REPASO DE TRIGONOMETRÍA

1.- Calcula las demás razones trigonométricas del ángulo α utilizando las relaciones fundamentales: (sin calcular el valor del ángulo α y trabajando con valores exactos)

a) $\operatorname{sen} \alpha = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$, $90º < \alpha < 180º$ b) $\operatorname{tg} \alpha = -\dfrac{\sqrt{3}}{3}$, $270º < \alpha < 360º$

2.- Sabiendo que $\cos \alpha = \dfrac{1}{2}$, $0º < \alpha < 90º$, calcula (sin calcular el valor del ángulo α)

a) $\operatorname{sen}(90º - \alpha)$ b) $\operatorname{tg}(180º + \alpha)$ c) $\operatorname{sen}(90º + \alpha)$ d) $\operatorname{tg}(-\alpha)$

3.- Resuelve las siguientes ecuaciones:

a) $\operatorname{sen} 2x - 2\cos^2 x = 0$ b) $\cos 2x - 3\operatorname{sen} x + 1 = 0$ c) $\operatorname{sen}\left(\dfrac{\pi}{4}+x\right)-\sqrt{2}\operatorname{sen} x = 0$

d) $\operatorname{sen}^2 x - \cos^2 x = 1$ e) $2\cos^2 x + \operatorname{sen} x = 1$ f) $\operatorname{sen}\left(\dfrac{\pi}{6}-x\right)+\cos\left(\dfrac{\pi}{3}-x\right)=\dfrac{1}{2}$

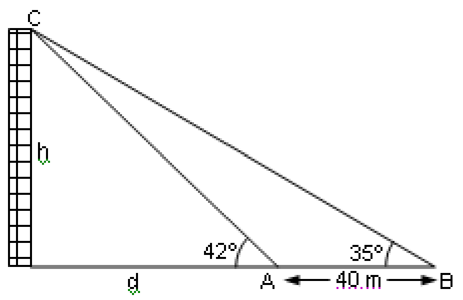
4.- Demuestra las siguientes igualdades:

a) $\sec x - \cos x = \operatorname{tg} x \cdot \operatorname{sen} x$ b) $\dfrac{2\operatorname{sen} x}{\operatorname{tg} 2x}+\dfrac{\operatorname{sen}^2 x}{\cos x}=\cos x$ c) $\dfrac{(\operatorname{sen} x+\cos x)\cdot\cos 2x}{\cos x-\operatorname{sen} x}=1+\operatorname{sen} 2x$

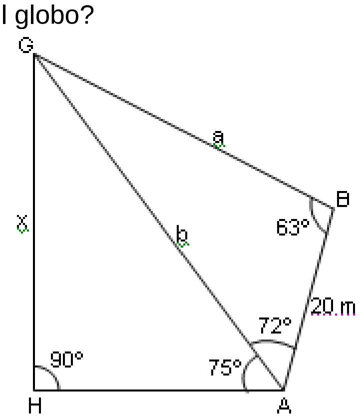
d) $\dfrac{\operatorname{sen} x\cos x}{\cos^2 x-\operatorname{sen}^2 x}=\dfrac{1}{2}\operatorname{tg} 2x$ e) $\cos x+2\operatorname{sen}^2\dfrac{x}{2}=1$ f) $\dfrac{1-\operatorname{sen} x}{\cos x}=\dfrac{\operatorname{sen}(90º-x)}{1+\operatorname{sen} x}$

g) $\dfrac{\operatorname{sen}(-x)\cdot\operatorname{ctg}(2\pi-x)}{\operatorname{tg}(\pi+x)\cdot\operatorname{sen}\left(\dfrac{\pi}{2}-x\right)}=\operatorname{ctg} x$ h) $\dfrac{\operatorname{tg} x}{\operatorname{tg} 2x-\operatorname{tg} x}=\cos 2x$ i) $\dfrac{\cos(a+b)+\cos(a-b)}{\operatorname{sen}(a+b)+\operatorname{sen}(a-b)}=\dfrac{1}{\operatorname{tg} a}$

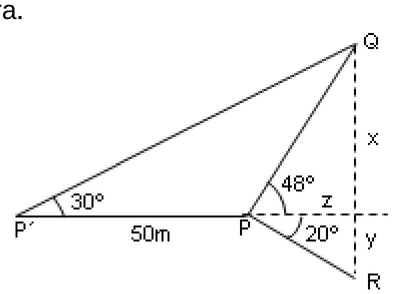
5.- Estamos en *A*, medimos el ángulo bajo el que se ve el edificio (42°), nos alejamos 40 m y volvemos a medir el ángulo (35°). ¿Cuál es la altura del edificio y a qué distancia nos encontramos de él?



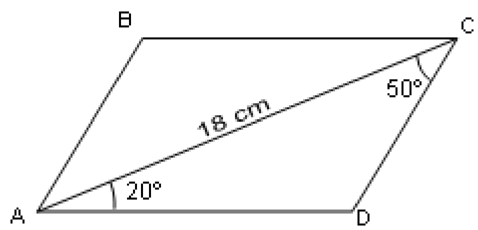
6.- Para hallar la altura de un globo, realizamos las mediciones indicadas en la figura. ¿Cuánto dista el globo del punto *A*? ¿Cuánto del punto *B*? ¿A qué altura está el globo?



7.- Halla la altura del árbol *QR* de pie inaccesible y más bajo que el punto de observación, con los datos de la figura.



8.- Calcula las longitudes de los lados y la otra diagonal del siguiente paralelogramo:



SOLUCIONES

1.- Calcula las demás razones trigonométricas del ángulo α utilizando las relaciones fundamentales: (sin calcular el valor del ángulo α y trabajando con valores exactos)

a) sen α = $\frac{\sqrt{3}}{2}$

$$\text{sen}^2\alpha + \cos^2\alpha = 1 \Rightarrow \cos^2\alpha = 1 - \frac{3}{4} = \frac{1}{4} \Rightarrow \cos\alpha = \frac{1}{2}$$

$$\text{tg}\,\alpha = \frac{\text{sen}\,\alpha}{\cos\alpha} = \frac{\sqrt{3}}{2} : \frac{1}{2} = \sqrt{3}$$

b) tg α = $\frac{\sqrt{3}}{3}$

$$\text{tg}^2\alpha + 1 = \frac{1}{\cos^2\alpha} \Rightarrow \left(\frac{\sqrt{3}}{3}\right)^2 + 1 = \frac{1}{\cos^2\alpha} \Rightarrow \frac{1}{\cos^2\alpha} = \frac{3}{9} + 1 = \frac{12}{9} = \frac{4}{3} \Rightarrow \cos^2\alpha = \frac{3}{4} \Rightarrow \cos\alpha = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\text{sen}^2\alpha + \cos^2\alpha = 1 \Rightarrow \text{sen}^2\alpha = 1 - \frac{3}{4} = \frac{1}{4} \Rightarrow \text{sen}\,\alpha = \frac{1}{2}$$

2.- Sabiendo que cos α = $\frac{1}{2}$, 0º < α < 90º, calcula (sin calcular el valor del ángulo α)

a) sen(90º – α) **b) tg (180º + α)** **c) sen (90º + α)** **d) tg (-α)**

$$\text{sen}^2\alpha = 1 - \cos^2\alpha \Rightarrow \text{sen}^2\alpha = 1 - \frac{1}{4} = \frac{3}{4} \Rightarrow \text{sen}\,\alpha = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\text{tg}\,\alpha = \frac{\text{sen}\,\alpha}{\cos\alpha} = \frac{\sqrt{3}}{2} : \frac{1}{2} = \sqrt{3}$$

a) cos (90º – α) = sen α **=** $\frac{\sqrt{3}}{2}$

b) tg (180º + α) = tg α = $\sqrt{3}$

c) sen (90º + α) = – cos α = $-\frac{1}{2}$

d) tg (180º + α) = - tg α = - $\sqrt{3}$

3.- Resuelve las siguientes ecuaciones:

a) sen 2x – 2 cos²x = 0

$$2 \text{ sen } x \cos x - 2\cos^2 x = 0 \Rightarrow 2 \cos x (\text{sen } x - \cos x) = 0 \Rightarrow \begin{cases} \text{sen } x = \cos x \rightarrow x = 45º \,;\, x = 225º \\ \cos x = 0 \rightarrow x = 90º \,;\, x = 270º \end{cases}$$

b) cos 2x – 3sen x + 1 = 0

$$\cos^2 x - \text{sen}^2 x - 3\text{sen } x + 1 = 0 \Rightarrow 1 - \text{sen}^2 x - \text{sen}^2 x - 3\text{sen } x + 1 = 0 \Rightarrow$$

$$2\text{sen}^2 x + 3 \text{ sen } x - 2 = 0$$

$$\text{sen } x = \frac{-3 \pm 5}{4} \Rightarrow \begin{cases} \text{sen } x = \frac{1}{2} \rightarrow x = 30º \,;\, x = 150º \\ \text{sen } x = -2 \rightarrow \text{Imposible} \end{cases}$$

c) $\text{sen}\left(\frac{\pi}{4} + x\right) - \sqrt{2}\,\text{sen}\,x = 0$

$$\text{sen}\left(\frac{\pi}{4} + x\right) = \text{sen}\frac{\pi}{4}\cos x + \cos\frac{\pi}{4}\,\text{sen}\,x = \frac{\sqrt{2}}{2}\cos x + \frac{\sqrt{2}}{2}\,\text{sen}\,x$$

$$\text{sen}\left(\frac{\pi}{4} + x\right) - \sqrt{2}\,\text{sen}\,x = \frac{\sqrt{2}}{2}\cos x + \frac{\sqrt{2}}{2}\,\text{sen}\,x - \sqrt{2}\,\text{sen}\,x = 0 \Rightarrow$$

$$\frac{\sqrt{2}}{2}\cos x - \frac{\sqrt{2}}{2}\,\text{sen}\,x = 0 \Rightarrow \cos x - \text{sen } x = 0 \Rightarrow \cos x = \text{sen } x \Rightarrow \begin{cases} x = 45º \\ x = 225º \end{cases}$$

d) sen² x – cos² x = 1

$$1 - \cos^2 x - \cos^2 x = 1 \Rightarrow -2 \cos^2 x = 0 \Rightarrow \cos x = 0 \Rightarrow \begin{cases} x = 90º \\ x = 270º \end{cases}$$

e) 2 cos² x + sen x = 1

$$2(1 - \text{sen}^2 x) + \text{sen } x = 1 \Rightarrow 2 - 2\text{sen}^2 x + \text{sen } x = 1 \Rightarrow 2\text{sen}^2 x - \text{sen } x - 1 = 0$$

$$\text{sen } x = \frac{1 \pm 3}{4} \Rightarrow \begin{cases} \text{sen } x = 1 \rightarrow x = 90º \\ \text{sen } x = -\frac{1}{2} \rightarrow x = 210º \,;\, x = 330º \end{cases}$$

f) $\text{sen}\left(\frac{\pi}{6} - x\right) + \cos\left(\frac{\pi}{3} - x\right) = \frac{1}{2}$

$$\text{sen}\left(\frac{\pi}{6} - x\right) = \text{sen}\frac{\pi}{6}\cos x - \cos\frac{\pi}{6}\,\text{sen}\,x = \frac{1}{2}\cos x - \frac{\sqrt{3}}{2}\,\text{sen}\,x$$

$$\cos\left(\frac{\pi}{3} - x\right) = \cos\frac{\pi}{3}\cos x + \text{sen}\frac{\pi}{3}\,\text{sen } x = \frac{1}{2}\cos x + \frac{\sqrt{3}}{2}\,\text{sen } x$$

$$\text{sen}\left(\frac{\pi}{6} - x\right) + \cos\left(\frac{\pi}{3} - x\right) = \frac{1}{2} \Rightarrow \frac{1}{2}\cos x - \cancel{\frac{\sqrt{3}}{2}\text{sen}\,x} + \frac{1}{2}\cos x + \cancel{\frac{\sqrt{3}}{2}\text{sen}\,x} = \frac{1}{2} \Rightarrow \cos x = \frac{1}{2} \Rightarrow \begin{cases} x = 60º \\ x = 300º \end{cases}$$

4.- Demuestra las siguientes identidades

a) sec x – cos x = tg x · sen x

$$\sec x - \cos x = \frac{1}{\cos x} - \cos x = \frac{1-\cos^2 x}{\cos x} = \frac{\text{sen}^2 x}{\cos x} = \text{sen } x \cdot \frac{\text{sen} x}{\cos x} = \text{sen } x \cdot \text{tg } x$$

b) $\frac{2\text{sen} x}{\text{tg} 2x} + \frac{\text{sen}^2 x}{\cos x} = \cos x$

$$\frac{2\text{sen} x}{\text{tg} 2x} + \frac{\text{sen}^2 x}{\cos x} = \frac{2\text{sen} x}{\frac{2\text{tg} x}{1-\text{tg}^2 x}} + \frac{\text{sen}^2 x}{\cos x} = \frac{\text{sen} x\cdot(1-\text{tg}^2 x)}{\text{tg} x} + \frac{\text{sen}^2 x}{\cos x} \underset{(1)}{=} \cos x\cdot\left(1-\text{tg}^2 x\right) + \frac{\text{sen}^2 x}{\cos x} \underset{(2)}{=}$$

$$= \frac{\cos^2 x - \text{sen}^2 x}{\cos x} + \frac{\text{sen}^2 x}{\cos x} = \cos x$$

(1) $\text{tg} x = \frac{\text{sen} x}{\cos x} \to \frac{\text{sen} x}{\text{tg} x} = \cos x$

(2) $\cos x\left(1-\text{tg}^2 x\right) = \cos x\left(1-\frac{\text{sen}^2 x}{\cos^2 x}\right) = \cos x\left(\frac{\cos^2 x - \text{sen}^2 x}{\cos^2 x}\right) = \frac{\cos^2 x - \text{sen}^2 x}{\cos x}$

c) $\frac{(\text{sen} x + \cos x)\cdot\cos 2x}{\cos x - \text{sen} x} = 1 + \text{sen} 2x$

$$\frac{(\text{sen} x + \cos x)\cdot(\cos^2 x - \text{sen}^2 x)}{\cos x - \text{sen} x} = (\text{sen} x + \cos x)^2 = \text{sen}^2 x + \cos^2 x + 2\text{sen} x\cdot\cos x = 1 + \text{sen} 2x$$

d) $\frac{\text{sen} x \cos x}{\cos^2 x - \text{sen}^2 x} = \frac{1}{2}\text{tg} 2x$

$$\frac{\text{sen} x \cos x}{\cos^2 x - \text{sen}^2 x} = \frac{1}{2}\cdot\frac{2\text{sen} x\cos x}{\cos^2 x - \text{sen}^2 x} = \frac{1}{2}\cdot\frac{\text{sen} 2x}{\cos 2x} = \frac{1}{2}\text{tg} 2x$$

e) $\cos x + 2\text{sen}^2\frac{x}{2} = 1$

$$\cos x + 2\text{sen}^2\frac{x}{2} = \cos x + 2\cdot\left(\sqrt{\frac{1-\cos x}{2}}\right)^2 = \cos x + \cancel{2}\cdot\left(\frac{1-\cos x}{\cancel{2}}\right) = \cos x + 1 - \cos x = 1$$

f) $\frac{1-\text{sen} x}{\cos x} = \frac{\text{sen}(90^\circ - x)}{1+\text{sen} x}$

$\frac{1-\text{sen} x}{\cos x} = \frac{\text{sen}(90^\circ - x)}{1+\text{sen} x} \to$ (1 – sen x)(1 + sen x) = cos x · sen (90º – x) $\to$ 1 – sen^2 x = cos x · cos x $\to$

cos^2 x = cos^2 x

g) $\displaystyle \mathbf{\frac{sen\,(-x)\cdot ctg\,(2\pi-x)}{tg\,(\pi+x)\cdot sen\left(\frac{\pi}{2}-x\right)}=ctg\,x}$

Teniendo en cuenta:

a) sen (-x) = - sen x b) $ctg(2\pi-x)=-ctg\,x$ c) $tg(\pi+x)=tg\,x$ d) $sen\left(\frac{\pi}{2}-x\right)=cos\,x$

$$\frac{sen\,(-x)\cdot ctg(2\pi-x)}{tg(\pi+x)\cdot sen\left(\frac{\pi}{2}-x\right)}=\frac{(-sen\,x)\cdot(-ctg\,x)}{tg\,x\cdot cos\,x}=\frac{\cancel{sen\,x}\cdot\frac{cos\,x}{\cancel{sen\,x}}}{\frac{sen\,x}{\cancel{cos\,x}}\cdot\cancel{cos\,x}}=\frac{cos\,x}{sen\,x}=ctg\,x$$

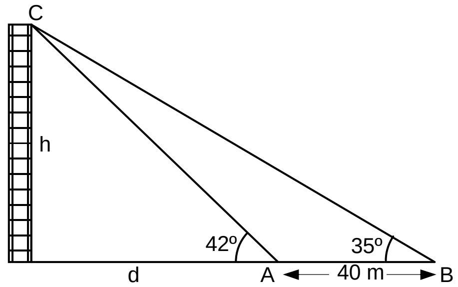
h) $\displaystyle \mathbf{\frac{tg\,x}{tg\,2x-tg\,x}=cos\,2x}$

$$\frac{tg\,x}{tg\,2x-tg\,x}=\frac{tg\,x}{\frac{2tg\,x}{1-tg^2x}-tg\,x}=\frac{tg\,x}{\frac{tg\,x+tg^3x}{1-tg^2x}}=\frac{\cancel{tg\,x}\cdot\left(1-tg^2x\right)}{\cancel{tg\,x}\cdot\left(1+tg^2x\right)}=\frac{1-\frac{sen^2x}{cos^2x}}{1+\frac{sen^2x}{cos^2x}}=\frac{cos^2x-sen^2x}{cos^2x+sen^2x}=cos\,2x$$

i) $\displaystyle \mathbf{\frac{cos\,(a+b)+cos\,(a-b)}{sen\,(a+b)+sen\,(a-b)}=\frac{1}{tg\,a}}$

$$\frac{cos(a+b)+cos(a-b)}{sen(a+b)+sen(a-b)}=\frac{cos\,a\cdot cos\,b-\cancel{sen\,a\cdot sen\,b}+cos\,a\cdot cos\,b+\cancel{sen\,a\cdot sen\,b}}{sen\,a\cdot cos\,b+\cancel{cos\,a\cdot sen\,b}+sen\,a\cdot cos\,b-\cancel{cos\,a\cdot sen\,b}}=\frac{\cancel{2}\,cos\,a\cdot\cancel{cos\,b}}{\cancel{2}\,sen\,a\cdot\cancel{cos\,b}}=\frac{1}{tg\,a}$$

5.- Estamos en *A*, medimos el ángulo bajo el que se ve el edificio (42°), nos alejamos 40 m y volvemos a medir el ángulo (35°). ¿Cuál es la altura del edificio y a qué distancia nos encontramos de él? Observa la ilustración:



1ª forma: Empleando un sistema de ecuaciones:

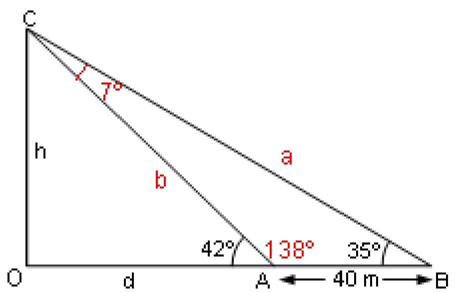
Tg 35º = $\frac{h}{d+40}$ $\Rightarrow$ h = 0,7 (d + 40)

Tg 42º = $\frac{h}{d}$ $\Rightarrow$ h = 0,9d

Resolvemos el sistema de ecuaciones:

0,9d = 0,7(d + 40) $\Rightarrow$ 0,9d = 0,7d + 28 $\Rightarrow$ 0,2d = 28 $\Rightarrow$ d = 140 m

h = 0,9 · 140 = 126 m



2ª forma: Empleando el teorema del seno:

Calculamos los ángulos del triángulo ABC: A = 180º - 42º = 135º

C = 180º - 35º - 138º = 7º

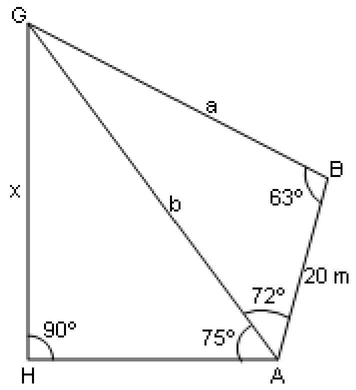
$$\frac{b}{sen\ 35º}=\frac{40}{sen\ 7º}\rightarrow b=\frac{40\cdot sen\ 35º}{sen\ 7º}=188{,}26$$

Empleando el triángulo rectángulo OCA:

$$sen\ 42º=\frac{188{,}26}{h}\rightarrow h=188{,}26\cdot sen\ 42º=126\ m$$

$$cos\ 42º=\frac{188{,}26}{x}\rightarrow x=188{,}26\cdot cos\ 42º=140\ m$$

6. Para hallar la altura de un globo, realizamos las mediciones indicadas en la figura. ¿Cuánto dista el globo del punto *A*? ¿Cuánto del punto *B* ? ¿A qué altura está el globo?



$\hat{G} = 180° - 72° - 63° = 45°$

Aplicando el teorema del seno al triángulo ABG, calculo a y b:

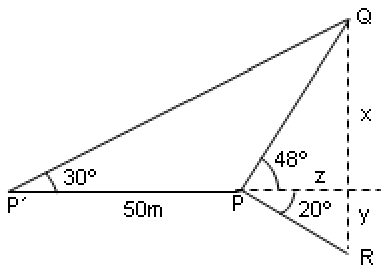
$\dfrac{a}{\text{sen}\,72º} = \dfrac{20}{\text{sen}\,45º} \Rightarrow a = \dfrac{20 \cdot \text{sen}\,72º}{\text{sen}\,45º}$ = 26,9 m dista del punto *B*

$\dfrac{b}{\text{sen}\,63º} = \dfrac{20}{\text{sen}\,45º} \Rightarrow b = \dfrac{20 \cdot \text{sen}\,63º}{\text{sen}\,45º}$ = 25,2 m dista del punto *A*.

Empleando el triángulo AHG, calculo x mediante la definición de seno de un ángulo:

$\text{sen } 75º = \dfrac{x}{b} \Rightarrow x = b \cdot \text{sen } 75º = 24{,}34$ m altura del globo

7.- Halla la altura del árbol *QR* de pie inaccesible y más bajo que el punto de observación, con los datos de la figura.



$\text{Tg } 48º = \dfrac{x}{z} \Rightarrow x = z \cdot \text{tg } 48º \Rightarrow x = 1{,}11z$

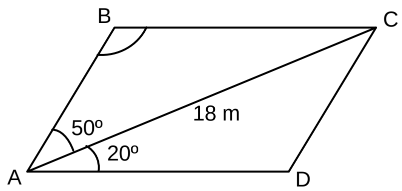
$\text{Tg } 30º = \dfrac{x}{50+z} \Rightarrow x = (50 + z) \cdot \text{tg } 30º \Rightarrow x = 0{,}577(50 + z)$

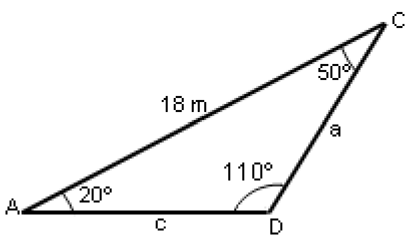
$1{,}11z = 28{,}85 + 0{,}577z \Rightarrow z = 54{,}13$ m

$\text{Tg } 20º = \dfrac{y}{z} \Rightarrow y = 54{,}13 \cdot \text{tg } 20º = 19{,}7$ m

QR = 79,82 m mide la altura del árbol.

8.- Calcula las longitudes de los lados y de la otra diagonal del siguiente paralelogramo:





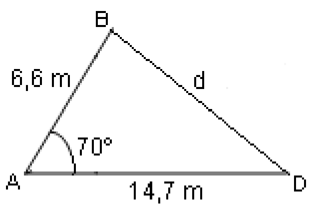
$\hat{B} = 180° - \hat{A} - \hat{C} = 110º$

Aplicando el teorema del seno, calculamos a y c:

$\dfrac{a}{\text{sen}\,20º} = \dfrac{18}{\text{sen}\,110º} \Rightarrow a = \dfrac{18 \cdot \text{sen}\,20º}{\text{sen}\,110º} \Rightarrow CD = 14{,}7$ m

$\dfrac{c}{\text{sen}\,50º} = \dfrac{18}{\text{sen}\,110º} \Rightarrow c = \dfrac{18 \cdot \text{sen}\,50º}{\text{sen}\,110º} \Rightarrow AD = 6{,}6$ m

Para calcular la otra diagonal, consideremos el triángulo *ABD*:



Aplicando el teorema del coseno:

$\overline{BD}^2 = \overline{AD}^2 + \overline{AB}^2 - 2 \cdot \overline{AD} \cdot \overline{AB} \cdot \cos 70º$

$\overline{BD}^2 = 6{,}6^2 + 14{,}7^2 - 2 \cdot 6{,}6 \cdot 14{,}7 \cdot \cos 70º = 193{,}28$

$\overline{BD} = 13{,}9$ m