FRACCIONES ALGEBRAICAS

Se llama ***fracción algebraica*** *al cociente de dos polinomios* $\frac{P(x)}{Q(x)}$

- **Ejemplos:**

$\frac{5x^2}{2x^2 - x}$, $\frac{x}{1-2x}$ son fracciones algebraicas

Las fracciones algebraicas se comportan, en muchos sentidos, como las fracciones numéricas.

1 FRACCIONES EQUIVALENTES

Dos ***fracciones algebraicas*** son ***equivalentes*** si toman el mismo valor numérico para cualesquiera valores de las variables que no anulen los denominadores.

Dos fracciones son equivalentes si coinciden los productos cruzados, es decir,

$$\frac{P(x)}{Q(x)} \text{ y } \frac{A(x)}{B(x)} \text{ son equivalentes si } A(x) \cdot Q(x) = P(x) \cdot B(x)$$

- **Ejemplos:**

$\frac{x}{x+1}$ y $\frac{x^2-2x}{x^2-x-2}$ *son equivalentes.*

Para demostrarlo efectuamos los productos cruzados:

$$\frac{x}{x+1} = \frac{x^2-2x}{x^2-x-2} \Rightarrow \begin{cases} x\cdot(x^2-x-2) = x^3 - x^2 - 2x \\ (x+1)(x^2-2x) = x^3 - 2x^2 + x^2 - 2x = x^3 - x^2 - 2x \end{cases}$$

1.1 Simplificación

Simplificar una fracción es hallar otra equivalente cuyos términos sean de menor grado que los de la fracción dada.

Para ello descomponemos factorialmente el numerador y el denominador y suprimimos los factores comunes a ambos términos.

- **Ejemplos:**

1) $\frac{x^2-x}{x^2-1}$

Extrayendo factor común: $x^2 - x = x\,(x - 1)$

Aplicando la diferencia de cuadrados: $x^2 - 1 = (x - 1)(x + 1)$

Una vez descompuestos, podemos simplicar:

$$\frac{x^2-x}{x^2-1} = \frac{x\cancel{(x-1)}}{(x+1)\cancel{(x-1)}} = \frac{x}{x+1}$$

2) $\dfrac{x^2+x-12}{x^2-9}$

Para descomponer $x^2 + x - 12$ empleamos Ruffini:

$$\begin{array}{c|ccc} & 1 & 1 & -12 \\ 3 & & 3 & 12 \\ \hline & 1 & 4 & 0 \end{array} \quad \Rightarrow \; (x^2 + x - 12) = (x-3)\cdot(x+4)$$

Aplicando la diferencia de cuadrados: $x^2 - 9 = (x-3)(x+3)$

Por tanto la fracción se puede expresar de la siguiente manera:

$$\frac{x^2+x-12}{x^2-9}=\frac{(x+4)\,\cancel{(x-3)}}{(x+3)\,\cancel{(x-3)}}=\frac{x+4}{x+3}$$

1.2 Reducción a denominador común

Reducir a denominador común es buscar otras fracciones equivalentes a las dadas que tengan el mismo denominador.

Para reducir a común denominador hallamos el m.c.m. de los denominadores.

- **Ejemplos:**

1) Reducir a denominador común $\dfrac{3x}{x+2}$; $\dfrac{2x}{x-2}$

Calculamos el m.c.m. de los dos denominadores:

m.c.m. $(x + 2, x - 2) = (x + 2)(x - 2) = x^2 - 4$

Para calcular el numerador, dividimos el m.c.m. entre el denominador y el resultado lo multiplicamos por el numerador correspondiente (igual que con las fracciones numéricas):

$$\frac{3x}{x+2}=\frac{3x(x-2)}{x^2-4}=\frac{3x^2-6x}{x^2-4}$$

$$\frac{2x}{x-2}=\frac{2x(x+2)}{x^2-4}=\frac{2x^2+4x}{x^2-4}$$

2) Reducir las fracciones $\dfrac{2x-1}{x^2+4x+4}$ *y* $\dfrac{3x+2}{x^2+2x}$ *a denominador común.*

Calculamos el m.c.m. de los dos denominadores, para ello descomponemos en factores:

$$\left.\begin{array}{l} x^2+4x+4=(x+2)(x+2) \\ x^2+2x=x\,(x+2) \end{array}\right\} \longrightarrow \text{m.c.m} = x\,(x+2)^2$$

Calculamos los correspondientes numeradores de cada fracción:

$$\frac{2x-1}{x^2+4x+4}=\frac{x\,(2x-1)}{x(x+2)^2}=\frac{2x^2-x}{x\,(x+2)^2}$$

$$\frac{3x+2}{x^2+2x}=\frac{(3x+2)\,(x+2)}{x(x+2)^2}=\frac{3x^2+8x+4}{x(x-2)^2}$$

2 OPERACIONES

2.1 Suma y resta

Para sumar o restar dos fracciones, se reducen a denominador común y se suman o restan los numeradores.

- **Ejemplos:**

1) $\frac{x-2}{x}-\frac{2x-1}{x-1}$

m.c.m. (x, x – 1) = x(x – 1)

$$\frac{x-2}{x}-\frac{2x-1}{x-1}=\frac{(x-2)(x-1)-x(2x-1)}{x(x-1)}=\frac{x^2-2x-\cancel{x}+2-2x^2+\cancel{x}}{x(x-1)}=\frac{-x^2-2x+2}{x^2-x}$$

2) $\frac{x-2}{x^2+x}+\frac{2x-1}{x^2-1}$

En primer lugar reducimos a denominador común:

$$\left.\begin{array}{l} x^2+x=x\,(x+1) \\ x^2-1=(x-1)(x+1) \end{array}\right\}\Rightarrow \text{m.c.m}=x(x-1)(x+1)$$

$$\frac{x-2}{x^2+x}+\frac{2x-1}{x^2-1}=\frac{(x-1)(x-2)}{x(x+1)(x-1)}+\frac{(2x-1)x}{x(x+1)(x-1)}=\frac{x^2-2x-x+2+2x^2-x)}{x(x+1)(x-1)}=\frac{3x^2-4x+2}{x^3-x}$$

2.2 Multiplicación

El producto de dos o más fracciones algebraicas es otra fracción algebraica que tiene como numerador el producto de los numeradores y como denominador el producto de los denominadores.

- **Ejemplo:**

Multiplicar : $\frac{x^2-x-2}{x-3}\cdot\frac{3x-9}{x+1}$

$$\frac{x^2-x-2}{x-3}\cdot\frac{3x-9}{x+1}=\frac{(x^2-x-2)(3x-9)}{(x-3)(x+1)}$$

Antes de efectuar los productos vamos a ver si podemos simplificar algún factor, para ello descomponemos cada polinomio:

Por Ruffini, descomponemos $x^2 – x – 2 = (x -2)(x + 1)$

Por tanto, la fracción quedaría descompuesta de la siguiente manera:

$$\frac{x^2-x-2}{x-3}\cdot\frac{3x-9}{x+1}=\frac{(x^2-x-2)(3x-9)}{(x-3)(x+1)}=\frac{(x-2)(\cancel{x+1})\,3(\cancel{x-3})}{(\cancel{x-3})(\cancel{x+1})}=3(x-2)$$

Una vez simplificada, se efectúan los productos.

2.3 Cociente

El cociente de dos fracciones es el producto de la primera por la inversa de la segunda.

También se puede efectuar los productos cruzados.

- **Ejemplo:**

Efectuar: $\frac{x^2-x}{x-3}:\frac{3x}{2x-6}$

A la hora de efectuar la división dejamos los productos indicados para poder descomponer en factores y simplificar.

$$\frac{x^2-x}{x-3}:\frac{3x}{2x-6}=\frac{x^2-x}{x-3}\cdot\frac{2x-6}{3x}$$

Descomponemos, extrayendo factor común:

$x^2 - x = x\,(x - 1)$

$2x - 6 = 2\,(x - 3)$

Nos queda la fracción de la siguiente forma:

$$\frac{x^2-x}{x-3}\cdot\frac{2x-6}{3x}=\frac{\cancel{x}(x-1)\,2(\cancel{x-3})}{3(\cancel{x-3})\cancel{x}}=\frac{2(x-1)}{3}$$

- **Ejemplo:**

Efectúa las siguientes operaciones:

1) $\frac{x^2}{x^2-1}:\left(1-\frac{1-x}{x+1}\right)$

Efectuamos en primer lugar la operación del paréntesis

$$1-\frac{1-x}{x+1}=\frac{x+1-(1-x)}{x+1}=\frac{x+1-1+x}{x+1}=\frac{2x}{x+1}$$

A continuación, efectuamos la división:

$$\frac{x^2}{x^2-1}:\frac{2x}{x+1}=\frac{x^2\,(x+1)}{2x(x^2-1)}=\frac{x^{\cancel{2}}\,(\cancel{x+1})}{2\cancel{x}(x-1)(\cancel{x+1})}=\frac{x}{2(x-1)}$$

2) $\left(\frac{2}{1+x}-\frac{1}{x}\right)\cdot\left(x-\frac{1}{x}\right)$

Efectuamos en primer lugar la operación de cada paréntesis:

$$\frac{2}{1+x}-\frac{1}{x}=\frac{2x-1-x}{x(1+x)}=\frac{x-1}{x(1+x)}$$

$$x-\frac{1}{x}=\frac{x^2-1}{x}$$

Efectuamos el producto:

$$\left(\frac{2}{1+x}-\frac{1}{x}\right)\cdot\left(x-\frac{1}{x}\right)=\frac{x-1}{x(1+x)}\cdot\frac{x^2-1}{x}=\frac{(x-1)(x^2-1)}{x(1+x)\cdot x}=\frac{(\cancel{x+1})(x-1)^2}{x^2(\cancel{1+x})}=\frac{(x-1)^2}{x^2}=\left(\frac{x-1}{x}\right)^2$$