DESCOMPOSICIÓN FACTORIAL

1 RAÍCES DE UN POLINOMIO. TEOREMA DEL FACTOR

Se dice que el valor x = a es una **raíz de un polinomio** P(x) si el valor numérico de P(x) para x = a es 0, es decir:

$$\boxed{\mathbf{x = a \quad \text{es raíz de } P(x) \ \text{ si } \ P(a) = 0}}$$

Un polinomio P(x) se dice que es **divisible** por x – a cuando a es una raíz de P(x):

$$\mathbf{x = a \ \text{ es raíz de } P(x) \iff P(a) = 0 \iff P(x) : (x - a) \ \text{ es exacta} \iff x - a \ \text{ es un factor de } P(x)}$$

- **Ejemplos:**

1) Sea el polinomio $P(x) = x^2 - 5x + 6$.

Decimos que x = 2 es **raíz** de P(x) porque se cumple que P(2) = 0

$$P(2) = 2^2 - 5 \cdot 2 + 6 = 4 - 10 + 6 = 0.$$

En tal caso, diremos que el polinomio P(x) es divisible por x – 2.

Vamos a demostrarlo empleando la regla de Ruffini:

$$\begin{array}{r|rrr} & 1 & -5 & 6 \\ 2 & & 2 & -6 \\ \hline & 1 & -3 & 0 \end{array} \quad \Rightarrow \quad \text{El resto es 0, P(x) es divisible por x - 2}$$

2) Demuestra que x = 2 es raíz del polinomio $P(x) = x^2 - 5x + 6$, pero x = 1 no lo es.

Para ello, vamos a comprobar que P(2) = 0 y P(1) ≠ 0

$P(2) = 2^2 - 5 \cdot 2 + 6 = 4 - 10 + 6 = 0 \Rightarrow x = 2$ es raíz de P(x)

$P(1) = 1^2 - 5 \cdot 1 + 6 = 1 - 5 + 6 = 2 \Rightarrow x = 1$ no es raíz de P(x)

3) ¿Es x = 1 raíz del polinomio $P(x) = x^2 - 2x + 1$?

Demostramos que es raíz del polinomio empleando la regla de Ruffini

$$\begin{array}{r|rrr} & 1 & -2 & 1 \\ 1 & & 1 & -1 \\ \hline & 1 & -1 & 0 \end{array} \quad \Rightarrow \quad P(1) = 0 \Rightarrow x = 1 \text{ es raíz de P(x)}$$

2 DESCOMPOSICIÓN FACTORIAL DE UN POLINOMIO

Las raíces de un polinomio P(x) son las soluciones de la ecuación P(x) = 0.

Si "a" es una raíz de un polinomio P(x), podemos expresar P(x) como producto de dos factores

$$P(x) = Q(x)\cdot(x - a), \text{ siendo uno de ellos de primer grado.}$$

Si repitiéramos este proceso hasta llegar a un polinomio T(x) sin raíces reales, tendremos expresado el polinomio P(x) como producto de factores:

$$P(x) = (x - a)\cdot Q(x)= (x - a)\cdot (x - b) \cdot ... \cdot T(x).$$

Esta expresión es la **descomposición factorial de P(x).**

Vamos a ver distintos procedimientos para descomponer un polinomio:

MÉTODOS DE DESCOMPOSICIÓN

2.1. Buscar divisores de la forma x – a, aplicando la regla de Ruffini

En el apartado anterior, obtuvimos las siguientes conclusiones:

a) Si "a" es una raíz entera del polinomio, entonces "a" es un divisor del término independiente. Por tanto, las raíces enteras de un polinomio se busca entre los divisores del término independiente.

b) Si "a" es raíz del polinomio P(x), entonces (x – a) es un factor de P(x).

c) El número máximo de raíces de un polinomio es igual a su grado.

Para descomponer factorialmente un polinomio empleando la regla de Ruffini se procede así:

a) Si el polinomio no tiene término independiente, se saca factor común

b) Si el polinomio tiene término independiente, se busca sus raíces enteras entre los divisores del término independiente.

- **Ejemplos:**

1. Descomponer el polinomio $x^2 + x - 12$

Buscamos las posibles raíces entre los divisores de 12. Probamos con x = 3

$$\begin{array}{c|ccc} & 1 & 1 & -12 \\ 3 & & 3 & 12 \\ \hline & 1 & 4 & 0 \end{array} \quad \Rightarrow \; P(3) = 0 \; \Rightarrow x = 3 \text{ es raíz de } x^2 + x - 12$$

Al ser el resto cero, podemos expresar el polinomio como producto de dos:

$$x^2 + x - 12 = (x - 3) \cdot (x + 4)$$

La segunda raíz es - 4, el valor que anula el factor x + 4.

2. Descomponer el polinomio $2x^3 - 7x^2 - 19x + 60$

	2	-7	-19	60
-3		-6	39	-60
	2	-13	20	0
4		8	-20	
	2	-5	0	

Por tanto, se tiene:

$2x^3 - 7x^2 - 19x + 60 = (x + 3)(x - 4)(2x - 5)$

¡ OJO!!!!!!! DIFERENCIA RAÍCES Y FACTORES

¿Cuáles son las raíces del polinomio? Los valores que anula el polinomio:

$$x_1 = -3 \qquad x_2 = 4 \qquad x_3 = \frac{5}{2}$$

¿Cuáles son los factores del polinomio? Al ser el polinomio de grado 3, el polinomio se puede expresar como producto de tres binomios de grado 1:

$$x + 3 \qquad x - 4 \qquad 2x - 5$$

3. Descomponer el polinomio $x^3 - 2x^2 - 2x - 3$

	1	-2	-2	-3
3		3	3	3
	1	1	1	0

Por tanto:

$x^3 - 2x^2 - 2x - 3 = (x - 3)(x^2 + x + 1)$

2.2. Extraer factor común

Observa la siguiente expresión: a · b + a · c - a · d, se trata de una suma cuyos sumandos son productos y estos productos contienen un factor común a.

Podemos transformar la suma, extrayendo dicho factor común y colocando entre paréntesis los factores de cada sumando que quedarían al suprimir dicho factor común:

$$\boxed{\mathbf{a \cdot b + a \cdot c - a \cdot d = a \cdot (b + c - d)}}$$

- **Ejemplos:**

a) $3x + 3y = 3 \cdot (x + y)$

b) $4x + 6x^2 = 2 \cdot 2 \cdot x + 2 \cdot 3 \cdot x \cdot x = 2x \cdot (2 + 3x)$

- La transformación no es otra cosa que la aplicación de la propiedad distributiva.
- Cuando el factor común coincide con uno de los sumandos, en su lugar queda la unidad:

$$a + a \cdot b = a \cdot 1 + a \cdot b = a \cdot (1 + b)$$

- **Ejemplos:**

a) $2x + 4x^2 = 2 \cdot x \cdot 1 + 2 \cdot 2 \cdot x \cdot x = 2x \cdot (1 + 2x)$

b) $ab + 2\,b^2\,a = ab \cdot (1 + 2b)$

2.3. Aplicando las identidades notables

Otro procedimiento para descomponer polinomios de 2º grado es empleando las identidades notables:

$x^2 + 2ax + a^2 = (x + a)^2$ ---> $x^2 + 4x + 4 = (x + 2)^2$

$x^2 - 2ax + a^2 = (x - a)^2$ ---> $x^2 - 6x + 9 = (x - 3)^2$

$x^2 - a^2 = (x - a)(x + a)$ ---> $x^2 - 16 = (x - 4)(x + 4)$

- **Ejemplos:**

a) $9 - 4x^2 = (3 - 2x)(3 + 2x)$

b) $9x^4 + 6x^2 + 1 = (3x^2 + 1)^2$

c) $x^4 - 2x^2 + 1 = (x^2 - 1)^2 = (x - 1)^2 (x + 1)^2$

- Si tenemos el caso de una expresión con todos los términos negativos, extraemos factor común –1 y a continuación aplicamos el algoritmo.
- La misma operación haríamos si tenemos dos términos negativos en el trinomio.

- **Ejemplos:**

a) $-x^2 - 2x - 1 = -(x^2 + 2x + 1) = -(x + 1)^2$

b) $-x^2 + 6x - 9 = -(x^2 - 6x + 9) = -(x - 3)^2$

Para saber cuál de las tres identidades hay que aplicar podrías ayudarnos el siguiente algoritmo:

Nº de términos	Signos de los términos	Identidad	Descomposición	Ejemplo
2		$x^2 - a^2$	Obtenemos los dos términos, calculando la raíz cuadrada de los términos de la diferencia	$4x^2 - 9 = (2x - 3) \cdot (2x + 3)$ $\sqrt{4x^2} = 2x$; $\sqrt{9} = 3$
3	Uno de ellos es negativo $x^2 - 2ax + a^2$	$(x - a)^2$	Para determinar los dos términos de la resta calculamos la raíz cuadrada de los términos positivos	$4x^2 - 12x + 9 = (2x - 3)^2$ $\sqrt{4x^2} = 2x$; $\sqrt{9} = 3$
	Todos son positivos $x^2 + 2ax + a^2$	$(x + a)^2$	En expresiones con una sola variable, calculamos la raíz cuadrada del término de mayor grado y del término independiente	$4x^2 + 12x + 9 = (2x + 3)^2$ $\sqrt{4x^2} = 2x$; $\sqrt{9} = 3$

En muchas ocasiones para descomponer un polinomio en factores se emplean más de un procedimiento, de todos ellos, se aplica en primer lugar la extracción de factor común:

- **Ejemplos:**

a) $8x^2 - 8x + 2 = 2 \cdot (4x^2 - 4x + 1) = 2(2x - 1)^2$

b) $x^3 - 10x^2 + 25x = x(x^2 - 10x + 25) = x(x - 5)^2$

c) $x^4 - 1 = (x^2 + 1)(x^2 - 1) = (x^2 + 1)(x - 1)(x + 1)$

d) $a^3 - ab^2 = a(a^2 - b^2) = a(a - b)(a + b)$

Actividades resueltas

1.- Descomponer el polinomio $P(x) = x^3 - 7x + 6$

Buscamos sus posibles raíces entre los divisores del término independiente: $\pm 1, \pm 2, \pm 3, \pm 6$

$$\begin{array}{c|cccc} & 1 & 0 & -7 & 6 \\ 1 & & 1 & 1 & -6 \\ \hline & 1 & 1 & -6 & 0 \end{array} \qquad \begin{array}{l} \Rightarrow P(1) = 0 \ \Rightarrow x = 1 \text{ es raíz de } P(x) \\ \text{Luego } P(x) = (x-1)\cdot(x^2 + x - 6) \end{array}$$

Vamos a descomponer ahora el polinomio $Q(x) = (x^2 + x - 6)$

$$\begin{array}{c|ccc} & 1 & 1 & -6 \\ 1 & & 1 & 2 \\ \hline & 1 & 2 & 4 \end{array} \qquad \Rightarrow P(1) = 4 \Rightarrow x = 1 \text{ no es raíz de } Q(x)$$

Probamos con otros divisores:

$$\begin{array}{c|ccc} & 1 & 1 & -6 \\ 2 & & 2 & 6 \\ \hline & 1 & 3 & 0 \end{array} \qquad \begin{array}{l} \Rightarrow Q(2) = 0 \Rightarrow x = 2 \text{ es raíz de } Q(x) \\ \text{Luego } Q(x) = (x-2)\cdot(x+3) \end{array}$$

Por tanto, tenemos la descomposición de P(x): $P(x) = x^3 - 7x + 6 = (x-1)\cdot(x-2)\cdot(x+3)$

2.- Descomponer factorialmente el polinomio $P(x) = 3x^3 - 6x - 15x + 18$

Buscamos sus posibles raíces entre los divisores del término independiente: $\pm 1, \pm 2, \pm 3, \pm 6, \pm 9, \pm 18$

$$\begin{array}{c|cccc} & 3 & -6 & -15 & 18 \\ 1 & \downarrow & 3 & -3 & -18 \\ \hline & 3 & -3 & -18 & 0 \\ -2 & & -6 & 18 & \\ \hline & 3 & -9 & 0 & \end{array} \qquad \begin{array}{l} \\ \\ \rightarrow P(x) = (x-1)\cdot(3x^2 - 3x - 18) \\ \\ \rightarrow P(x) = (x-1)\cdot(x+2)\cdot(3x - 9) \end{array}$$

Por tanto, $P(x) = (x-1)\cdot(x+2)\cdot 3\cdot(x-3)$

3.- Descomponer factorialmente el polinomio $P(x) = x^3 + x^2 - 12x$

En primer lugar extraemos factor común ya que no tenemos término independiente para aplicar directamente Ruffini.

$x^3 + x^2 - 12x = x(x^2 + x - 12)$

$$\begin{array}{c|ccc} & 1 & 1 & -12 \\ 3 & & 3 & 12 \\ \hline & 1 & 4 & 0 \end{array} \qquad \Rightarrow (x^2 + x - 12) = (x-3)\cdot(x+4)$$

Luego $P(x) = x(x-3)(x+4)$