10 Derivadas

ACTIVIDADES INICIALES

10.I. Halla la ecuación punto-pendiente de la recta que pasa por los puntos $A(1, 3)$ y $B(3, 7)$, calculando previamente su pendiente.

$m = \frac{7 - 3}{3 - 1} = 2$. Por tanto, la ecuación será $y - 3 = 2(x - 1)$.

10.II. Toma logaritmos en la expresión: $A = \frac{\sqrt{xy^3}}{z}$

$$\log A = \log\left(\frac{\sqrt{xy^3}}{z}\right) = \log\sqrt{xy^3} - \log z = \frac{1}{2}\log(xy^3) - \log z = \frac{1}{2}\log x + \frac{3}{2}\log y - \log z$$

10.III. Escribe en forma algebraica las siguientes expresiones:

a) $\log A = 3\log 2 - 3\log x + 2\log y - 4\log z$

b) $\log B = \frac{1}{2}[3\log x + \log y] - \log z$

a) $\log A = \log\frac{2^3 \cdot y^2}{x^3 \cdot z^4} \Rightarrow A = \frac{8y^2}{x^3 \cdot z^4}$

b) $\log B = \log\frac{x^{\frac{3}{2}} \cdot y^{\frac{1}{2}}}{z} \Rightarrow B = \frac{x\sqrt{x \cdot y}}{z}$

EJERCICIOS PROPUESTOS

10.1. Considera la función $f(x) = x^2 - 1$. Calcula con ayuda de la calculadora:

a) $TVM\ f[1, 100]$ c) $TVM\ f[1, 2]$ e) $TVM\ f[1; 1{,}1]$ g) $TVM\ f[1; 1{,}001]$

b) $TVM\ f[1, 0]$ d) $TVM\ f[1; 1{,}5]$ f) $TVM\ f[1; 1{,}01]$ h) $TVM\ f[1; 1{,}0001]$

¿A qué valor se acercará $TVM\ f[1; 1{,}00001]$? ¿Cuál será el valor de $TVI\ f(1)$?

a) $\frac{f(100) - f(1)}{100 - 1} = \frac{9999 - 0}{99} = 101$

b) $\frac{f(10) - f(1)}{10 - 1} = \frac{99 - 0}{9} = 11$

c) $\frac{f(2) - f(1)}{2 - 1} = \frac{3 - 0}{1} = 3$

d) $\frac{f(1{,}5) - f(1)}{1{,}5 - 1} = \frac{1{,}25 - 0}{0{,}5} = 2{,}5$

e) $\frac{f(1{,}1) - f(1)}{1{,}1 - 1} = \frac{0{,}21 - 0}{0{,}1} = 2{,}1$

f) $\frac{f(1{,}01) - f(1)}{1{,}01 - 1} = \frac{0{,}0201 - 0}{0{,}01} = 2{,}01$

g) $\frac{f(1{,}001) - f(1)}{1{,}001 - 1} = \frac{0{,}002001 - 0}{0{,}001} = 2{,}001$

h) $\frac{f(1{,}0001) - f(1)}{1{,}0001 - 1} = \frac{0{,}00020001 - 0}{0{,}0001} = 2{,}0001$

Está claro que $TVM\ f[1; 1{,}00001]$ se acerca a 2:

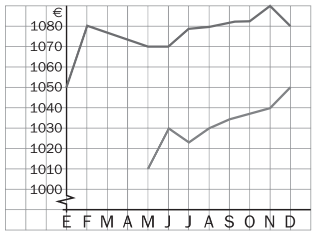
$$TVM\ f[1; 1{,}00001] = \frac{f(1{,}00001) - f(1)}{1{,}00001 - 1} = \frac{0{,}00002 - 0}{0{,}00001} = 2{,}00001 \approx 2$$

$$TVI\ f(1) = \lim_{h\to 0}\frac{f(1 + h) - f(1)}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{(1 + h)^2 - 1 - 0}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{h^2 + 2h}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{h(h + 2)}{h} = \lim_{h\to 0}(h + 2) = 2$$

10.2. La siguiente gráfica muestra la evolución de un capital invertido en dos fondos de inversión diferentes y en distintos momentos.

a) ¿Cuál es la *TVM* de cada uno de los capitales desde el inicio? ¿Y en los últimos 4 meses? ¿Y en el último mes?

b) ¿Puedes decidir qué fondo es más rentable?



Si llamamos t a los meses transcurridos desde el comienzo del estudio, f a la función superior y g a la función inferior, podemos contestar, observando que el mes de inicio es diferente en los fondos de inversión.

a) Desde el inicio:

$$TVM\ f[0, 11] = \frac{f(11) - f(0)}{11 - 0} = \frac{1080 - 1050}{11} = 2{,}73;\ TVM\ g[4, 11] = \frac{g(11) - g(4)}{11 - 4} = \frac{1050 - 1010}{7} = 5{,}71$$

En los últimos cuatro meses:

$$TVM\ f[7, 11] = \frac{f(11) - f(7)}{11 - 7} = \frac{1080 - 1080}{4} = 0;\ TVM\ g[7, 11] = \frac{g(11) - g(7)}{11 - 7} = \frac{1050 - 1030}{4} = 5$$

En el último mes:

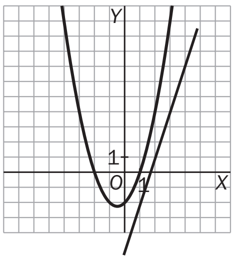
$$TVM\ f[10, 11] = \frac{f(11) - f(10)}{11 - 10} = \frac{1080 - 1090}{1} = -10;\ TVM\ g[10, 11] = \frac{g(11) - g(10)}{11 - 10} = \frac{1050 - 1040}{1} = 10$$

b) Es más rentable el fondo de la gráfica inferior.

10.3. Representa la función $f(x) = x^2 + x - 2$. Dibuja la tangente a la curva obtenida en el punto de abscisa $x = 1$.

a) ¿Cuál es la pendiente de dicha recta?

b) Calcula $f'(1)$ y compara los resultados.



a) La pendiente de la recta tangente es 3.

b) $$f'(1) = \lim_{h \to 0} \frac{f(1 + h) - f(1)}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{(1 + h)^2 + 1 + h - 2 - (1^2 + 1 - 2)}{h} =$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{h^2 + 3h}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{h \cdot (h + 3)}{h} = \lim_{h \to 0} (h + 3) = 3$$

Ambos valores coinciden.

10.4. Completa la tabla para la función $f(x) = x^3$ en $a = 1$.

h	1	0,5	0,1	0,01	0,001
$\frac{f(a + h) - f(a)}{h}$	7	4,75	3,31	3,0301	3,003001

10.5. Aplicando la definición de derivada, obtén la derivada de las siguientes funciones.

a) $f(x) = (x - 1)^2$ b) $f(x) = \dfrac{1}{x}$ c) $f(x) = \sqrt{x}$

a) $$f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x + h) - f(x)}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{(x + h - 1)^2 - (x - 1)^2}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{h^2 + 2hx - 2h}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{h \cdot (h + 2x - 2)}{h} =$$

$$= \lim_{h \to 0} (h + 2x - 2) = 2x - 2$$

b) $$f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x + h) - f(x)}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{\dfrac{1}{x + h} - \dfrac{1}{x}}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{\dfrac{x - x - h}{x(x + h)}}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{-h}{hx(x + h)} = \lim_{h \to 0} \frac{-1}{x(x + h)} = \frac{-1}{x^2}$$

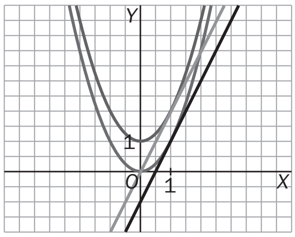
c) $$f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x + h) - f(x)}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{\sqrt{x + h} - \sqrt{x}}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{\sqrt{x + h} - \sqrt{x}}{h} \cdot \frac{\sqrt{x + h} + \sqrt{x}}{\sqrt{x + h} + \sqrt{x}} =$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{x + h - x}{(\sqrt{x + h} + \sqrt{x})h} = \lim_{h \to 0} \frac{h}{(\sqrt{x + h} + \sqrt{x})h} = \lim_{h \to 0} \frac{1}{(\sqrt{x + h} + \sqrt{x})} = \frac{1}{2\sqrt{x}}$$

10.6. Obtén las funciones derivadas de las funciones $f(x) = x^2$ y $g(x) = x^2 + 1$. Dibuja las gráficas de f y g, y observa cómo son las tangentes en puntos de igual abscisa. ¿Confirma tu cálculo anterior dicha observación?

$$f'(x) = \lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{(x+h)^2 - x^2}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{2hx + h^2}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{h(2x+h)}{h} = \lim_{h\to 0}(2x+h) = 2x$$

$$g'(x) = \lim_{h\to 0}\frac{g(x+h)-g(x)}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{(x+h)^2 + 1 - (x^2+1)}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{2hx + h^2}{h} = 2x$$



En el dibujo se han trazado las tangentes a las curvas en los puntos de abscisa 1. Se observa que dichas tangentes son paralelas, es decir, tienen la misma pendiente. Igual ocurrirá si elegimos otra abscisa para trazar las tangentes.

El resultado es el esperado, ya que ambas funciones tienen la misma función derivada, que es la que nos dice cuánto vale la pendiente de la recta tangente a la curva.

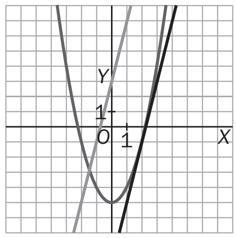
10.7. Calcula el punto de la gráfica de la función $f(x) = x^2 - 5$ en el que la tangente es paralela a la recta $y = 4x + 3$. Dibuja posteriormente la curva, la recta dada, y traza la tangente en el punto obtenido.

La pendiente de la recta tangente debe ser la misma que la de $y = 4x + 3$, es decir, 4. Así pues, la derivada en dicho punto debe ser 4: $f'(x) = 4$

Calculemos primero la derivada de $f(x)$ y luego la igualamos a 4:

$$f'(x) = \lim_{h\to 0}\frac{(x+h)^2 - 5 - (x^2-5)}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{2hx + h^2}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{h(2x+h)}{h} = 2x$$

$f'(x) = 4 \Rightarrow 2x = 4 \Rightarrow x = 2$. El punto buscado es $P(2, -1)$.



10.8. a) Deduce la derivada de $f(x) = \dfrac{1}{x-1}$.

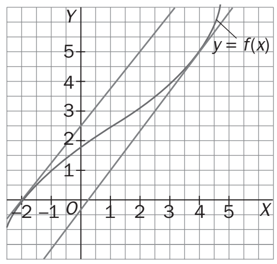
b) ¿Hay algún punto en la curva $y = f(x)$ en el que la tangente sea horizontal? ¿Y en el que la tangente tenga pendiente positiva?

a) $$f'(x) = \lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{\dfrac{1}{x+h-1} - \dfrac{1}{x-1}}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{x-1-(x+h-1)}{h\cdot(x+h-1)\cdot(x-1)} =$$

$$= \lim_{h\to 0}\frac{-h}{h\cdot(x+h-1)\cdot(x-1)} = \lim_{h\to 0}\frac{-1}{(x+h-1)\cdot(x-1)} = \frac{-1}{(x-1)\cdot(x-1)} = \frac{-1}{(x-1)^2}$$

b) En un punto con tangente horizontal debe anularse la derivada. Pero $f'(x) = \dfrac{-1}{(x-1)^2}$ nunca se anula, ya que el numerador es distinto de cero para cualquier valor de x. Así pues, no hay ningún punto de la curva con tangente horizontal. Además, como el denominador es siempre positivo y el numerador es -1, tampoco hay puntos cuya tangente tenga pendiente positiva.

10.9. **Observa la siguiente gráfica. Teniendo en cuenta que las rectas trazadas son tangentes a la función $f(x)$, halla los valores de las siguientes derivadas.**



a) $f'(-2)$

b) $f'(4)$

a) $f'(-2) = \dfrac{2{,}5}{2} = 1{,}25$

b) $f'(-4) = \dfrac{4}{3} = 1{,}\widehat{3}$

10.10. **¿Hay algún punto en la gráfica de $f(x) = x^t$, siendo t un número impar, en el que la tangente sea una recta decreciente?**

Se pregunta si hay algún valor de x para el que la derivada de la función sea negativa.

La derivada es $f'(x) = t \cdot x^{t-1}$. Como t es impar, entonces $t - 1$ es par y, por tanto, x^{t-1} nunca será negativo, ya que su exponente es par. Así que si $t > 0$, no hay ningún punto en el que la tangente a la gráfica sea una recta decreciente. Y si $t < 0$, todos menos el 0 tienen la recta decreciente. (En $x = 0$, la tangente es horizontal.)

10.11. **Calcula las derivadas de las funciones siguientes.**

a) $y = x^3$

b) $y = x^8$

c) $y = \dfrac{1}{x^2}$

d) $y = (\sqrt{x})^3$

a) $y' = 3x^2$

b) $y' = 8x^7$

c) $y' = -2x^{-3} = \dfrac{-2}{x^3}$

d) $y' = \dfrac{3}{2}x^{\frac{1}{2}} = \dfrac{3\sqrt{x}}{2}$

10.12. **Halla la pendiente de la tangente a la curva $f(x) = \sqrt[3]{x}$ en el punto de abscisa $\dfrac{1}{8}$.**

La pendiente de la recta tangente en el punto de abscisa $x = \dfrac{1}{8}$ es $m = f'\left(\dfrac{1}{8}\right)$.

Hallemos la derivada de la función $f(x) = \sqrt[3]{x} = x^{\frac{1}{3}}$ y calculemos su valor en $x = \dfrac{1}{8}$:

$f'(x) = \dfrac{1}{3}x^{-\frac{2}{3}} = \dfrac{1}{3\sqrt[3]{x^2}} \rightarrow f'\left(\dfrac{1}{8}\right) = \dfrac{1}{3\sqrt[3]{\left(\dfrac{1}{8}\right)^2}} = \dfrac{1}{3 \cdot \dfrac{1}{4}} = \dfrac{4}{3}$ es la pendiente pedida.

10.13. **Calcula la pendiente de la tangente a $y = e^x$ en el punto de corte de esta con el eje de ordenadas.**

El punto de corte de $f(x) = e^x$ con el eje de ordenadas es $P(0, e^0) = P(0, 1)$. La pendiente de la tangente en dicho punto es $f'(0)$, hallémosla: $f'(x) = e^x \rightarrow f'(0) = e^0 = 1$.

10.14. **¿Cómo son las tangentes a las curvas $y = \ln x$ en $P(1, 0)$ e $y = \text{sen } x$ en $Q(0, 0)$?**

Calculemos el valor de la derivada correspondiente en sendas abscisas:

$f(x) = \ln x \rightarrow f'(x) = \dfrac{1}{x} \rightarrow f'(1) = \dfrac{1}{1} = 1$

$g(x) = \text{sen } x \rightarrow g'(x) = \cos x \rightarrow g'(0) = \cos 0 = 1$

Las tangentes tienen la misma pendiente y, por tanto, son paralelas.

10.15. Deriva las siguientes funciones.

a) $f(x) = x^4 \cdot x^{-2}$

b) $f(x) = \sqrt{\sqrt{x}}$

c) $f(x) = \dfrac{x}{\sqrt{x}}$

d) $f(x) = \text{sen } x + \dfrac{1}{\cos x}$

e) $f(x) = (2x - 7)(5 - 3x)$

f) $f(x) = x \cdot \text{tg } x$

g) $f(x) = \dfrac{x^2 + 1}{x^2 - 1}$

h) $f(x) = \ln (x^2 - 1)$

i) $f(x) = (\cos x)^{\frac{3}{2}}$

j) $f(x) = \dfrac{x^2}{e^x}$

a) $f'(x) = 2x$

b) $f'(x) = \dfrac{1}{4} x^{\frac{-3}{4}} = \dfrac{1}{4\sqrt[4]{x^3}}$

c) $f'(x) = \dfrac{1}{2\sqrt{x}}$

d) $f'(x) = \cos x + \dfrac{\text{sen } x}{\cos^2 x}$

e) $f'(x) = -12x + 31$

f) $f'(x) = \text{tg } x + x(1 + \text{tg}^2 x)$

g) $f'(x) = \dfrac{2x(x^2 - 1) - (x^2 + 1)2x}{(x^2 - 1)^2} = \dfrac{-4x}{(x^2 - 1)^2}$

h) $f'(x) = \dfrac{2x}{x^2 - 1}$

i) $f'(x) = \dfrac{3}{2} \cos^{\frac{1}{2}} x(-\text{sen } x) = \dfrac{-3 \text{ sen } x\sqrt{\cos x}}{2}$

j) $f'(x) = \dfrac{2x\, e^x - x^2 e^x}{e^{2x}} = \dfrac{2x - x^2}{e^x}$

10.16. Calcula el valor máximo y mínimo de las siguientes funciones en los intervalos indicados.

a) $f(x) = x^2 - 4x$ en $[1, 5]$

b) $f(x) = 3x^2 - 6x$ en $[3, 5]$

c) $f(x) = (x - 1)(x - 2)$ en $[0, 3]$

d) $f(x) = \dfrac{1}{x}$ en $[1, 4]$

a) $f'(x) = 2x - 4 = 0 \rightarrow x = 2$, que pertenece al intervalo $[1, 5]$.
$f(2) = -4$; $f(1) = -3$; $f(5) = 5$
El valor máximo de la función es 5 y se alcanza para $x = 5$.
El valor mínimo de la función es -4 y se alcanza para $x = 2$.

b) $f'(x) = 6x - 6 = 0 \rightarrow x = 1$, que no pertenece al intervalo $[3, 5]$.
$f(3) = 9$; $f(5) = 45$
El valor máximo de la función es 45 y se alcanza para $x = 5$.
El valor mínimo de la función es 9 y se alcanza para $x = 3$.

c) $f'(x) = 2x - 3 = 0 \rightarrow x = \dfrac{3}{2}$, que pertenece al intervalo $[0, 3]$.
$f\left(\dfrac{3}{2}\right) = \dfrac{-1}{4}$; $f(0) = 2$; $f(3) = 2$
El valor máximo de la función es 2 y se alcanza en los extremos del intervalo.
El valor mínimo es $\dfrac{-1}{4}$ y se alcanza en $x = \dfrac{3}{2}$.

d) $f'(x) = \dfrac{-1}{x^2} = 0$, no tiene soluciones reales.
$f(1) = 1$; $f(4) = \dfrac{1}{4}$
El valor máximo de la función es 1 y se alcanza para $x = 1$.
El valor mínimo de la función es $\dfrac{1}{4}$ y se alcanza para $x = 4$.

10.17. (TIC) Halla los intervalos de crecimiento y decrecimiento de las siguientes funciones.

a) $f(x) = x^2 - 6x + 8$

b) $f(x) = x^3 - 6x^2 + 9x - 8$

c) $f(x) = x \cdot (x - 2)$

d) $f(x) = (x - 1)^2$

a) Crece en $(3, +\infty)$, decrece en $(-\infty, 3)$.

b) Crece en $(-\infty, 1) \cup (3, +\infty)$, decrece en $(1, 3)$.

c) Crece en $(1, +\infty)$, decrece en $(-\infty, 1)$.

d) Crece en $(1, +\infty)$, decrece en $(-\infty, 1)$.

10.18. Halla el valor de a para que el mínimo de la función $f(x) = x^2 + 2x + a$ sea igual a 8.

Igualamos la derivada a 0, y obtenemos $2x + 2 = 0$, con lo que $x = -1$ es el posible mínimo.
Para que valga 8, $f(-1) = 1 - 2 + a = 8$, luego $a = 9$.

10.19. La curva de ecuación $y = x^2 + bx + c$ pasa por el punto $P(-2, 1)$ y alcanza un extremo relativo en el punto de abscisa $x = -3$. Halla los números b y c.

Pasa por $(-2, 1)$, entonces $1 = 4 - 2b + c \Rightarrow -2b + c = -3$.

Alcanza un extremo en $x = -3$, entonces $f'(-3) = 0$. Tenemos que $f'(x) = 2x + b$, así $-6 + b = 0 \Rightarrow$
$\Rightarrow b = 6 \Rightarrow c = 9$

10.20. Representa las siguientes funciones polinómicas.

a) $f(x) = x^2 + x + 1$

b) $f(x) = 2x^3 - 8x + 1$

c) $f(x) = 1 - 4x - x^2$

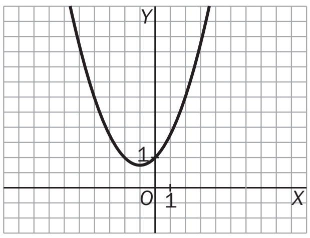
d) $f(x) = x^4 - 2x^2$

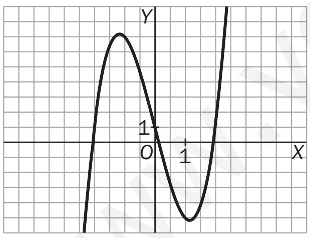
e) $f(x) = x^3 - 2x^2 + x - 1$

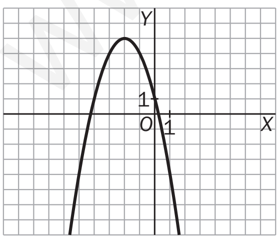
f) $f(x) = (x + 1)^2$

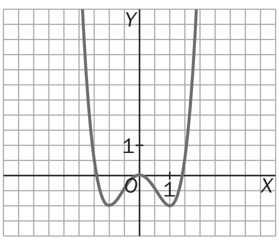
g) $f(x) = (x - 1)(x + 1)(x - 2)$

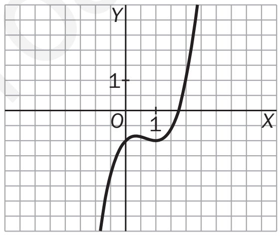
h) $f(x) = x(x^2 + x + 1)$

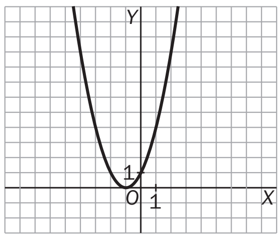
a)


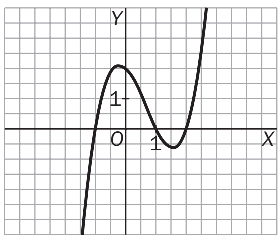
b)


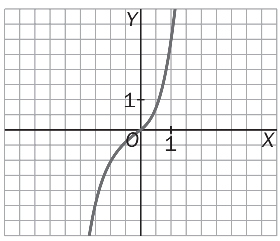
c)


d)


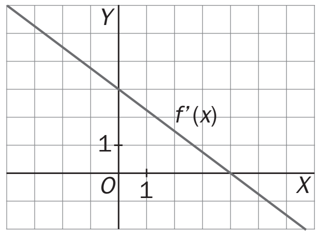
e)


f)


g)


h)


10.21. **La gráfica de la derecha representa la derivada de f. Propón una forma concreta para f compatible con esta información.**



f debe ser de segundo grado, $f(x) = ax^2 + bx + c$, por ser su derivada una recta $f'(x) = 2ax + b$. Como la derivada es positiva antes del 4 en el eje de abscisas, eso indica que f crece en $(-\infty, 4)$ y que decrece en $(4, +\infty)$; por tanto, en $x = 4$, f alcanza un máximo ($f'(4) = 0$) y el coeficiente de mayor grado, a, debe ser negativo. Así $a < 0$ y $8a + b = 0 \Rightarrow b = -8a$.

Además observamos que $f'(x)$ pasa por el punto $(0, 3)$; por tanto:

$$f'(0) = 0 + b = 3 \Rightarrow b = 3$$

Así $a = -\frac{3}{8}$. Por tanto una posible forma de f será $f(x) = -\frac{3}{8}x^2 + 3x$.

10.22. **Un agente comercial cobra por la venta de un cierto producto una comisión dada por $C(x) = 10 + \frac{x}{100} - \frac{x^2}{1000}$, donde x representa la cantidad en miles de euros de la venta efectuada. Determina la cantidad que habrá de vender para que la comisión sea máxima.**

$C'(x) = \frac{1}{100} - \frac{2x}{1000} = 0 \Leftrightarrow x = 5$, luego tendrá que vender una cantidad de 5000 €.

10.23. **Halla dos números reales mayores o iguales que 0 cuya suma sea 20, de forma que la suma del cuadrado de uno y el cuadrado del doble del otro sea mínima.**

Sean x e y los números que se buscan.

La función a minimizar es: $S = y^2 + (2x)^2$

$x + y = 20 \Rightarrow y = 20 - x \Rightarrow S(x) = (20 - x)^2 + (2x)^2 = 5x^2 - 40x + 400$ con $x \in [0, 20]$

$S(x) = 5x^2 - 40x + 400 = 0 \Rightarrow S'(x) = 10x - 40 = 0 \Rightarrow x = 4$

Así pues, el mínimo se alcanza para $x = 4$, con lo que los números buscados son 4 y 16.

10.24. **Un agricultor dispone de 400 m de alambre con los que quiere vallar un campo rectangular aprovechando que un río hace ya de valla en un lado. ¿Cómo debe hacerlo para cercar la máxima superficie?**

Sean x e y las longitudes en metros de los lados del rectángulo, siendo el lado y el del río.

La función a maximizar es $A = xy$.

$2x + y = 400 \Rightarrow y = 400 - 2x \Rightarrow A(x) = x(400 - 2x) = -2x^2 + 400x$, con $x \in [0, 200]$

$A'(x) = -4x + 400 = 0 \Rightarrow x = 100 \in [0, 200]$.

$A(0) = A(200) = 0$, $A(100) = 20\,000$

El área máxima es de 20 000 m^2 y se obtiene vallando dos lados de 100 m y uno de 200 m.

EJERCICIOS

Tasa de variación

10.25. **Se estima que, dentro de t años, la tirada de un periódico local será $C(t) = 50t^2 + 100t + 2000$ ejemplares.**

a) Calcula la tasa de variación media en los próximos 3 años.

b) Calcula la tasa de variación instantánea en el tercer año.

a) $TVM\ C[0, 3] = \frac{C(3) - C(0)}{3 - 0} = \frac{2750 - 2000}{3} = 250$

b) $TVI\ C(3) = \lim_{h\to 0} \frac{C(3 + h) - C(3)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{50 \cdot (3 + h)^2 + 100 \cdot (3 + h) + 2000 - 2750}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{50h^2 + 400h}{h}$

10.26. **El área de una esfera, en función del radio, viene dada por la fórmula $A(r) = 4\pi r^2$. Despeja el radio y, utilizando la calculadora, estima la tasa de variación instantánea del mismo cuando $A = 1256$ cm².**

$$r(A) = \sqrt{\frac{A}{4\pi}}$$

$$TVI\ r(1256) = \lim_{h\to 0} \frac{r(1256 + h) - r(1256)}{h}$$

Calculemos $\frac{r(1256 + h) - r(1256)}{h}$ para algunos valores pequeños de h.

Para $h = 1$: $$\frac{r(1256 + 1) - r(1256)}{1} = \sqrt{\frac{1257}{4\pi}} - \sqrt{\frac{1256}{4\pi}} = 0{,}003979$$

Para $h = 0{,}1$: $$\frac{r(1256 + 0{,}1) - r(1256)}{0{,}1} = \frac{\sqrt{\frac{1256{,}1}{4\pi}} - \sqrt{\frac{1256}{4\pi}}}{0{,}1} = 0{,}003980$$

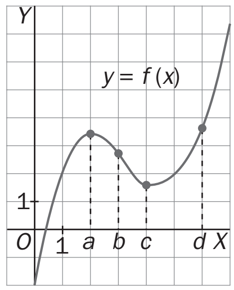
$$TVI\ r\ (1256) \approx 0{,}003\,98$$

10.27. **Considera la gráfica de la figura y contesta a las siguientes preguntas.**

a) ¿Entre qué pareja de puntos consecutivos es negativa la tasa de variación media?

b) ¿Entre qué pareja de puntos consecutivos es máxima la tasa de variación media?

c) ¿Entre qué pareja de puntos consecutivos está más próxima a 0 la tasa de variación media?



a) La *TVM* es negativa entre a y b y entre b y c, ya que $f(a) > f(b)$ y $f(b) > f(c)$.

b) La *TVM* es máxima entre c y d, ya que $f(c)$ y $f(d)$ están muy alejados, y c y d, muy juntos.

c) La *TVM* es más cercana a cero entre a y b, ya que $f(a)$ y $f(b)$ están muy próximos.

Derivada de una función en un punto

10.28. **Aplicando la definición de derivada, halla la derivada de las siguientes funciones en los puntos indicados.**

a) $f(x) = x^2 - 1$ en $x = 1$

b) $f(x) = \frac{1}{x + 1}$ en $x = 0$

c) $f(x) = 2x + 1$ en $x = 3$

a) $$f'(1) = \lim_{h\to 0} \frac{f(1 + h) - f(1)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{(1 + h)^2 - 1 - (1^2 - 1)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{h^2 + 2h}{h} = \lim_{h\to 0} (h + 2) = 2$$

b) $$f'(0) = \lim_{h\to 0} \frac{f(0 + h) - f(0)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{\frac{1}{h + 1} - 1}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{-h}{h(h + 1)} = \lim_{h\to 0} \frac{-1}{h + 1} = -1$$

c) $$f'(3) = \lim_{h\to 0} \frac{f(3 + h) - f(3)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{2(3 + h) + 1 - 7}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{2h}{h} = 2$$

10.29. **La tangente a la curva $y = f(x)$ en el punto $P(2, 3)$ pasa también por el punto $Q(-1, 0)$. ¿Cuánto vale $f'(2)$?**

El valor de $f'(2)$ es la pendiente de la recta tangente a f en el punto de abscisa $x = 2$. Como conocemos dos puntos de la recta tangente, podemos calcular su pendiente, recordando que es igual al incremento de la ordenada partido entre el incremento de la abscisa:

$$f'(2) = m = \frac{0 - 3}{-1 - 2} = 1$$

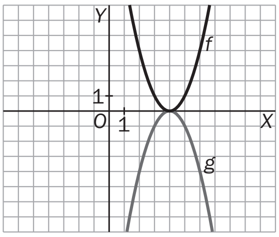
10.30. Las siguientes afirmaciones son falsas. Haz ver con algún dibujo que, efectivamente, lo son.

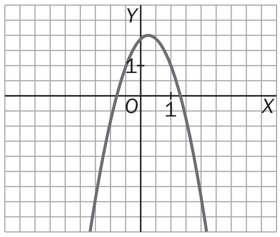
a) Si $f(3) > g(3)$, entonces $f'(3) \geq g'(3)$.

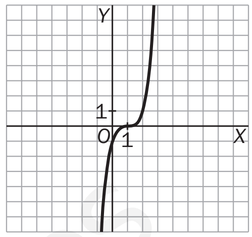
b) Si $f'(0) > 0$, entonces $f(0) \leq f(1)$.

c) Si $f'(1) = 0$, entonces $f(0) = f(2)$.

a) $f(3) > g(3)$, $f'(3) < 0$ y $g'(3) > 0$ b) $f'(0) > 0$ y $f(0) > f(1)$ c) $f'(1) = 0$ y $f(0) \neq f(2)$

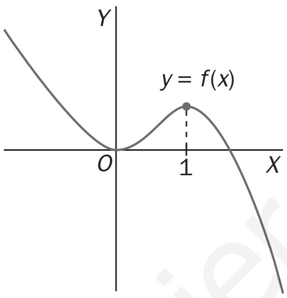


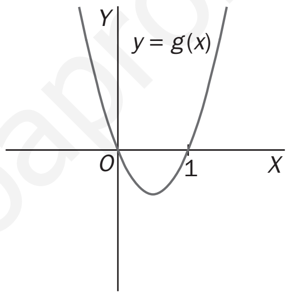




Función derivada

10.31. ¿Puede ser la función $y = g(x)$ la derivada de la función $y = f(x)$?

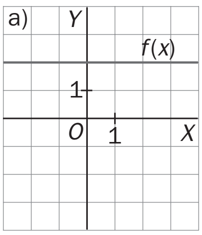


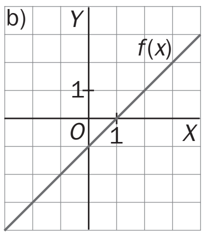


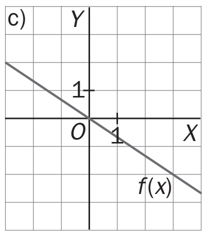
La función $f(x)$ es decreciente en $(-\infty, 0)$ y, por tanto, su derivada debe ser negativa en este mismo intervalo, pero $g(x)$ es positiva en $(-\infty, 0)$. Así que $g(x) \neq f'(x)$.

10.32. Utiliza la gráfica de f para estimar el valor de la derivada en los puntos indicados y, a continuación, esboza la gráfica de la función $y = f'(x)$.

a) $f'(2)$, $f'(3)$ b) $f'(-2)$, $f'(0)$, $f'(2)$ c) $f'(0)$, $f'(1)$, $f'(4)$



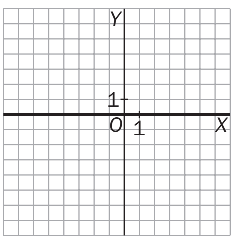


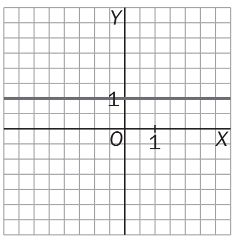


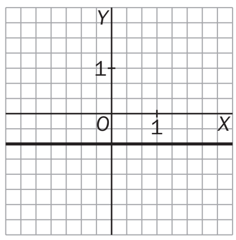
a) $f'(2) = f'(3) = 0$, por tratarse de una constante.

b) $f'(x) = 1$ en todos los puntos. $f'(7) = 1$.

c) $f'(x) = \frac{-2}{3}$ en todos los puntos.





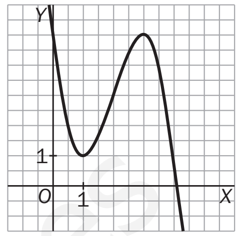


Interpretación geométrica

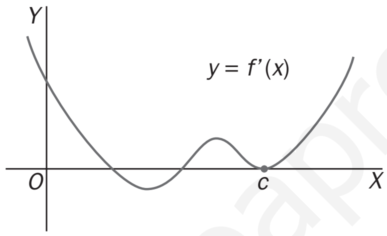
10.33. Dibuja una posible gráfica para $y = f(x)$ si tienes estos datos sobre su derivada:

- **$f'(x) > 0$ en (1, 3)**
- **$f'(x) < 0$ para $x < 1$ y para $x > 3$**
- **$f'(x) = 0$ para $x = 1$ y para $x = 3$**

La función $f(x)$ debe ser decreciente en $(-\infty, 1) \cup (3, +\infty)$ y creciente en (1, 3); además, en $x = 1$ y en $x = 3$ debe tener tangente horizontal. Con estos requisitos, una posible gráfica para $f(x)$ es la que se muestra a la derecha:

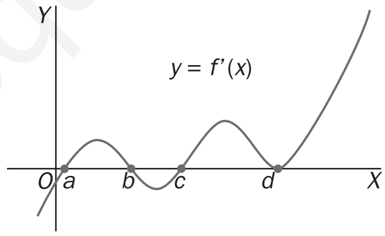


10.34. En la gráfica que ves se observa que $f'(c) = 0$. ¿Presenta f en el punto $x = c$ un máximo o un mínimo relativo?



No hay un mínimo relativo en c, ya que $f(x)$ es creciente a la izquierda y a la derecha de c.

10.35. Decide las abscisas de los puntos en los que f presenta un máximo o un mínimo relativo, si la gráfica de $y = f'(x)$ es:



Los máximos y mínimos relativos están en los puntos en los que la derivada cambia de signo. Si pasa de positiva a negativa, serán máximos, y si el cambio es de negativo a positivo, serán mínimos.

Así pues, presenta un máximo en $x = b$ y mínimos en $x = a$ y en $x = c$.

Obsérvese que en $x = d$ la derivada no cambia de signo.

10.36. (PAU) Dada la curva de ecuación $y = -x^3 + 26x$, calcula las ecuaciones de las rectas tangentes a la misma que sean paralelas a la recta $y = -x$.

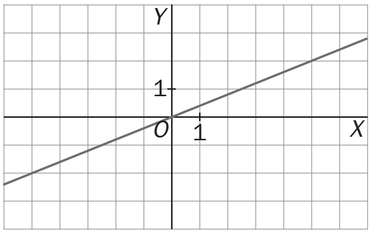
La pendiente de una recta tangente en el punto de abscisa $x = a$ es $m = f'(a)$, que a su vez debe ser igual a la pendiente de la recta $y = -x$, es decir, igual a -1. Así pues, $m = f'(a) = -1$.

Las abscisas de los puntos de tangencia las encontraremos derivando la función e igualando la derivada a -1: $f'(x) = -3x^2 + 26 = -1 \Rightarrow x = -3$ y $x = 3$. Por tanto, $a_1 = -3$ y $a_2 = 3$.

Una de las rectas tangentes que buscamos pasa por el punto de tangencia $P(3, f(3)) = P(3, 51)$. Su ecuación es $y = -x + 54$.

La otra recta tangente pasa por el punto de tangencia $P(-3, f(-3)) = P(-3, -51)$. Su ecuación es $y = -x - 54$.

10.37. **Dada la curva de ecuación $y = -x^2 + x$, calcula las ecuaciones de las rectas tangentes a la misma que sean paralelas a la recta de la figura.**



La recta de la figura tiene por pendiente $m = \frac{2}{5}$. Para calcular los puntos en los que se trazan las tangentes paralelas a la recta del dibujo debemos resolver $-2x + 1 = \frac{2}{5}$, que tiene por solución $x = \frac{3}{10}$. Por tanto, la tangente que buscamos será $y - \frac{21}{100} = \frac{2}{5}\left(x - \frac{3}{10}\right)$.

10.38. **Obtén la pendiente de la tangente a la curva $f(x) = \sqrt[3]{x^2}$ en el punto de abscisa 8.**

La pendiente m buscada es $f'(8)$. Calculemos, pues, la función derivada de $f(x) = \sqrt[3]{x^2} = x^{\frac{2}{3}}$.

$f'(x) = \frac{2}{3}x^{-\frac{1}{3}} = \frac{2}{3\sqrt[3]{x}}$ y la pendiente es $m = f'(8) = \frac{2}{3\sqrt[3]{8}} = \frac{1}{3}$.

10.39. **Obtén los puntos de la curva $y = x^3$ en los que su tangente es paralela a la recta $y = 12x + 1$.**

La pendiente de la recta tangente en el punto de abscisa $x = a$ es $m = f'(a)$, que a su vez debe ser igual a la pendiente de la recta $y = 12x + 1$, es decir, igual a 12. Así pues, $m = f'(a) = 12$.

Las abscisas de los posibles puntos de tangencia las encontraremos derivando la función e igualando la derivada a 12: $f'(x) = 3x^2 = 12 \Rightarrow x = -2$ y $x = 2$.

Obtenemos, pues, dos puntos: $P(-2, f(-2)) = P(-2, -8)$ y $P(2, f(2)) = P(2, 8)$.

10.40. **¿Es la recta $y = x - 2$ tangente a la curva $y = \ln x$?**

La pendiente de la recta $y = x - 2$ es $m = 1$, que debe coincidir con el valor de la derivada de $f(x) = \ln x$ para algún x, que será la primera coordenada del punto de tangencia. Calculémosla:

$f'(x) = \frac{1}{x} = 1 \rightarrow x = 1$, el punto de tangencia sería $P(1, \ln 1) = P(1, 0)$.

Pero el punto $P(1, 0)$ no pertenece a la recta $y = x - 2$, por lo que dicha recta no es tangente a la curva $f(x) = \ln x$.

10.41. **Halla la ecuación de la recta tangente a la parábola $y = \frac{x^2}{2} + 1$ que sea paralela a la recta $y = x + 3$.**

La pendiente de la recta tangente en el punto de abscisa $x = a$ es $m = f'(a)$, que a su vez debe ser igual a la pendiente de la recta $y = x + 3$, es decir, igual a 1. Así pues, $m = f'(a) = 1$. La abscisa del punto de tangencia la encontraremos derivando la función e igualando la derivada a 1: $f'(x) = x = 1$, luego $x = 1$. Por tanto, $a = 1$.

La recta tangente que buscamos tiene pendiente 1 y pasa por el punto de tangencia, que como $f(1) = \frac{3}{2}$, es $P\left(1, \frac{3}{2}\right)$. Su ecuación es $y = x + \frac{1}{2}$.

10.42. ¿Es tangente la recta $y = x + 5$ a la curva $y = x^4 - 3x + 2$?

La pendiente de la recta $y = x + 5$ es 1 y, por tanto, el valor de la derivada de $y = x^4 - 3x + 2$ debe ser también 1 en la abscisa del punto de tangencia. Es decir, $f'(x) = 4x^3 - 3 = 1 \rightarrow x = 1$.

Así pues, el posible punto de tangencia es $P(1, 0)$. Sólo nos queda comprobar que el punto cuya primera coordenada vale 1 es el mismo en la recta y en la curva, ya que debe pertenecer a ambas:

- En la recta: $P(1, 6)$
- En la curva: $P(1, 0)$

Concluimos entonces que la recta y la curva no son tangentes.

Derivadas de operaciones

10.43. (TIC) Calcula la derivada de las siguientes funciones.

a) $f(x) = x^3 - 2x^2 + 4x + 1$

b) $f(x) = \dfrac{x^5}{5} - \dfrac{x^4}{2} + x - 1$

c) $f(x) = \dfrac{2}{x^2} + \dfrac{1}{x} - 3x + 6x^2$

d) $f(x) = \sqrt[3]{x} - \sqrt{x} + 2x$

e) $f(x) = x(\ln x - 1) + 2$

f) $f(x) = 3x\sqrt{x} - 2x^2 \operatorname{sen} x$

g) $f(x) = 2e^x - \cos x + x - \sqrt[3]{x}$

h) $f(x) = \dfrac{3x^2 - 3}{x^3 + 1}$

i) $f(x) = e^x \cdot \operatorname{sen} x$

j) $f(x) = e^x \cdot \ln x$

k) $f(x) = \dfrac{x^2 + 1}{\ln x}$

l) $f(x) = \dfrac{x}{e^x}$

m) $f(x) = \dfrac{\cos x}{\operatorname{sen} x}$

n) $f(x) = \operatorname{sen}(\operatorname{sen} x)$

o) $f(x) = \cos^2(5x - 3)$

p) $f(x) = \operatorname{tg}(x^3 + 4x - 1)$

q) $f(x) = \ln\left(\dfrac{x - 1}{x}\right)$

r) $f(x) = \ln^2(\operatorname{sen} x)$

a) $f'(x) = 3x^2 - 4x + 4$

b) $f'(x) = x^4 - 2x^3 + 1$

c) $f'(x) = \dfrac{-4}{x^3} - \dfrac{1}{x^2} - 3 + 12x$

d) $f'(x) = \dfrac{1}{3\sqrt[3]{x^2}} - \dfrac{1}{2\sqrt{x}} + 2$

e) $f'(x) = 1 \cdot (\ln x - 1) + x \cdot \dfrac{1}{x} = \ln x$

f) $f'(x) = \dfrac{9\sqrt{x}}{2} - 4x \cdot \operatorname{sen} x - 2x^2 \cos x$

g) $f'(x) = 2e^x - \cos x + 1 - \dfrac{1}{3\sqrt[3]{x^2}}$

h) $f'(x) = \dfrac{-3x^4 + 9x^2 + 6x}{(x^3 + 1)^2}$

i) $f'(x) = e^x \operatorname{sen} x + e^x \cos x$

j) $f'(x) = e^x \ln x + \dfrac{e^x}{x}$

k) $f'(x) = \dfrac{2x \cdot \ln x - (x^2 + 1) \cdot \dfrac{1}{x}}{(\ln x)^2} = \dfrac{2x^2 \cdot \ln x - x^2 - 1}{x \cdot (\ln x)^2}$

l) $f'(x) = \dfrac{1 \cdot e^x - x \cdot e^x}{(e^x)^2} = \dfrac{1 - x}{e^x}$

m) $f'(x) = \dfrac{-\operatorname{sen} x \operatorname{sen} x - \cos x \cos x}{\operatorname{sen}^2 x} = \dfrac{-1}{\operatorname{sen}^2 x}$

n) $f'(x) = \cos(\operatorname{sen} x) \cos x$

o) $f'(x) = -10 \cos(5x - 3) \operatorname{sen}(5x - 3)$

p) $f'(x) = [1 + \operatorname{tg}^2(x^3 + 4x - 1)](3x^2 + 4)$

q) $f'(x) = \dfrac{\dfrac{x - (x - 1)}{x^2}}{\dfrac{x - 1}{x}} = \dfrac{\dfrac{1}{x^2}}{\dfrac{x - 1}{x}} = \dfrac{1}{x(x - 1)}$

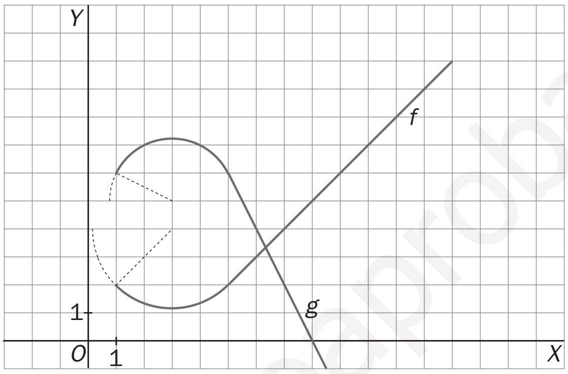
r) $f'(x) = 2 \ln(\operatorname{sen} x) \dfrac{\cos x}{\operatorname{sen} x} \cos x = \dfrac{2 \cos^2 x \ln(\operatorname{sen} x)}{\operatorname{sen} x}$

10.44. Halla la derivada de $f(x) = \dfrac{x + 1}{\sqrt{x}}$ de dos formas: aplicando la derivada del cociente y escribiendo f como suma de potencias de x. Observa que deben coincidir los resultados.

$$1.^\circ\ f'(x) = \frac{1 \cdot \sqrt{x} - (x + 1) \cdot \dfrac{1}{2\sqrt{x}}}{(\sqrt{x})^2} = \frac{x - 1}{2x\sqrt{x}}$$

$$2.^\circ\ f(x) = \frac{x + 1}{\sqrt{x}} = \frac{x}{\sqrt{x}} + \frac{1}{\sqrt{x}} = x^{\frac{1}{2}} + x^{-\frac{1}{2}} \Rightarrow f'(x) = \frac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}} - \frac{1}{2}x^{-\frac{3}{2}} = \frac{1}{2\sqrt{x}} - \frac{1}{2\sqrt{x^3}} = \frac{x - 1}{2\sqrt{x^3}} = \frac{x - 1}{2x\sqrt{x}}$$

10.45. Las gráficas de las funciones f y g son las que te muestra la figura, compuesta por arcos de circunferencia y segmentos. Calcula:



a) $(f + g)'(5)$ b) $(f \cdot g)'(5)$ c) $\left(\dfrac{f}{g}\right)(5)$ d) $(f \circ g)'(5)$ e) $(f^2)(5)$ f) $(g \cdot f)'(5)$

Trazando la recta tangente a las funciones f y g en $x = 5$ y contando los cuadritos se puede hallar su pendiente, es decir, su derivada: $f'(5) = 1$ y $g'(5) = -2$. Además, $f(5) = 2$ y $g(5) = 6$.
Con estos datos ya podemos calcular lo que se pide:

a) $(f + g)'(5) = f'(5) + g'(5) = 1 - 2 = -1$

b) $(f \cdot g)'(5) = f'(5) \cdot g(5) + f(5) \cdot g'(5) = 1 \cdot 6 + 2 \cdot (-2) = 2$

c) $\left(\dfrac{f}{g}\right)'(5) = \dfrac{f'(5) \cdot g(5) - f(5) \cdot g'(5)}{(g(5))^2} = \dfrac{1 \cdot 6 - 2 \cdot (-2)}{6^2} = \dfrac{5}{18}$

d) $(f \circ g)'(5) = f'(g(5)) \cdot g'(5) = f'(6) \cdot (-2) = 1 \cdot (-2) = -2$

e) $(f^2)'(5) = 2 \cdot f(5) \cdot f'(5) = 2 \cdot 2 \cdot 1 = 4$

f) $(g \cdot f)'(5) = g'(5) \cdot f(5) + g(5) \cdot f'(5) = -2 \cdot 2 + 6 \cdot 1 = 2$

10.46. (TIC) Calcula la derivada de las siguientes funciones.

a) $f(x) = (x^2 + 1)^{15}$

b) $f(x) = e^{\sqrt{x}}$

c) $f(x) = \ln\,(x^3 - 4x)$

d) $f(x) = \operatorname{sen} 2x$

e) $f(x) = \operatorname{sen}^3 (x^2 + 1)$

f) $f(x) = \dfrac{1 + \ln x}{x^3}$

a) $f'(x) = 30x(x^2 + 1)$

b) $f'(x) = e^{\sqrt{x}} \cdot \dfrac{1}{2\sqrt{x}}$

c) $f'(x) = \dfrac{3x^2 - 4}{x^3 - 4x}$

d) $f'(x) = 2 \cos 2x$

e) $f'(x) = 6x \operatorname{sen}^2 (x^2 + 1) \cos (x^2 + 1)$

f) $f'(x) = \dfrac{\dfrac{1}{x}x^3 - (1 + \ln x)3x^2}{x^6} = \dfrac{-2 - 3 \ln x}{x^6}$

10.47. Observando que $\cos x = \text{sen}\left(\frac{\pi}{2} - x\right)$ y aplicando la regla de la cadena, deduce la derivada de la función $y = \cos x$ y a continuación la derivada de $y = \text{tg } x$.

$$(\cos x)' = \cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right) \cdot \left(\frac{\pi}{2} - x\right)' = \text{sen } x \cdot (-1) = -\text{sen } x$$

Si $f(x) = \text{tg } x = \dfrac{\text{sen } x}{\cos x} \Rightarrow f'(x) = \dfrac{\cos x \cdot \cos x - \text{sen } x \cdot (-\text{sen } x)}{\cos^2 x} = \dfrac{\cos^2 x + \text{sen}^2 x}{\cos^2 x} = \dfrac{1}{\cos^2 x}$

Crecimiento y decrecimiento. Extremos relativos

10.48. La gráfica de la función $f(x) = ax^3 + bx + c$ satisface las siguientes condiciones:

a) Pasa por (0, 0).

b) Tiene un mínimo relativo (1, −1).

Calcula los coeficientes a, b y c.

a) Pasa por (0, 0), luego $0a + 0b + c = 0$, esto es, $c = 0$.

b) Pasa por (1, −1), luego $a + b = -1$.

c) Tiene un mínimo de abscisa $x = 1$, por lo que $f'(1) = 0$, esto es, $3a + b = 0$.

Entonces, $\left.\begin{array}{r} a + b = -1 \\ 3a + b = 0 \end{array}\right\} \rightarrow a = \dfrac{1}{2}$ y $b = -\dfrac{3}{2}$

10.49. Deduce la abscisa del vértice de la parábola $y = ax^2 + bx + c$.

El vértice de una parábola es su máximo o su mínimo, entonces $f'(x) = 2ax + b = 0 \rightarrow x = -\dfrac{b}{2a}$

10.50. Para cada valor de a se considera la función: $f(x) = \dfrac{3x^2 - ax}{x + 2}$. Calcula el valor de a para que f tenga un mínimo relativo en $x = 2$.

$$f'(x) = \frac{(6x - a) \cdot (x + 2) - (3x^2 - ax) \cdot 1}{(x + 2)^2} \rightarrow f'(2) = \frac{(12 - a) \cdot 4 - (12 - 2a)}{16} = 0 \Rightarrow a = 18$$

Para verificar que dicho extremo es un mínimo, se estudia el signo de la derivada cerca de $x = 2$.

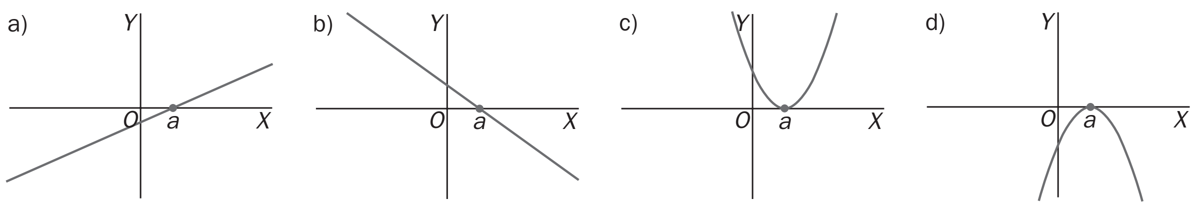
$$f(x) = \frac{3x^2 - 18x}{x + 2} \rightarrow f'(x) = \frac{3 \cdot (x + 6) \cdot (x - 2)}{(x + 2)^2}$$

$-6 < x < 2 \rightarrow f'(x) < 0 \rightarrow f$ decreciente a la izquierda de $x = 2$

$x > 2 \rightarrow f'(x) > 0 \rightarrow f$ creciente a la derecha de $x = 2$

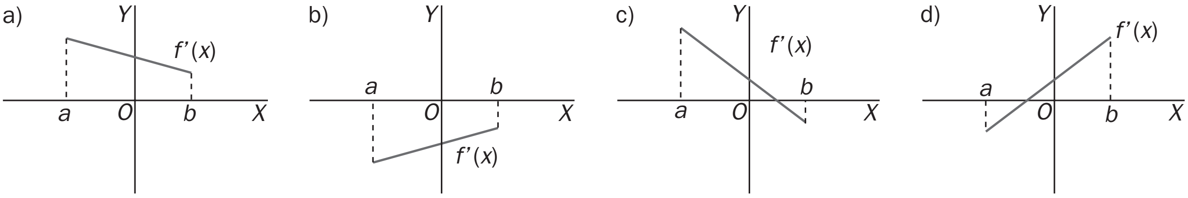
Entonces, para $a = 18$, la función dada tiene un mínimo relativo en $x = 2$.

10.51. Razona cuál de las siguientes gráficas se corresponde con la derivada de una función que tiene un máximo en el punto $x = a$.



Si tiene un máximo, además de anularse en a, debe pasar de ser positiva a negativa, por pasar f de creciente a decreciente. Por tanto, la solución es la b.

10.52. Razona cuál de las siguientes gráficas se corresponde con la derivada de una función creciente en el intervalo [a, b].



Si f es creciente en el intervalo, en todo el intervalo la derivada debe ser positiva, luego la solución es *a*.

10.53. Responde verdadero o falso.

a) Si f tiene derivada en todos los puntos y $f(2) = f(7)$, debe haber un número c entre 2 y 7 con $f'(c) = 0$.

b) Existe una función f para la que $f(2) = 3$, $f(5) = 6$ y $f'(x) > 1$ para todo x.

c) Si f y g son positivas y crecientes, entonces $f \cdot g$ es creciente.

a) Verdadero.

Al ser la función continua y verificar que $f(2) = f(7)$, debe haber un valor c comprendido entre 2 y 7 que es la abscisa de un punto de tangente horizontal, es decir, que $f'(c) = 0$.

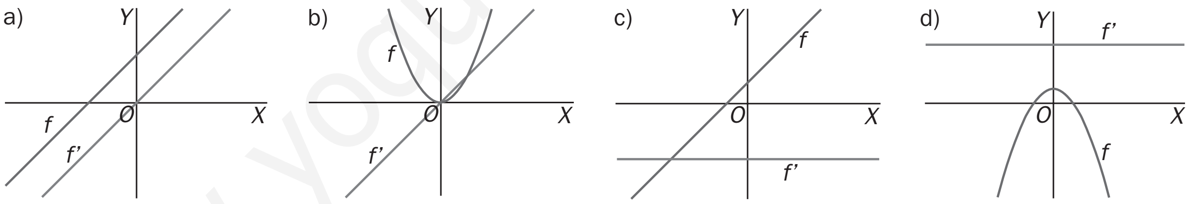
b) Falso.

Hay un valor c en el intervalo (2, 5) en el que la derivada vale $\frac{6-3}{5-2} = 1$.

c) Verdadero.

En efecto, $(f \cdot g)' = f' \cdot g + f \cdot g'$, que son dos sumandos no negativos, y, por tanto, la función es creciente.

10.54. Razona cuál de las siguientes gráficas se corresponde con una función y su derivada.

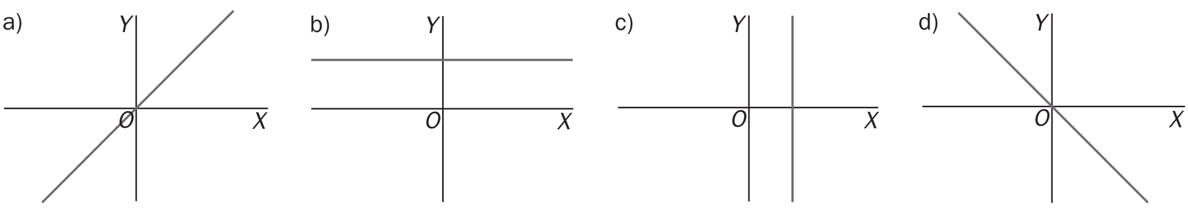


De una función polinómica a su derivada se baja un grado, con lo que se descartan las funciones de los apartados *a* y *d* (además, como las parábolas crecen y decrecen, la derivada debe tener un cambio de signo, y la f' del apartado *d* no cambia de signo).

Como en *c* la función f es creciente, f' debería ser positiva, y es negativa.

En conclusión, el apartado correcto es el *b*.

10.55. Razona cuál de las siguientes gráficas se corresponde con la derivada de la función $f(x) = kx$, siendo k un número real positivo.



La derivada de una recta es una constante, luego la única opción es la *b*.

Representación de funciones polinómicas

10.56. (TIC) Represente las siguientes funciones,

a) $f(x) = (2 - x)^3$

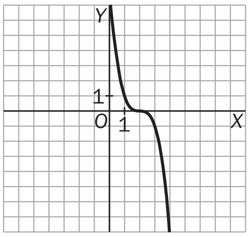
b) $f(x) = \dfrac{6x^2 - 4x + 2}{4}$

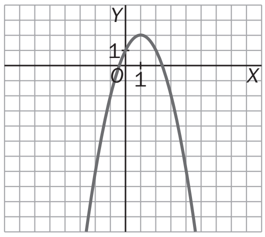
c) $f(x) = 1 + 2x - x^2$

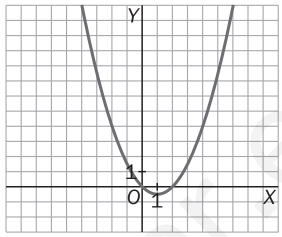
d) $f(x) = -3x^4 + 3x^2$

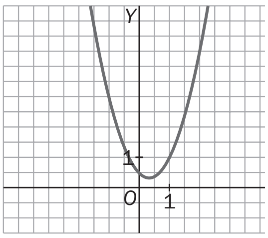
e) $f(x) = x \cdot \left(\dfrac{x - 2}{2}\right)$

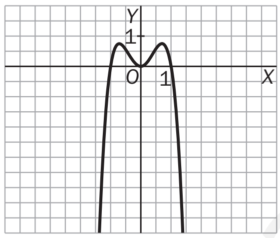
f) $f(x) = (x^2 - 1)(x^2 + 1)$

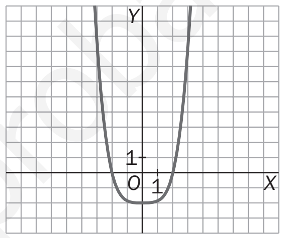
a)


c)


e)


b)


d)


f)


Problemas de optimización

10.57. Encuentra dos números no negativos que sumen 14, de forma que la suma de sus cuadrados sea:

a) Máxima **b) Mínima**

Sean x e y dichos números.

La función que queremos maximizar y minimizar es $S = x^2 + y^2$.

$x + y = 14 \rightarrow y = 14 - x \Rightarrow S(x) = x^2 + (14 - x)^2 = 2x^2 - 28x + 196$ con $x \in [0, 14]$

$S'(x) = 4x - 28 = 0 \rightarrow x = 7 \in [0, 14] \rightarrow S(0) = S(14) = 196$ y $S(7) = 98$

Entonces:

a) Para $x = 0$, $y = 14$ ó $x = 14$, $y = 0$ se obtiene la suma de cuadrados máxima: 196.

b) Para $x = 7$, $y = 7$ se obtiene la suma de cuadrados mínima: 98.

10.58. Un depósito abierto de chapa y de base cuadrada debe tener capacidad para 13 500 L. ¿Cuáles han de ser sus dimensiones para que precise la menor cantidad de chapa?

Sean x el lado de la base y h la altura del depósito, todo ello en decímetros. Se debe minimizar el área total $A = x^2 + 4xh$, sabiendo que el volumen es $V = x^2h = 13\,500$.

Despejando la h de esta última expresión y sustituyendo en el área, obtenemos que debemos minimizar $A = x^2 + \dfrac{54\,000}{x}$. Por tanto, $A' = 2x - \dfrac{54\,000}{x^2} = 0 \Leftrightarrow x = 30$ dm mide el lado de la base.

Como, en efecto, se trata de un mínimo, podemos calcular que $h = 15$ dm.

10.59. Los beneficios que se obtienen de la venta de x unidades de un determinado producto vienen dados por la expresión $B(x) = -2x^3 + 216x - 256$.

a) ¿Cuántas unidades vendidas dan el mayor beneficio?

b) Determina el número de unidades que hay que vender para que se maximice el beneficio medio: $\frac{B(x)}{x}$.

a) $B'(x) = -6x^2 + 216 = 0 \Rightarrow x = 6$. La solución negativa se descarta.

Si $-6 < x < 6 \to f'(x) > 0$, y si $x > 6 \to f'(x) < 0$, por lo que es un máximo.

$P(6, B(6)) = P(6, 608)$. El beneficio máximo es de 608 y se obtiene con la venta de 6 unidades.

b) $B'_m(x) = -4x + \frac{256}{x^2} = 0 \to x = 4$

Si $0 < x < 4 \to B'_m(x) > 0$, y si $x > 4 \to B'_m(x) < 0$, por lo que es un máximo.

$P(4, B_m(4)) = P(4, 120)$. El beneficio medio máximo es de 120 y se obtiene con 4 unidades.

PROBLEMAS

10.60. (PAU) El número de individuos, en millones, de una población viene dado por la función $P(t) = \frac{15 + t^2}{(t + 1)^2}$, donde t se mide en años transcurridos desde $t = 0$. Calcula:

a) La población inicial.

b) El año en que se alcanzará la mínima población y el tamaño de esta en ese momento.

c) El tamaño de la población a largo plazo.

a) Población inicial $= P(0) = 15$ millones de individuos

b) $P'(t) = \frac{2t \cdot (t + 1)^2 - (15 + t^2) \cdot 2 \cdot (t + 1)}{(t + 1)^4} = \frac{2 \cdot (t - 15)}{(t + 1)^3} = 0 \to t = 15$ (se descarta $t = -1$).

Si $-1 < x < 15 \to f'(x) < 0$, y si $x > 15 \to f'(x) > 0$, por lo que es un mínimo.

A los 15 años se alcanza la mínima población: $P(15) = 0{,}9375$, es decir, 937 500 individuos.

c) $\lim_{t \to +\infty} \frac{15 + t^2}{(t + 1)^2} = 1$, es decir, tiende a estabilizarse en un millón de habitantes.

10.61. Una empresa de venta por teléfono ha establecido para sus empleados un incentivo mensual, $f(x)$ (en euros), en relación con el valor x (en euros) de lo vendido por cada uno según la función:

$$f(x) = \begin{cases} 0{,}03x - 30 & \text{si } 0 \leq x \leq 10\,000 \\ \dfrac{600x}{x + 10\,000} & \text{si } x > 10\,000 \end{cases}$$

- Estudia la continuidad de f e indica si hay algún valor en las ventas que la empresa valore especialmente.
- ¿Es el incentivo siempre creciente en relación con las ventas realizadas?
- ¿Puede un empleado recibir 600 euros de incentivo? ¿Por qué? ¿Y 598 euros?

a) La función $f(x)$ es continua al menos en $[0, 10\,000) \cup (10\,000, +\infty)$.

$f(10\,000) = \lim_{x \to 10\,000^-} f(x) = 270$ y $\lim_{x \to 10\,000^+} f(x) = 300 \to$ no es continua en $x = 10\,000$.

b) En el primer tramo la función es creciente, ya que es una recta de pendiente positiva.

En el segundo tramo es $g(x) = \frac{600x}{x + 10\,000} \to g'(x) = \frac{6\,000\,000}{(x + 10\,000)^2} \geq 0 \to$ creciente.

Como el salto en $x = 10\,000$ es $30 > 0$, podemos concluir que la función es siempre creciente.

c) En el primer tramo, el valor máximo es $f(10\,000) = 270$, y en el segundo tramo la tendencia es $\lim_{x \to +\infty} f(x) = 600$.

Es decir, un empleado nunca podrá alcanzar los 600 euros de incentivo por mucho que venda. Para conseguir 598 euros de incentivo deberá ocurrir que $f(x) = 598$, esto es, $x = 2\,990\,000$, es decir, deberá realizar unas ventas de 2 990 000 €.

10.62. En el año 2000 se fundó una asociación ecologista. Se sabe que el número de sus miembros ha variado con los años según la función $N(t) = 40\ (t^3 - 4{,}5t^2 + 6t + 3)$, donde t mide el número de años desde el inicio de la fundación. ¿Cuántos fueron los socios fundadores? ¿En qué periodo de tiempo aumentó el número de socios?

N.º socios fundadores: $N(0) = 120 \rightarrow N'(t) = 40(3t^2 - 9t + 6) = 120(t - 1)(t - 2) > 0$ en $(0, 1) \cup (2, +\infty)$. El número de socios aumenta hasta el primer año y a partir del segundo año.

10.63. (PAU) Una compañía puede producir x cientos de neumáticos de calidad A. Además, por cada x cientos de neumáticos de calidad A es capaz de producir $\frac{40 - 12x}{6 - x}$ cientos de neumáticos de calidad B, que dejan la mitad de beneficio que los de calidad A. Por problemas de almacenamiento, la compañía no puede producir más de 550 neumáticos de calidad A. Halla el número de neumáticos de cada tipo que resulte más rentable producir.

Si llamamos P a los beneficios que dejan 100 neumáticos de calidad A, la función que queremos maximizar es $f(x) = P \cdot x + \frac{P}{2} \cdot \left(\frac{40 - 12x}{6 - x}\right) = P \cdot \left(x + \frac{40 - 12x}{12 - 2x}\right) = P \cdot \left(\frac{40 - 2x^2}{12 - 2x}\right)$, donde $x \in [0; 5{,}5]$.

$$f'(x) = P \cdot \left(\frac{-4x \cdot (12 - 2x) - (40 - 2x^2) \cdot (-2)}{(12 - 2x)^2}\right) = P \cdot \left(\frac{4x^2 - 48x + 80}{(12 - 2x)^2}\right) = 0, \text{ si } x = 2 \text{ y } x = 10$$

$x = 10 \notin [0; 5{,}5]$, $f(2) = 4P$, $f(0) = 3{,}33P$ y $f(5{,}5) = -20{,}5P \Rightarrow$ 200 neumáticos A y 400 B.

10.64. Se ha estudiado el rendimiento de los empleados de una oficina a medida que transcurre la jornada laboral desde las 8 hasta las 15 horas, analizando el número de instancias revisadas en una hora. La función que expresa dicho rendimiento es $R(t) = 30t - 10{,}5t^2 + t^3$, siendo t el número de horas transcurridas desde el inicio de la jornada laboral.

a) Halla la tasa de variación media del rendimiento $R(t)$ entre $t = 2$ y $t = 4$.

b) Determina en qué momento se produce el máximo y el mínimo rendimiento entre las 9 y las 14, y entre las 9 y las 12.

a) $TVM\ R[2, 4] = \frac{R(4) - R(2)}{4 - 2} = \frac{16 - 26}{2} = -5$

b) $R'(t) = 30 - 21t + 3t^2 = 0 \Rightarrow t = 2$ y $t = 5$

$R(2) = 12{,}5$; $R(5) = 12{,}5$; 9:00 $\rightarrow R(1) = 20{,}5$; 14:00 $\rightarrow R(6) = 18$; 12:00 $\rightarrow R(4) = 16$

El máximo entre las 9:00 y las 14:00 se alcanza en $t = 2$ (10:00), y el mínimo, en $t = 5$ (13:00).

Entre las 9:00 y las 12:00, el máximo se alcanzará en $t = 2$ (10:00), y el mínimo, en $t = 4$ (12:00).

10.65. Los beneficios de una fábrica de camisas dependen del número de miles de camisas que se fabrican cada día, según la función $f(x) = 2x^3 - 15x^2 + 36x - 19$, donde x mide el número de camisas fabricadas al día en miles, y $f(x)$, la ganancia en miles de euros al mes. Atendiendo al número de máquinas y personal necesarios, la fábrica puede optar por fabricar un número diario de camisas comprendido entre 1000 y 4000. ¿Cuántas camisas debe fabricar para obtener un beneficio máximo?

$f'(x) = 6x^2 - 30x + 36 = 0$, si $x = 2$ ó $x = 3 \in [0, 4]$. $f(1) = 4$, $f(2) = 9$, $f(3) = 8$ y $f(4) = 13$

Así pues, fabricando 4000 camisas se obtiene el beneficio máximo, que asciende a 13 000 €.

10.66. (PAU) Se quiere construir el marco de una ventana rectangular de 8 m². El metro lineal de tramos horizontales cuesta 2,50 euros, y el de tramos verticales, 5. Determina las dimensiones de la ventana para que el coste del marco sea mínimo y el precio de dicho marco.

Sea x la longitud en metros del tramo horizontal e y la longitud en metros del tramo vertical.

La función coste que queremos minimizar es: $S = 2 \cdot 2{,}5 \cdot x + 2 \cdot 5 \cdot y = 5x + 10y$

$x \cdot y = 8 \rightarrow y = \frac{8}{x} \rightarrow S(x) = 5x + 10 \cdot \frac{8}{x} = 5x + \frac{80}{x}$

$S'(x) = 5 - \frac{80}{x^2} = 0 \rightarrow x = 4$. La solución negativa se descarta. Como a la izquierda de 4 la derivada es negativa y a la derecha es positiva, el punto $(4, S(4)) = (4, 40)$ es un mínimo.

Las dimensiones son 4 m el tramo horizontal y 2 m el tramo vertical. El coste mínimo es de 40 €.

PROFUNDIZACIÓN

10.67. Se quiere construir una caja abierta (sin tapa) recortando cuadrados iguales en cada una de las esquinas de una hoja rectangular de cartón de dimensiones 3 y 8 dm.

Expresa el volumen de la caja en función del lado del cuadrado recortado y calcula este para que dicho volumen sea máximo.

Sea x los decímetros que mide el lado del cuadradito que recortamos en las esquinas.

$V(x) = (8 - 2x)(3 - 2x)x = 4x^3 - 22x^2 + 24x$ con $x \in \left[0, \frac{3}{2}\right]$.

$V'(x) = 12x^2 - 44x + 24 = 0 \rightarrow x = 3$ y $x = \frac{2}{3}$. El máximo se alcanza en $x = \frac{2}{3}$, ya que en los extremos del intervalo el volumen es 0 y el otro valor posible $x = 3$ queda fuera del dominio.

10.68. a) Las parábolas $y = ax^2 + bx + c$ e $y = x^2$ tienen una recta tangente común en el punto $A(1, 1)$. Deduce dos relaciones entre a, b y c.

b) Si la parábola en cuestión pasa por el punto (3, 2), deduce una tercera relación entre a, b y c.

c) Con las tres relaciones obtenidas, resuelve el sistema de tres ecuaciones y obtén la ecuación de dicha parábola.

a) $A(1, 1)$ pertenece a ambas parábolas; por tanto, $f(1) = a + b + c = 1$.

$g'(1) = 2 = f'(1) = 2a + b \rightarrow \left.\begin{matrix} a + b + c = 1 \\ 2a + b = 2 \end{matrix}\right\} \rightarrow b = 2 - 2a$ y $c = a - 1$. Por supuesto, $a \neq 0$.

b) Como la parábola pasa por el punto (3, 2), se sigue que $f(3) = 9a + 3b + c = 2$.

c) $\left.\begin{matrix} a + b + c = 1 \\ 2a + b = 2 \\ 9a + 3b + c = 2 \end{matrix}\right\} \rightarrow a = \frac{-3}{4}, b = \frac{7}{2}, c = -\frac{7}{4}$. La parábola buscada es $f(x) = -\frac{3}{4}x^2 + \frac{7}{2}x - \frac{7}{4}$.

10.69. Encuentra una función f si $f'(x) = 3x^2 + x + 1$ y $f(1) = 0$.

$f(x) = x^3 + \frac{x^2}{2} + x + C$. Como $f(1) = 0$, entonces $C = \frac{-5}{2}$. La función es $f(x) = x^3 + \frac{x^2}{2} + x - \frac{5}{2}$.

10.70. (TIC) Considera la función f definida en $(0, +\infty)$ mediante la fórmula $f(x) = \frac{2(1 + \ln x)}{x}$.

a) Utiliza la calculadora para resolver la ecuación $f(x) = 0$, redondeando hasta las milésimas.

b) Resuelve la inecuación $f(x) > 0$.

c) Obtén $f'(x)$ y los máximos o mínimos relativos de $f(x)$.

d) Esta función se utiliza como modelo para analizar los beneficios mensuales en millares de euros de una empresa de ventas, si vende x millares de objetos. Utilizando las cuestiones anteriores, responde a las siguientes preguntas:

i) ¿Cuál es el mínimo número de objetos que deben vender para que el beneficio sea positivo?

ii) ¿Cuántos objetos deben vender para obtener máximo beneficio?

a) $\frac{2(1 + \ln x)}{x} = 0 \rightarrow 2(1 + \ln x) = 0 \rightarrow 1 + \ln x = 0 \rightarrow \ln x = -1 \rightarrow x = e^{-1} = \frac{1}{e} \approx 0{,}368$

b) Si $x < 0{,}368 \rightarrow f(x) < 0$, y si $x > 0{,}368 \rightarrow f(x) > 0$

c) $f'(x) = 2 \cdot \frac{\frac{1}{x} \cdot x - (1 + \ln x) \cdot 1}{x^2} = \frac{-2 \ln x}{x^2} = 0 \rightarrow \ln x = 0 \rightarrow x = 1$

Si $x < 1 \rightarrow f'(x) > 0$, y si $x > 1 \rightarrow f'(x) < 0$. Por tanto, el punto $(1, f(1)) = (1, 2)$ es un máximo.

d) Para que el beneficio sea positivo, deben vender un mínimo de 369 objetos. Obtendrán el beneficio máximo con 1000 objetos.

10.71. ¿En qué casos la función $f(x) = x^3 + ax^2 + bx + c$ tiene algún máximo o mínimo relativo?

Para que la función $f(x)$ presente máximos o mínimos relativos, su derivada $f'(x) = 3x^2 + 2ax + b$ debe cambiar de signo por lo menos una vez, es decir, la ecuación $3x^2 + 2ax + b = 0$ debe tener dos soluciones, o sea, el discriminante $4a^2 - 12b > 0 \rightarrow a^2 > 3b$.

10.72. ¿Existen funciones polinómicas f y g tales que $(f \cdot g)' = f'g'$?

Si el grado de f es m y el grado de g es n, entonces el grado de $f \cdot g$ es $m + n$. Como el grado de la derivada de una función polinómica disminuye en uno, vemos que Grado $(f \cdot g)' = m + n - 1$ y que Grado $(f' \cdot g') = m - 1 + n - 1 = m + n - 2$.

Así pues, como los grados son distintos, no pueden existir dichas funciones polinómicas.

10.73*. Encuentra todas las funciones de la forma $f(x) = ax + b$ y $g(x) = cx + d$ tales que $\left(\dfrac{f(x)}{g(x)}\right)' = \dfrac{f'(x)}{g'(x)}$.

$$\left(\frac{f(x)}{g(x)}\right)' = \left(\frac{ax + b}{cx + d}\right)' = \frac{a(cx + d) - (ax + b)c}{(cx + d)^2} = \frac{ad - bc}{(cx + d)^2}$$

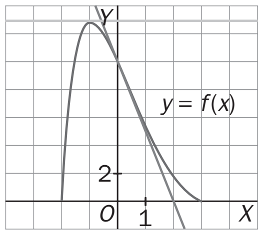
$$\frac{f'(x)}{g'(x)} = \frac{(ax + b)'}{(cx + d)'} = \frac{a}{c}$$

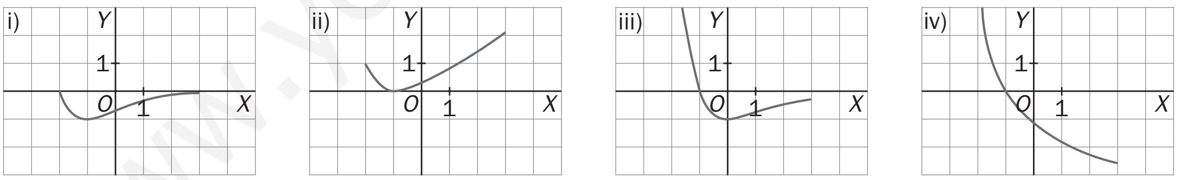
$\dfrac{ad - bc}{(cx + d)^2} = \dfrac{a}{c}$. El denominador de la primera fracción no puede ser constante, pues $c \neq 0$ al ser el denominador de la segunda. Así que la única opción que queda para que se dé la igualdad para todo x es que ambos numeradores sean cero, o sea: $ad - bc = 0$ y $a = 0$, por lo que $bc = 0$, y como $c \neq 0$, debe ser $b = 0$. Así pues, f es la función nula y g es cualquier función lineal con pendiente no nula.

10.74. Como se observa en la gráfica de la función $y = f(x)$, en $[-2, 3]$ la tangente en el punto de abscisa -1 es horizontal, y la tangente en el punto de abscisa 0 corta al eje horizontal en $x = 2$.

a) Halla la recta tangente en el punto de abscisa 0.

b) Determina cuál de las cuatro curvas siguientes representa la función $y = f'(x)$. Justifica por qué rechazas las otras tres.





a) La recta tangente pasa por los puntos $A(0, 10)$ y $B(2, 0) \Rightarrow y = -5x + 10$

b) La derivada debe cortar al eje X en el punto de abscisa $x = -1$, ya que la función tiene ahí un punto de tangente horizontal. Por este motivo descartamos la gráfica *a*.

La derivada debe ser negativa a partir de $x = -1$, ya que la función es decreciente. Eliminamos, por tanto, la gráfica *b*.

A medida que nos aproximamos a $x = 3$, la pendiente se va acercando a 0, y esto elimina la gráfica d.

La gráfica que representa la derivada de la función es la *c*.