

1. Calcular el dominio de las siguientes funciones: **(1 punto)**

a) $f(x) = \frac{x+1}{2x^2 - x - 1}$

b) $g(x) = \frac{\sqrt{x-2}}{x}$

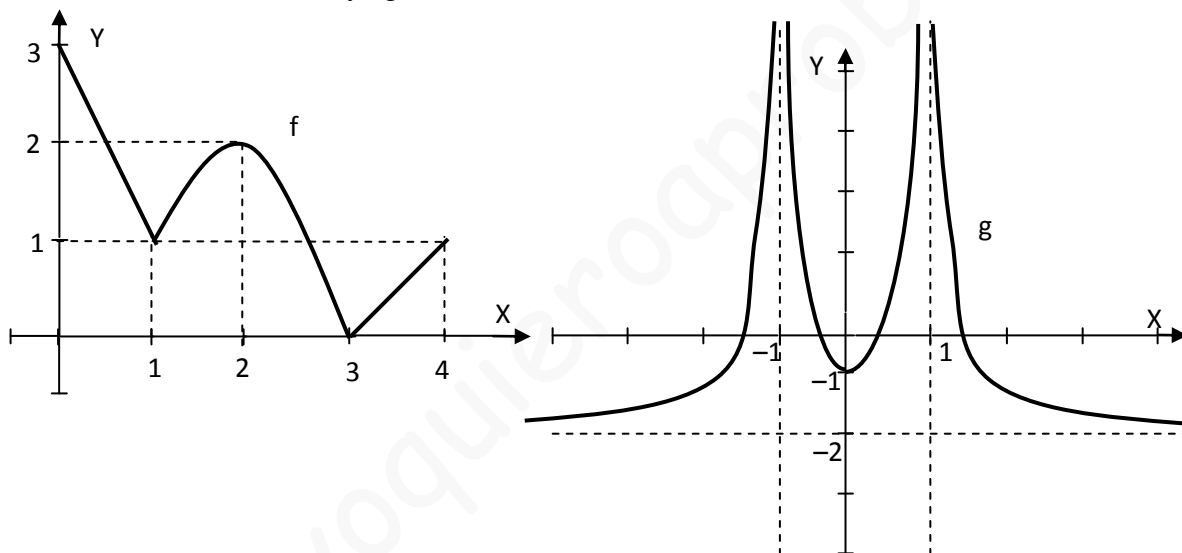
2. Estudia la simetría de las siguientes funciones: **(1 punto)**

a) $f(x) = \frac{x^3}{x^2 + x^4}$

b) $g(x) = \sqrt{x^2 - 2}$

3. Dada la función parabólica $y = 2x^2 - 13x + 20$, calcular: puntos de corte con los ejes **(0,5 puntos)**, vértice **(0,5 puntos)** y hacer la representación gráfica **(1 punto)**.

4. De cada una de las funciones cuya gráfica se da a continuación, calcular:



- a) Intervalos donde la función es creciente, decreciente, estrictamente creciente, estrictamente decreciente o constante. **(0,5 puntos)**
- b) Máximos y mínimos relativos y máximos y mínimos absolutos. **(0,5 puntos)**
- c) Dominio e imagen de la función. **(0,5 puntos)**

5. Dadas las funciones $f(x) = \frac{2x}{x-3}$ y $g(x) = \frac{x+1}{2x}$:

a) $f \circ g$ **(0,5 puntos)**

b) $g \circ f$ **(0,5 puntos)**

6. Dada la función $f(x) = \frac{3x}{2x-1}$, halla la función inversa de f respecto de la composición **(0,5 puntos)** y comprueba que efectivamente lo es **(1,5 puntos)**.

① a) $\text{Dom} f = \mathbb{R} - \{x \in \mathbb{R} / 2x^2 - x - 1 = 0\}$

$$2x^2 - x - 1 = 0 \Leftrightarrow x = \frac{1 \pm \sqrt{1 - 4 \cdot 2 \cdot (-1)}}{4} = \frac{1 \pm 3}{4} = \begin{cases} 1 \\ -\frac{1}{2} \end{cases}$$

Por tanto $\underline{\underline{\text{Dom} f = \mathbb{R} - \{1, -\frac{1}{2}\}}}$

b) $\text{Dom} g = \{x \in \mathbb{R} / x - 2 \geq 0\} - \{0\}$

Como $x - 2 \geq 0 \Leftrightarrow x \geq 2$, entonces: $\underline{\underline{\text{Dom} g = [2, +\infty)}}$

② a) $f(-x) = \frac{(-x)^3}{(-x)^2 + (-x)^4} = \frac{-x^3}{x^2 + x^4} = -\frac{x^3}{x^2 + x^4} = -f(x)$

Por tanto f es IMPAR (simétrica respecto del origen)

b) $g(-x) = \sqrt{(-x)^2 - 2} = \sqrt{x^2 - 2} = g(x)$

Por tanto g es PAR (simétrica respecto del eje Y)

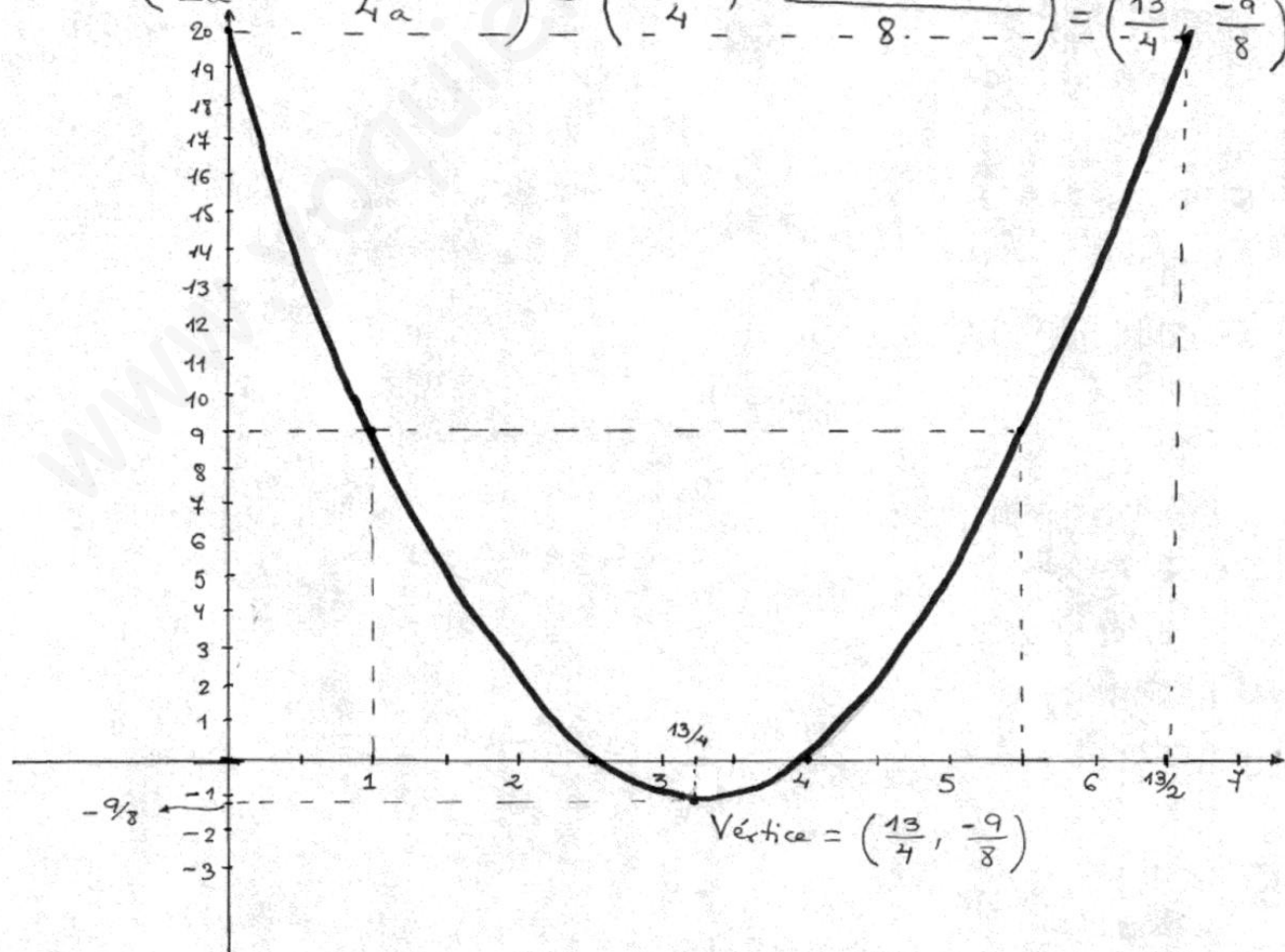
③ Punto de corte con el eje Y: $(0, 20)$

Puntos de corte con el eje X: $2x^2 - 13x + 20 = 0$

$$\Rightarrow x = \frac{13 \pm \sqrt{169 - 4 \cdot 2 \cdot 20}}{4} = \frac{13 \pm 3}{4} = \begin{cases} 4 \\ \frac{10}{4} = \frac{5}{2} \end{cases}$$

Por tanto los puntos de corte con el eje X son: $(4, 0)$ y $(\frac{5}{2}, 0)$

Vértice: $\left(\frac{-b}{2a}, \frac{-b^2 + 4ac}{4a}\right) = \left(\frac{13}{4}, \frac{-169 + 4 \cdot 2 \cdot 20}{-8}\right) = \left(\frac{13}{4}, \frac{-9}{8}\right)$



④ Función f :

a) f es estrictamente decreciente en $[0, 1) \cup (2, 3)$.

f es estrictamente creciente en $(1, 2) \cup (3, 4]$.

b) En $x=2$ hay un máximo relativo. Punto $(2, 2)$.

En $x=0$ hay un máximo absoluto. Punto $(0, 3)$.

En $x=1$ hay un mínimo relativo. Punto $(1, 1)$.

En $x=3$ hay un mínimo absoluto. Punto $(3, 0)$.

c) $\text{Dom } f = [0, 4]$; $\text{Im } f = [0, 3]$

Función g :

a) g es estrictamente decreciente en $(-1, 0) \cup (1, +\infty)$.

g es estrictamente creciente en $(-\infty, -1) \cup (0, 1)$.

b) En $x=0$ hay un mínimo relativo. Punto $(0, -1)$.

No hay máximos relativos. Tampoco hay ni máximos ni mínimos absolutos.

c) $\text{Dom } g = \mathbb{R} - \{-1, 1\}$; $\text{Im } g = (-2, +\infty)$

$$\textcircled{5} (f \circ g)(x) = f(g(x)) = f\left(\frac{x+1}{2x}\right) = \frac{2 \cdot \frac{x+1}{2x}}{\frac{x+1}{2x} - 3} = \frac{\frac{x+1}{x}}{\frac{-5x+1}{2x}} =$$
$$= \frac{2x(x+1)}{x(-5x+1)} = \frac{2(x+1)}{-5x+1} = \frac{2x+2}{-5x+1}$$

$$(g \circ f)(x) = g(f(x)) = g\left(\frac{2x}{x-3}\right) = \frac{\frac{2x}{x-3} + 1}{2 \cdot \frac{2x}{x-3}} = \frac{\frac{3x-3}{x-3}}{\frac{4x}{x-3}} =$$
$$= \frac{(3x-3)(x-3)}{4x(x-3)} = \frac{3x-3}{4x}$$

$$\textcircled{6} y = \frac{3x}{2x-1} \Rightarrow y(2x-1) = 3x \Rightarrow 2yx - y = 3x \Rightarrow$$
$$\Rightarrow 2yx - 3x = y \Rightarrow x(2y-3) = y \Rightarrow x = \frac{y}{2y-3}$$

La función inversa será pues $f^{-1}(x) = \frac{x}{2x-3}$

Comprobación:

$$(f \circ f^{-1})(x) = f(f^{-1}(x)) = f\left(\frac{x}{2x-3}\right) = \frac{3 \cdot \frac{x}{2x-3}}{2 \cdot \frac{x}{2x-3} - 1} = \frac{\frac{3x}{2x-3}}{\frac{3}{2x-3}} =$$
$$= \frac{3x(2x-3)}{3(2x-3)} = x \Rightarrow f \circ f^{-1} = \text{I}$$

$$(f^{-1} \circ f)(x) = f^{-1}(f(x)) = f^{-1}\left(\frac{3x}{2x-1}\right) = \frac{\frac{3x}{2x-1}}{2 \cdot \frac{3x}{2x-1} - 3} =$$
$$= \frac{\frac{3x}{2x-1}}{\frac{6x}{2x-1} - \frac{3(2x-1)}{2x-1}} = \frac{\frac{3x}{2x-1}}{\frac{3}{2x-1}} = \frac{3x(2x-1)}{3(2x-1)} = x \Rightarrow f^{-1} \circ f = \text{I}$$