1200 \cdot \frac{(1+0{,}06)^{4+1} - (1+0{,}06)}{0{,}06} = 5564{,}51\ €$$

Ejemplo 5.

Una persona ingresa durante 4 años, en un banco 100 €, al principio de cada mes. El banco le abona unos intereses al 6% anual. ¿Qué capital se habrá formado al final del cuarto año?

$$C = a \cdot \frac{(1+r)^{t+1} - (1+r)}{r} = \left\{ \begin{array}{c} a = 100 \\ r = \dfrac{6}{100 \cdot 12} = 0{,}005 \\ t = 4 \cdot 12 = 48 \end{array} \right\} = 100 \cdot \frac{(1+0{,}005)^{48+1} - (1+0{,}005)}{0{,}005} = 5436{,}83\ €$$

Ejemplo 6.

Que capital se deberá aportar trimestralmente para generar un capital 60000 € en cinco años a un interés del 8% anual.

$$C = a \cdot \frac{(1+r)^{t+1} - (1+r)}{r} : \left\{ \begin{array}{c} C = 60000 \\ r = \dfrac{8}{100 \cdot 4} = 0{,}02 \\ t = 5 \cdot 4 = 20 \end{array} \right\} : 60000 = a \cdot \frac{(1+0{,}02)^{20+1} - (1+0{,}02)}{0{,}02}$$

$$60000 = a \cdot 24{,}783 \quad : \quad a = \frac{60000}{24{,}783} = 2420.98\ €$$

Anualidades de amortización.

Se llama anualidad de amortización a la cantidad que se coloca periódicamente a interés compuesto con objeto de extinguir (amortizar) una deuda junto con los interés que esta produce al cabo de cierto tiempo.

Si se debe extinguir una deuda D y sus intereses mediante t pagos iguales a "a" al final de cada periodo supuesto un interés r, se cumplirá:

$$D = a \cdot \frac{(1+r)^t - 1}{r \cdot (1+r)^t}$$

o también:

$$a = D \cdot \frac{r \cdot (1+r)^t}{(1+r)^t - 1}$$

Ejemplo 7.

Que deuda ha amortizado una cooperativa mediante cuatro anualidades de 9000 e al 8% anual.

$$D = a \cdot \frac{(1+r)^t - 1}{r \cdot (1+r)^t} = \left\{ \begin{array}{c} a = 9000 \\ r = 0{,}08 \\ t = 4 \end{array} \right\} = 9000 \cdot \frac{(1+0{,}08)^4 - 1}{0{,}08 \cdot (1+0{,}08)^4} = 29809{,}14\ €$$

Ejemplo 8.

Un ayuntamiento ha recibido un préstamo bancario de 30 millones de euros a amortizar en 15 años. ¿Qué cantidad deberá pagar bimensualmente, si la operación se concertó al 3,5% anual?

$$a = D \cdot \frac{r \cdot (1+r)^t}{(1+r)^t - 1} = \left\{ \begin{array}{c} D = 15000000 \\ r = \dfrac{3,5}{100 \cdot 6} = \dfrac{7}{1200} \\ t = 6 \cdot 15 = 90 \end{array} \right\} = 15000000 \cdot \frac{\dfrac{7}{1200} \cdot \left(1 + \dfrac{7}{1200}\right)^{90}}{\left(1 + \dfrac{7}{1200}\right)^{90} - 1} = 214701,99 \text{ €}$$

Ejemplo 9

Que préstamo puede pedir una familia a un plazo de 15 años si mensualmente puede amortizar 1100 € y el banco le cobra un interés de 6% anual.

$$D = a \cdot \frac{(1+r)^t - 1}{r \cdot (1+r)^t} = \left\{ \begin{array}{c} a = 1100 \\ r = \dfrac{6}{100 \cdot 12} = 0,005 \\ t = 15 \cdot 12 = 180 \end{array} \right\} = 1100 \cdot \frac{(1+0,005)^{180} - 1}{0,005 \cdot (1+0,005)^{180}} = 130353,87 \text{ €}$$

Ejemplo 10.

En cuantas mensualidades deberíamos pagar una deuda de 150000 al 6% si en cada cuota podemos amortizar 1200 €.

$$D = a \cdot \frac{(1+r)^t - 1}{r \cdot (1+r)^t} : \left\{ \begin{array}{c} D = 150000 \\ a = 1200 \\ r = \dfrac{6}{100 \cdot 12} = 0,005 \end{array} \right\} : 150000 = 1200 \cdot \frac{(1+0,005)^t - 1}{0,005 \cdot (1+0,005)^t}$$

$$\frac{150000}{1200} = \frac{1,005^t - 1}{0,005 \cdot 1,005^t} \quad : \quad 125 \cdot 0,005 \cdot 1,005^t = 1,005^t - 1$$

$$0,625 \cdot 1,005^t = 1,005^t - 1 \quad : \quad 1 = 1,005^t - 0,625 \cdot 1,005^t$$

$$1 = 0,375 \cdot 1,005^t \quad : \quad 1,005^t = \frac{1}{0,375}$$

Tomando logaritmos se despeja t.

$$\log\left(1,005^t\right) = \log\left(\frac{1}{0,375}\right) \quad : \quad t \cdot \log 1,005 = \log\left(\frac{1}{0,375}\right)$$

$$t = \frac{\log\left(\dfrac{1}{0,375}\right)}{\log 1,005} = 196,65 \text{ mensualidades}$$