

EXAMEN de FUNCIONES

1. ¿Cómo son entre sí las imágenes de valores opuestos, de las funciones impares? ¿Y las de las pares? Pon un ejemplo **JUSTIFICADO** de función par y otro de función impar. (1 punto).
2. ¿Cuál es el punto común de las gráficas de todas las funciones exponenciales? ¿Y el de las logarítmicas? ¿Cuáles son los dominios y los recorridos de dichas funciones? Si tienen asíntotas indica cuáles son y por qué. **RAZONA TODAS LAS RESPUESTAS**. (1 punto).
3. Halla **RAZONADAMENTE** la expresión de la recíproca (inversa respecto a la composición) de $h(x) = 3 + \log(2x - 6)$. (1 punto).
4. Haz un estudio **RAZONADO** de la continuidad y las asíntotas de la función definida por $g(x) = \frac{x^2 - 4}{x^2 - x - 2}$ indicando los tipos de discontinuidades existentes y la posición de la gráfica de g respecto a las asíntotas. **JUSTIFICA TODAS LAS RESPUESTAS**. (3 puntos).
5. Sea f la función definida por $f(x) = 7x - x^2 + \frac{9}{x}$ Halla **RAZONADAMENTE**, a partir de su derivada, los intervalos de crecimiento y de decrecimiento de f así como los máximos y mínimos, absolutos y relativos. **JUSTIFICA TODAS LAS RESPUESTAS**. (2 puntos).
6. Halla **RAZONADAMENTE** el área del recinto cerrado delimitado por el eje de abscisas y la gráfica de la curva $y = x^3 - 6x^2 + 8x$. (2 puntos).

SOLUCIONES

1. Las funciones impares son simétricas respecto al origen de coordenadas, por ello a valores opuestos de su dominio les corresponden imágenes opuestas; es decir para todo valor x de su dominio se cumple $f(-x) = -f(x)$. Una función impar es, por ejemplo, $f(x) = x^3 + 1/x$ porque en ella, a valores opuestos de x , les corresponden imágenes opuestas.

Las funciones pares son simétricas respecto al eje de ordenadas, por ello a valores opuestos de su dominio les corresponde la misma imagen; es decir, para todo valor x de su dominio se cumple $f(-x) = f(x)$. Un ejemplo de función par es $f(x) = x^2 + 5$ ya que, a valores opuestos de x , les corresponde la misma imagen.

2. Las funciones exponenciales son de la forma $y = a^x$ (en las que a es un número positivo distinto de 1) por tanto todas ellas pasan por el punto $P(0, 1)$ y, como todas las potencias de base positiva son positivas, el dominio de las funciones exponenciales es todo \mathbf{R} y su recorrido es \mathbf{R}^+ . Además
 - si la base es mayor que 1,
 - cuando x tiende a $-\infty$, a^x tiende a 0 por ello la recta de ecuación $y=0$ (eje de abscisas) es asíntota horizontal por la izquierda.
 - No tiene asíntotas verticales porque a^x tiende a ∞ sólo si x tiende a $+\infty$
 - Si la base está entre 0 y 1,
 - cuando x tiende a $+\infty$, a^x tiende a 0 por lo tanto la recta de ecuación $y=0$ (eje de abscisas) es asíntota horizontal por la derecha.
 - No tiene asíntotas verticales porque a^x tiende a ∞ sólo si x tiende a $-\infty$

La función logarítmica, al ser recíproca de la exponencial, tiene los pares de valores de las variables en orden contrario a los de ésta, por ello, todas las funciones logarítmicas pasan por el punto $Q(1, 0)$, su dominio es \mathbf{R}^+ (recorrido de la exponencial) y su recorrido es todo \mathbf{R} (dominio de la exponencial). Además

- si la base es mayor que 1,
 - cuando x tiende a 0^+ , $\log_a x$ tiende a $-\infty$, motivo por el que la recta de ecuación $x=0$ (eje de ordenadas) es asíntota vertical por abajo.
 - No tiene asíntota horizontal porque cuando $x \rightarrow +\infty$, su imagen, $\log_a x \rightarrow +\infty$
- Si la base está entre 0 y 1,
 - cuando x tiende a 0^+ , $\log_a x$ tiende a $+\infty$, lo que implica que la recta de ecuación $x=0$ (eje de ordenadas) es asíntota vertical, en este caso por arriba.
 - No tiene asíntota horizontal porque cuando $x \rightarrow +\infty$, su imagen, $\log_a x \rightarrow -\infty$

3. Las funciones recíprocas (inversas respecto a la composición) tienen intercambiadas las variables; por lo tanto :

$$h(x) = 3 + \log(2x - 6) \quad \Leftrightarrow \quad y = 3 + \log(2x - 6) \xrightarrow{\text{RECÍPROCA}} x = 3 + \log(2y - 6)$$

Despejando la variable dependiente obtenemos la expresión de la recíproca de h :

$$x = 3 + \log(2y - 6) \xrightarrow{-3} x - 3 = \log(2y - 6) \xrightarrow{\text{DEFINICIÓN}} 2y - 6 = 10^{x-3} \xrightarrow{+6} 2y = 10^{x-3} + 6 \xrightarrow{\cdot 1/2} y = \frac{10^{x-3} + 6}{2}$$

La recíproca de $h(x) = 3 + \log(2x - 6)$ es:

$$h^{-1}(x) = \frac{10^{x-3} + 6}{2}$$

Es fácil comprobar que $(h \circ h^{-1})(x) = h[h^{-1}(x)] = x$ y, también, $(h^{-1} \circ h)(x) = h^{-1}[h(x)] = x$

4.
$$g(x) = \frac{x^2 - 4}{x^2 - x - 2}$$

Por tratarse de una función racional es continua en todo su dominio que es el conjunto de los números reales con excepción de los valores que anulen su denominador:

$$x^2 - x - 2 = (x - 2)(x + 1) \text{ por lo tanto el denominador se anula en } x = 2 \text{ y } x = -1$$

$$g \text{ es continua en } (-\infty, -1) \cup (-1, 2) \cup (2, +\infty)$$

Para estudiar las asíntotas y las discontinuidades, no tenemos más que analizar los límites de $g(x)$ en los extremos de los intervalos en que está definida y, para facilitar el cálculo de estos límites, simplificamos la expresión de $g(x)$.

$$g(x) = \frac{x^2 - 4}{x^2 - x - 2} = \frac{(x-2)(x+2)}{(x-2)(x+1)} \Rightarrow g(x) = \frac{x+2}{x+1} \text{ siempre que } x \neq -1 \text{ y } x \neq 2 \text{ (porque para estos dos valores no está definida).}$$

$$\bullet \lim_{x \rightarrow -1} g(x) = \lim_{x \rightarrow -1} \frac{x+2}{x+1} = \begin{cases} \frac{+1}{0^-} \rightarrow -\infty & \text{cuando } x \rightarrow -1^- \\ \frac{+1}{0^+} \rightarrow +\infty & \text{cuando } x \rightarrow -1^+ \end{cases} \Rightarrow$$

En $x = -1$ la discontinuidad es inevitable de salto infinito (asintótica).

La recta de ecuación $x = -1$ es doblemente asíntota vertical de g . La gráfica de la función va por la izquierda de la parte inferior de la asíntota y por la derecha de la parte superior.

$$\bullet \lim_{x \rightarrow 2} g(x) = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x+2}{x+1} = \frac{4}{3} \Rightarrow$$

En $x = 2$ la discontinuidad es evitable porque g sería continua en $x = 2$ haciendo

$$g(2) = \frac{3}{4}$$

$$\bullet \lim_{x \rightarrow -\infty} g(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x+2}{x+1} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1 + \frac{2}{x}}{1 + \frac{1}{x}} = 1^- \Rightarrow$$

La recta horizontal, de ecuación $y = 1$ es asíntota por la izquierda y la gráfica de g va por debajo de la misma.

$$\bullet \lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x+2}{x+1} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1 + \frac{2}{x}}{1 + \frac{1}{x}} = 1^+ \Rightarrow$$

La recta horizontal, de ecuación $y = 1$ es, también, asíntota por la derecha y la gráfica de g va, en este caso, por debajo de la misma.

5. $f(x) = 7x - x^2 + \frac{9}{x} \Rightarrow f'(x) = 7 - 2x - \frac{9}{x^2}$. La función f es creciente en los intervalos en los que su derivada es positiva y decreciente en los que es negativa. Para analizar el signo de la derivada averiguamos, primero, los valores que la anulan y, además, **tendremos en cuenta el hecho de que f no está definida en $x = 0$** por anularse su denominador para ese valor.

$$f'(x) = 0 \Rightarrow 7 - 2x - \frac{9}{x^2} = 0 \xrightarrow{\cdot x^2} 7x^2 - 2x^3 - 9 = 0 \Rightarrow -2x^3 + 7x^2 - 9 = 0$$

$$(x+1)(-2x^2 + 9x - 9) = 0 \Rightarrow \begin{cases} x+1 = 0 & \Rightarrow x = -1 \\ -2x^2 + 9x - 9 = 0 & \Rightarrow x = 3 \text{ y } x = 3/2 \end{cases}$$

Relación entre los valores de x , el signo de $f'(x)$ y el crecimiento o decrecimiento de f :

x	$-\infty$	$x < -1$	$x = -1$	$-1 < x < 0$	0^-	$x = 0$	0^+	$0 < x < 3/2$	$x = 3/2$	$3/2 < x < 3$	$x = 3$	$x > 3$	$+\infty$
$f'(x)$	+		0	-		\nexists	-		0	+	0	-	
f	$-\infty$	\nearrow	máx	\searrow	$-\infty$	\nexists	$+\infty$	\searrow	mín	\nearrow	máx	\searrow	$-\infty$

Conclusiones del análisis anterior:

f es creciente en $(-\infty, -1) \cup (3/2, 3)$ y decreciente en $(-1, 0) \cup (0, 3/2) \cup (3, +\infty)$

No tiene ni máximo ni mínimo absoluto porque $f(x)$ va de $-\infty$ a $+\infty$

En $x = -1$ y en $x = 3$ hay máximos relativos por pasar la función de ser creciente a ser decreciente y en $x = 3/2$ hay mínimo relativo porque pasa de decreciente a creciente. Hallamos las imágenes de dichos extremos relativos:

$$f(x) = 7x - x^2 + \frac{9}{x} \Rightarrow \begin{cases} f(-1) = 7(-1) - (-1)^2 + \frac{9}{(-1)} = -17 \\ f(3) = 7 \cdot 3 - 3^2 + \frac{9}{3} = 15 \\ f(3/2) = 7(3/2) - (3/2)^2 + \frac{9}{3/2} = \frac{57}{4} \end{cases}$$

Máximos relativos:
(-1, -17) y (3, 15)

Mínimo relativo:
(3/2, 57/4)

6. Área delimitada por el eje de abscisas (ecuación $y = 0$), y la curva $y = x^3 - 6x^2 + 8x$

Los valores de x entre los que se encuentra el área pedida nos lo dan los puntos de corte entre el eje de abscisas y la curva:

$$x^3 - 6x^2 + 8x = 0 \Rightarrow x(x^2 - 6x + 8) = 0 \Rightarrow x(x-2)(x-4) = 0 \Rightarrow x = 0, x = 2 \text{ o } x = 4$$

En los intervalos $(0, 2)$ y $(2, 4)$ las imágenes de los puntos de la curva no cambian de signo. Hallamos el área pedida calculando la integral definida de la curva en dichos intervalos:

$$A = A_1 + A_2 = \left| \int_0^2 y \, dx \right| + \left| \int_2^4 y \, dx \right| = \left| [Y]_0^2 \right| + \left| [Y]_2^4 \right| = |(Y(2) - Y(0))| + |(Y(4) - Y(2))| *$$

Siendo $Y' = y$

$Y = \int (x^3 - 6x^2 + 8x) \, dx = \frac{1}{4}x^4 - 2x^3 + 4x^2$ (como nos sirve una primitiva cualquiera hemos dejado 0 como término independiente).

$$Y = \frac{1}{4}x^4 - 2x^3 + 4x^2 \Rightarrow \begin{cases} Y(0) = 0 \\ Y(2) = 4 \\ Y(4) = 0 \end{cases} \quad \text{Sustituyendo en (*)}$$

$$A = |(Y(2) - Y(0))| + |(Y(4) - Y(2))| = |4 - 0| + |0 - 4| = 4 + 4 = 8$$

Área = 8 (u.l.)^2